Lektion 11

$\boxed{B4}$ **28 a**

$f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x-2}$ – vi gör den vanliga undersökningen m h a derivatan:

$$f'(x) = \left(\frac{e^{-x}}{x-2}\right)' = \frac{-e^{-x}(x-2) - e^{-x}}{(x-2)^2} = \frac{-e^{-x}(x-1)}{(x-2)^2}$$

$$\begin{array}{ccccc} + & 1 & - & 2 & - \\ f\uparrow & & f\downarrow & & f\downarrow \end{array} \quad f'$$

$\Rightarrow$ 1 är lok min, $f(1) = \dfrac{e^{-1}}{-1} = -\dfrac{1}{e}$.

Gransvärdet vid $\pm\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{e^x(x-2)} = 0^+ \Rightarrow$ $y = 0$ är en vågrät asymptot.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \underset{y=-x}{=} \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{e^y}{-y-2} = -\infty$.

Vi ser också att $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{e^{-x}}{x-2} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{e^{-x}}{x-2} = -\infty$

vilket betyder att $x = 2$ är en lodrät asymptot.

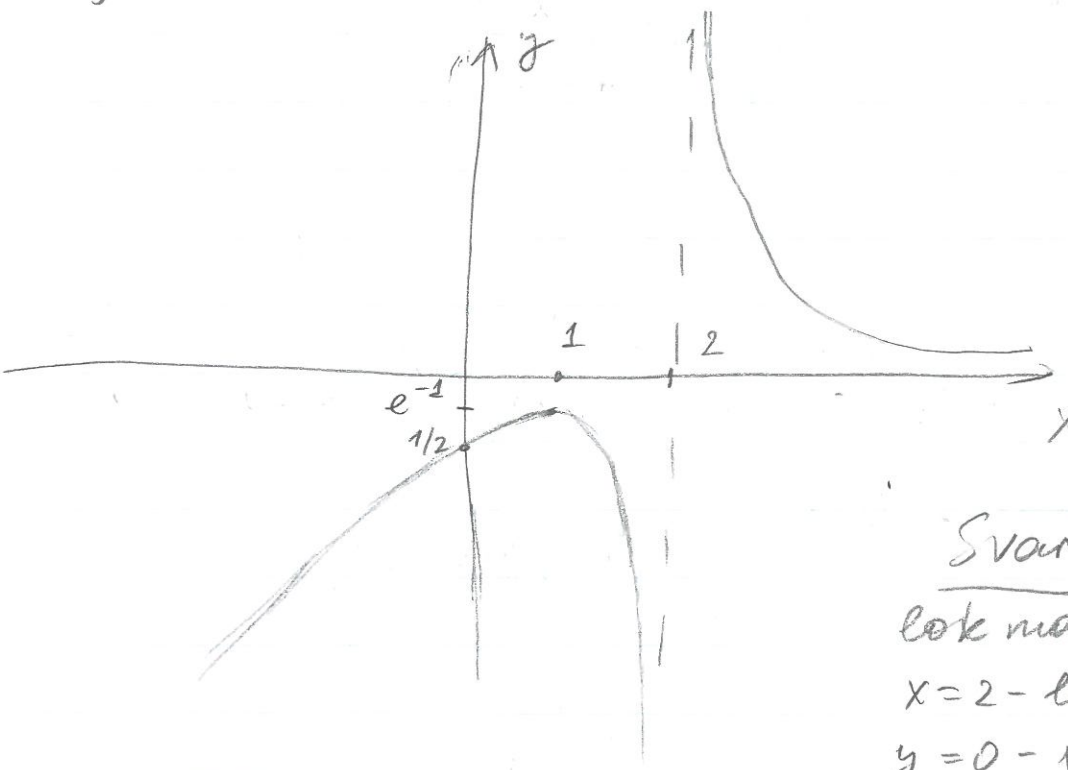
Det finns inga sneda asymptoter då

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x x(x-2)} = 0$, och

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x(x-2)}\overset{y=-x}{=}\lim_{y\to\infty}\frac{e^{y}}{-y(-y-2)}=\lim_{y\to\infty}\frac{\overbrace{e^{y}}^{}}{\underbrace{y^2}_{\to\infty}\underbrace{(1+\frac{2}{y})}_{\to 1}}$$

$$=\infty$$

Grafen ser ut så här!



Svar!

lok max $f(1)=-e^{-1}$

$x=2$ - lodrät asympt.

$y=0$ - vågrät asymp. då $x\to+\infty$.

$\boxed{P4}$ $\underline{\underline{33}}$ a) $y=\overset{=f(x)}{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$ - ritar den m h a derivatan.

Observera att $D_f = 1-x^2>0 \Leftrightarrow x^2-1<0 \Leftrightarrow$
$(x-1)(x+1)<0 \Rightarrow x\in(-1;1)$

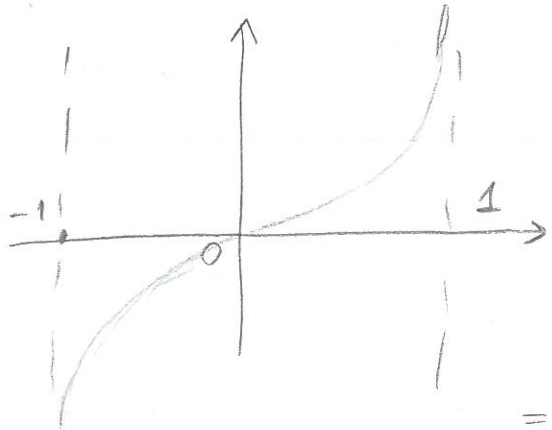
$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}>0 \quad i \quad D_f\ !$$

$\Rightarrow$ f är strängt växande.

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-1}f(x)&=\lim_{x\to-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\infty\\ \lim_{x\to1}f(x)&=\lim_{x\to1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=1 \text{ och } x=-1 \text{ är lodräta asympt.}$$

2



Grafen ser ut så här.

$$b)\ y = \overbrace{\frac{1}{x} + 2\arctan x + \ln\frac{|x|}{1+x^2}}^{=f(x)} \quad \text{har } D_f = \{x \neq 0\}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 2\arctan x + \ln\frac{x}{1+x^2} & \text{då } x>0 \\ \frac{1}{x} + 2\arctan x + \ln\frac{-x}{1+x^2} & \text{då } x<0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{x}\cdot\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} & x>0 \\ -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{+x}\cdot\left(+\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}\right) & x<0 \end{cases}$$

Vi ser att för alla $x \neq 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} =$$

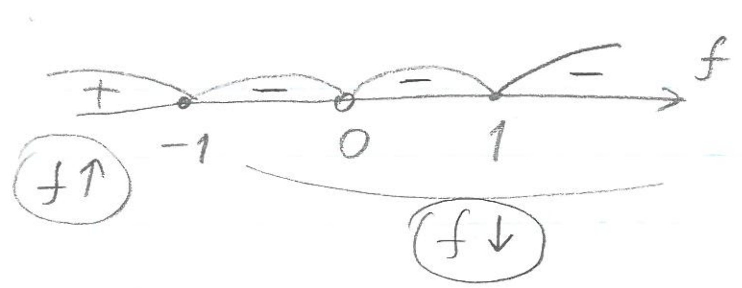
$$= \frac{-1-x^2+2x^2+x-x^3}{x^2(1+x^2)} =$$

$$= \frac{-1+x+x^2-x^3}{x^2(1+x^2)} =$$

$$= \frac{x-1-x^2(x-1)}{x^2(1+x^2)}$$

$$= \frac{(x-1)(1-x^2)}{x^2(1+x^2)}$$

$$= \frac{-(x-1)^2(x+1)}{x^2(1+x^2)}$$

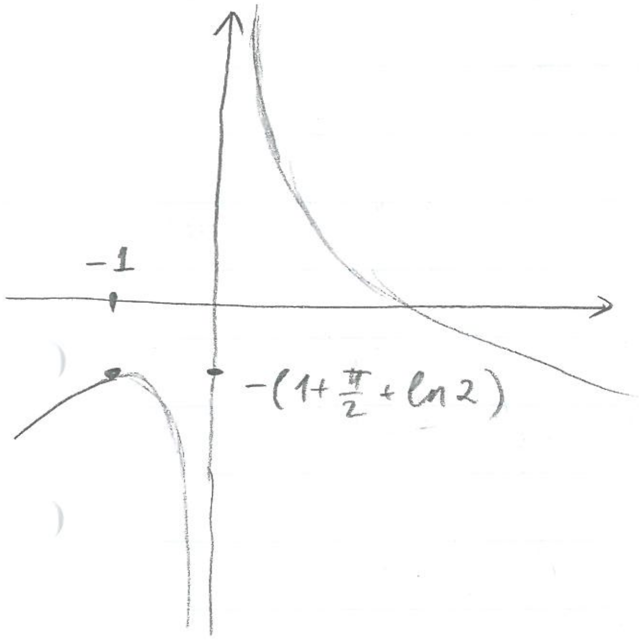


$\Rightarrow f(-1) =$

$= -1 + \overbrace{2\arctan(-1)}^{= -\frac{\pi}{4}} +$

$+ \ln\frac{1}{2} =$

$= -1 - \frac{\pi}{2} - \ln 2$ är en lokal max.



1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{x}{1+x^2}\right)$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} + \ln x - \underbrace{\ln(1+x^2)}_{\to 0}\right)$$

$$= [\infty - \infty] = \left[\begin{matrix} t = \frac{1}{x} \\ t\to\infty \end{matrix}\right]$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(t + \ln\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty}(t - \ln t) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} t\Big(1 - \underbrace{\frac{\ln t}{t}}_{\to 0}\Big) = +\infty$$

2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{-x}{1+x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\Big(\frac{1}{x} - \ln(-x) - \underbrace{\ln(1+x^2)}_{\to 0}\Big)$

$$= \left[\begin{matrix} t = -\frac{1}{x} \\ t\to\infty \end{matrix}\right] = \lim_{t\to\infty}\left(-t - \ln\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty}(\ln t - t) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} t\Big(\underbrace{\frac{\ln t}{t}}_{\to 0} - 1\Big) = -\infty.$$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} + \underbrace{2\arctan x}_{\to \frac{\pi}{2}} + \ln\frac{\overbrace{1/x}^{\to 0}}{\underbrace{1+\frac{1}{x^2}}_{\to 1}}\Bigg) =$

$= -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+2\arctan x+\ln\frac{-x}{1+x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{2\arctan x}_{\to\frac{\pi}{4}}+\ln\frac{\overset{\to 0}{-\frac{1}{x^2}}}{\underbrace{1+\frac{1}{x^2}}_{\to 1}}\right)=-\infty$$

34 Vi visar att

$$f(x)=\arctan(x+1)-\arctan x-\arctan\frac{1}{x^2+x+1}=0$$

för alla $x\in\mathbb{R}$.

Observera att $f(0)=\arctan 1-\arctan 1=0$.

Vidare är

$$f'(x)=\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+x^2}-$$

$$-\frac{1}{1+\frac{1}{(x^2+x+1)}^2}\cdot\frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+x^2}+\frac{\cancel{(x^2+x+1)^2}}{(x^2+x+1)^2+1}\cdot\frac{+(2x+1)}{\cancel{(x^2+x+1)^2}}$$

$$=\frac{\text{<täljaren>}}{(1+(x+1)^2)(1+x^2)(1+(1+x+x^2)^2)},$$

där täljaren är

$$(1+x^2)(1+(x^2+x+1)^2)-((1+x)^2+1)(1+(x^2+x+1)^2)$$

$$+(2x+1)(1+x^2)(1+(x+1)^2)=$$

$$= \left(1+(x^2+x+1)^2\right)\left(1+x^2-(2+x^2+2x)\right)+$$

$$+(2x+1)(1+x^2)\left(1+(x+1)^2\right)$$

$$= \left(1+(x^2+x+1)^2\right)(-1-2x) + (2x+1)(1+x^2)\left(1+(x+1)^2\right) =$$

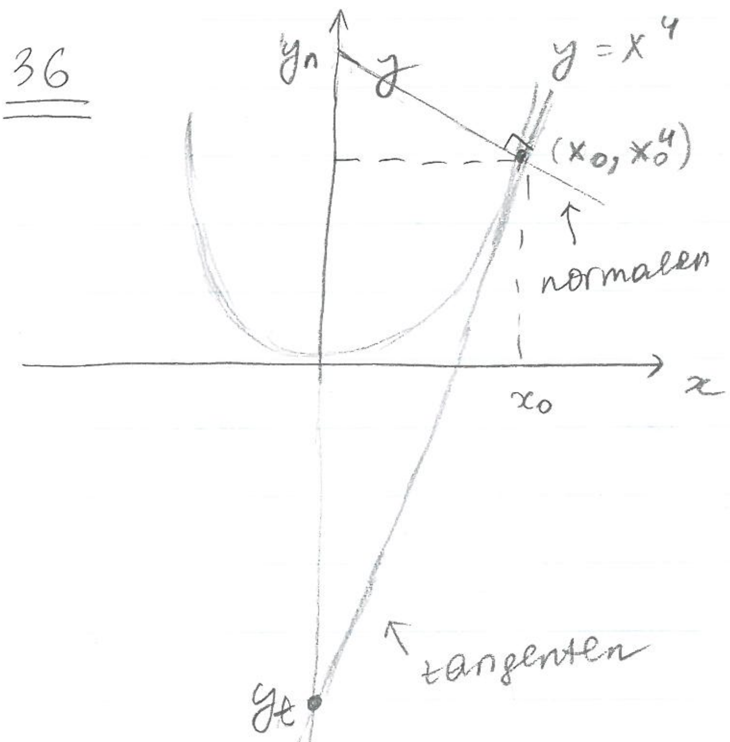
$$= -(2x+1)\Big(\cancel{1}+(x^2+x+1)^2-\cancel{1}-x^2-(1+x^2)\overbrace{(x+1)^2}^{x^2+2x+1}\Big)$$

$$= -(2x+1)\Big(\cancel{x^4}+\cancel{x^2}+\cancel{1}+\cancel{2x^3}+\cancel{2x}+\cancel{2x^2}-\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-\cancel{2x}-\cancel{1}-$$
$$-\cancel{x^4}-\cancel{2x^3}-\cancel{x^2}\Big)$$

$$= 0.$$

Det betyder att $f'(x)=0$ för alla $x \Rightarrow$
$f = \text{konst} = 0.$

<u>36</u>



Låt (x_0, x_0^4) vara en punkt på grafen.

Observera att triangelns area är $\frac{1}{2} x_0 \cdot (|y_t| + |y_n|)$, där y_t och y_n är skärningspunkter mellan tangenten resp. normalen och y-axeln.

Vi skriver tangentens ekvation genom (x_0, x_0^4):

$$y = x_0^4 + f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = x_0^4 + 4x_0^3(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y = -3x_0^4 + 4x_0^3 x$$

Tar $x = 0 \Rightarrow y_t = -3x_0^4$.

Normalens ekvation genom (x_0, x_0^4):

$$y = x_0^4 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Leftrightarrow y = x_0^4 - \frac{1}{4x_0^3}(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y = \left(x_0^4 + \frac{1}{4x_0^2}\right) - \frac{x}{4x_0^3}.$$

Tar $x = 0 \Rightarrow y_n = x_0^4 + \frac{1}{4x_0^2}$.

Vi kan nu skriva arean av triangeln

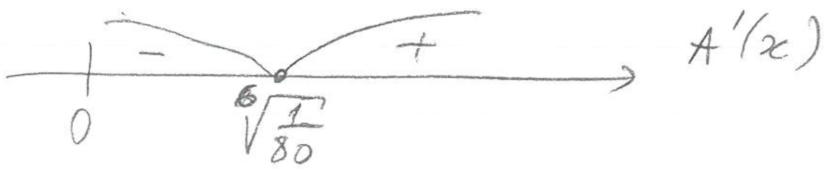
$$A(x_0) = \frac{1}{2}x_0\left(+3x_0^4 + x_0^4 + \frac{1}{4x_0^2}\right) \text{ eller}$$

$$A(x) = \frac{1}{2}x\left(4x^4 + \frac{1}{4x^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$A(x) = 2x^5 + \frac{1}{8x}$$ – undersöker denna funktion.

$$A'(x) = 10x^4 - \frac{1}{8x^2} = \frac{80x^6 - 1}{8x^2}$$

Den enda positiva roten i nämnaren är $x = \sqrt[6]{\frac{1}{80}}$



$\Rightarrow \sqrt[6]{\frac{1}{80}}$ är en global minimipunkt.

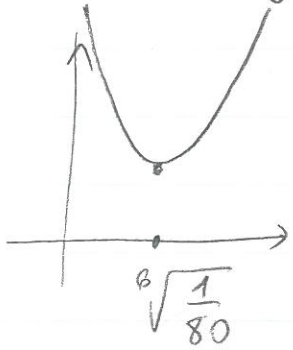
När $x \to \infty \Rightarrow A(x) \to \infty$, och $x \to 0 \Rightarrow A(x) \to \infty$

$$A\left(\sqrt[6]{\tfrac{1}{80}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt[6]{\frac{1}{80}}\left(4\left(\sqrt[6]{\tfrac{1}{80}}\right)^4 + \frac{1}{4\left(\sqrt[6]{\tfrac{1}{80}}\right)^2}\right) =$$

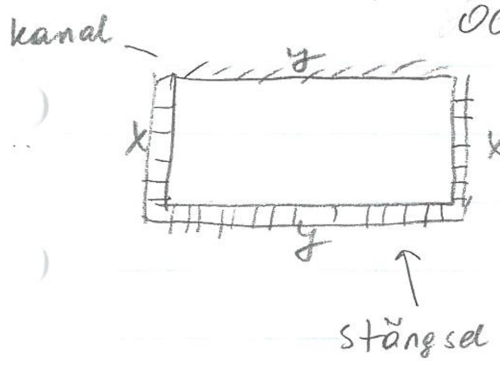
$$= \cancel{\frac{1}{2}\sqrt[6]{\frac{1}{80}}} \cdot \frac{16\cdot\frac{1}{80}+1}{4\left(\sqrt[6]{\tfrac{1}{80}}\right)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}+1}{8\sqrt[6]{\tfrac{1}{80}}} = \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\underset{20}{\cancel{40}}\sqrt[6]{\tfrac{1}{80}}} = \frac{3\sqrt[6]{80}}{20}$$

Det betyder att A har definitionsmängd $\left[\frac{3\sqrt[6]{80}}{20}\,;\,+\infty\right)$.



$\boxed{B4}$ <u>34</u> Låt sidan längs kanalen vara y, och låt den andra sidan vara x.



$\Rightarrow 2x + y = 400$

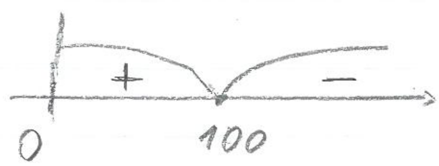
$\Rightarrow y = 400 - 2x.$

Då är arean

$A(x) = x(400-2x) = 400x - 2x^2$

och

$A'(x) = 400 - 4x$



$\Rightarrow$ 100 är en global maximipunkt, och $A(100) = 100 \cdot 200 = 2\cdot 10^4$ är den största möjliga arean.

41a $f(x) = e^{-x^2}$

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = -2x\,e^{-x^2}$$

$$f''(x) = \left(-2x\,e^{-x^2}\right)' = -2e^{-x^2} - 2x\cdot(-2x)e^{-x^2} =$$

$$= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

$$f'''(x) = \left(-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}\right)' =$$

$$= -2(-2x)e^{-x^2} + 8x\,e^{-x^2} + 4x^2(-2x)e^{-x^2} =$$

$$= 4x\,e^{-x^2} + 8x\,e^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2} =$$

$$= e^{-x^2}(12x - 8x^3).$$

Extra:

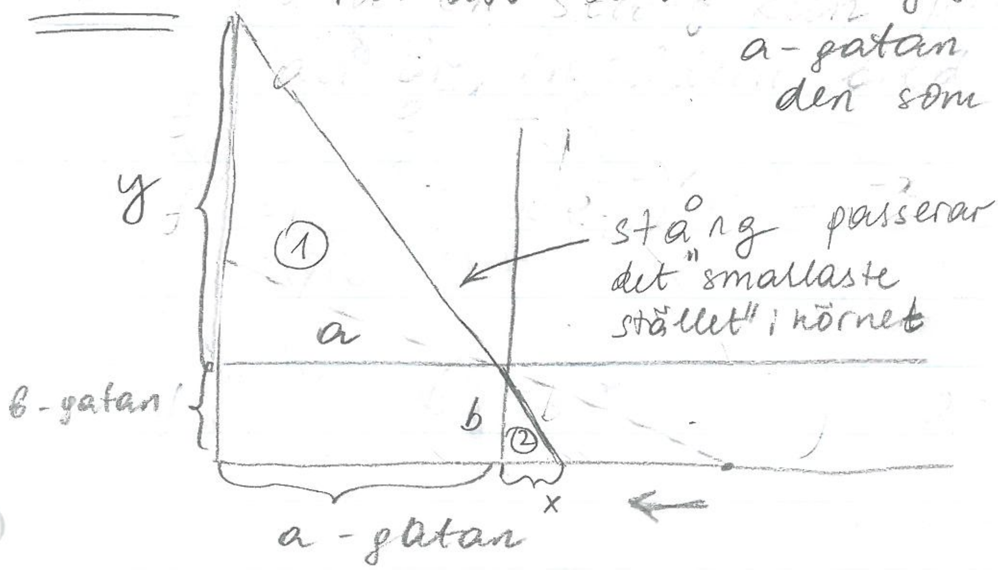
$\boxed{P4}$ **35** Observera att då $x \neq 0$

$$f(x) = x^2\underbrace{\sin\tfrac{1}{x}}_{\geq -1} + 2x^2 \geq -x^2 + 2x^2 = x^2 > 0$$

d vs $f(x) > f(0)$ för alla $x \neq 0 \Rightarrow$
0 är en lokal minimipunkt.

37

För att föra en stång från b-gatan till a-gatan placerar vi den som på bilden (- - - -), och sedan för den tills att $x = 0$. För att kunna föras till a-gatan måste stången kunna passera det "smallaste stället" i hörnet.



Vi inför x och y – se bild. I så fall är trianglar 1 och 2 likformiga $\Rightarrow$

$$\frac{y}{b} = \frac{a}{x} \Rightarrow y = \frac{ab}{x}$$

Stångens längd d kan då skrivas som en funktion av x:

$$d(x) = \sqrt{b^2 + x^2} + \sqrt{y^2 + a^2} =$$

$$= \sqrt{b^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2 b^2}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{b^2 + x^2} + a\sqrt{1 + \frac{b^2}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{b^2 + x^2}\left(1 + \frac{a}{x}\right).$$

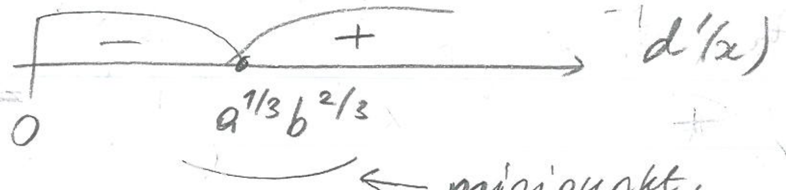
Vi söker en minimipunkt för d då d representerar det smallaste stället i hörnet.

$$d'(x) = \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}}\left(1 + \frac{a}{x}\right) + \left(-\frac{a}{x^2}\right)\sqrt{b^2 + x^2} =$$

$$= \frac{(b^2 + x^2)(-a) + (x + a)x^2}{x^2\sqrt{b^2 + x^2}} = \frac{x^3 - ab^2}{x^2\sqrt{b^2 + x^2}}.$$

$x = a^{1/3} b^{2/3}$ – är täljarens enda nollställe

och



← minipunkt.

$$d(a^{1/3} b^{2/3}) = \sqrt{b^2 + a^{2/3} b^{4/3}} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2 b^2}{a^{2/3} b^{4/3}}} =$$

$$= \sqrt{b^2 + a^{2/3} b^{4/3}} + \sqrt{a^2 + a^{4/3} b^{2/3}} =$$

$$= b^{2/3}\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}} + a^{2/3}\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}} =$$

$$= (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}.$$

$\boxed{B4}$ <u>44</u> $f(x) = \begin{cases} x^4 \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4 \cos\frac{1}{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^3 \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{begr.}} = 0$$

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3 \cos\frac{1}{x} + x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 4x^2 \cos\frac{1}{x} + x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

I $x \neq 0$ gäller

$$f'(x) = 4x^3 \cos\frac{1}{x} + x^4\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4x^3 \cos\frac{1}{x} + x^2 \sin\frac{1}{x}$$

$$f''(x) = 12x^2 \cos\frac{1}{x} + 4x^3 \cancel{\ } \cdot\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 12x^2 \cos\frac{1}{x} + 4x \cancel{\ } \sin\frac{1}{x} + 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

$$= \cos\frac{1}{x}(12x^2 - 1) + 6x \ldots$$