Lektion 15

P5 **10**

a) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$

b) $\dfrac{2x+3}{(x+4)^2} = \dfrac{A}{x+4} + \dfrac{B}{(x+4)^2}$

c) $\dfrac{3}{(x+4)^2}$ är redan partialbråksuppdelad

d) $\dfrac{x^2-2x+1}{(x+2)^3(x-3)^2} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{(x+2)^2} + \dfrac{C}{(x+2)^3} +$
$+ \dfrac{D}{x-3} + \dfrac{E}{(x-3)^2}$

e) $\dfrac{2x-4}{(x^2+x+5)^2(x-4)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+x+5} + \dfrac{Cx+D}{(x^2+x+5)^2} + \dfrac{E}{x-4}$

11

Vi partialbråkuppdelar $\dfrac{x+2}{x^3-1}$.
Observera att $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) \Rightarrow$

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx-Bx-C}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(A+C-B)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Vi jämför koefficienter i HL och VL:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+C-B=1 \\ A-C=2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} B &= -A \\ C &= A-2 \\ A+A-2+A &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} B &= -1 \\ C &= -1 \\ \cancel{3}A &= \cancel{3}1 \end{aligned}$$

Det betyder att

$$\frac{x+2}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

<u>12</u> Täljaren i bråket $\frac{x^2-x-3}{(x-1)(x+2)}$ har inte lägre grad än nämnaren.

Vi måste utföra polynomdivisionen först.

Notera att $(x-1)(x+2) = x^2+x-2$.

$$\begin{array}{rl} 1 & \\ \hline x^2-x-3 & \big| \; x^2+x-2 \\ -\;(x^2+x-2) & \\ \hline -2x-1 & \end{array}$$

så $\frac{x^2-x-3}{(x-1)(x+2)} =$

$$= 1 - \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$$

Det som ska partialbråksuppdelas är

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$

<u>Handpåläggning</u>:

1) multiplicerar med $x-1$ båda led $\Rightarrow$

$$\frac{2x+1}{x+2} = A + \frac{B(x-1)}{x+2} \quad \text{och låter } x \to 1:$$

$$\frac{3}{3} = A \Rightarrow A = 1$$

2) multiplicerar med $(x+2)$ båda led $\Rightarrow$

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{A(x+2)}{x-1} + B$$ Och låter $x \to -2$!

$$\frac{-3}{-3} = B \Rightarrow B = 1$$

Vi har

$$\frac{x^2-x-3}{(x-1)(x+2)} = 1 - \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}.$$

Antagligen har Linnus glömt att utföra polynomdivisionen och på så sätt har tappat bort 1.

<u>13</u>

a) grad $(x^4) >$ grad $(x^2+1) \Rightarrow$ utför polynomdivisionen först:

$$\begin{array}{rl} x^2-1 & \\ \hline x^4 & \big| \; x^2+1 \\ -\;\; x^4+x^2 & \\ \hline -x^2 & \\ -\;\; -x^2-1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}, \text{ så}$$

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C.$$

b) grad $(1-x^2) =$ grad $(4+x^2) \Rightarrow$ polynomdivisionen måste utföras!

$$
\begin{array}{l}
\quad -1 \\
\overline{-x^2+1 \;\big|\; x^2+4} \\
-\;(-x^2-4) \\
\hline
\qquad 5
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad \frac{1-x^2}{4+x^2} = -1 + \frac{5}{x^2+4}
$$

$$\int \frac{1-x^2}{4+x^2}\,dx = \int\left(-1+\frac{5}{x^2+4}\right)dx = -x+5\underbrace{\int\frac{dx}{x^2+4}}_{=I} = \otimes$$

$$I = \int \frac{dx}{4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)} = \frac{1}{4}\int \underbrace{\frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}_{\text{ser ut som } \arctan\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l}\left(\arctan\frac{x}{2}\right)' = \\ = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}\,dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\int\left(\arctan\frac{x}{2}\right)'dx =$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\text{ , så}$$

$$\otimes = -x + \frac{5}{2}\arctan\frac{x}{2} + C\,,$$

c)
$$
\begin{array}{l}
\quad x^2+2x-4 \\
\overline{x^3+5x^2+2x-1 \;\big|\; x+3} \\
-\;(x^3+3x^2) \\
\hline
\quad 2x^2+2x-1 \\
-\;(2x^2+6x) \\
\hline
\qquad -4x-1 \\
\quad -\;(-4x-12) \\
\hline
\qquad\quad 11
\end{array}
$$

$$\int\frac{x^3+5x^2+2x-1}{x+3}\,dx = \int\left(x^2+2x-4+\frac{11}{x+3}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + 11\ln|x+3| + C$$

d) Observera att $x^2+4x+13$ saknar reela rötter => kan ej faktoriseras.
Bråket är redan partialbråkuppdelat så långt så möjligt. Vi gör kvadratkomplettering i nämnaren och sedan ett variabelbyte:

$$\int \frac{2x-3}{x^2+4x+\underbrace{13}_{=4+9}}\,dx = \int \frac{2x-3}{(x+2)^2+9}\,dx = \left[\begin{array}{l} x+2=y \\ x=y-2 \\ dx=(y-2)'dy=dy \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{2(y-2)-3}{y^2+3^2}\,dy = \int \frac{2y-7}{y^2+3^2}\,dy =$$

$$= \underbrace{\int \frac{2y}{y^2+3^2}\,dy}_{I_1} - 7\underbrace{\int \frac{dy}{y^2+3^2}}_{I_2} = \otimes$$

$$I_1 = \left[\begin{array}{l} y^2+3^2=t \\ dt=(y^2+3^2)'dy=2y\,dy \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C_1 = \underline{\ln(y^2+3^2)+C_1}$$

$I_2 = \frac{1}{3}\arctan\frac{y}{3}+C_2$ (se b) för en liknande integral)

$$\otimes = \ln(y^2+3^2) - \frac{7}{3}\arctan\frac{y}{3} + C =$$

$$= \ln\left((x+2)^2+9\right) - \frac{7}{3}\arctan\frac{x+2}{3} + C =$$

$$= \underline{\ln(x^2+4x+13) - \frac{7}{3}\arctan\frac{x+2}{3} + C}.$$

e) Partialbråkuppdelar: $\quad / x^2 - 1 = (x-1)(x+1) /$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$, handpåläggning:

1) $$\frac{1}{x+1} = A + \frac{B(x-1)}{x+1} \quad \text{när } x \to 1$$

$$\frac{1}{2} = A$$

2) $$\frac{1}{x-1} = \frac{A(x+1)}{x-1} + B \quad \text{när } x \to -1$$

$$-\frac{1}{2} = B.$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

f) Polynomdivision:

$$\begin{array}{rl}
 x + 1 & \\
\hline
x^3 & \big| \, x^2 - x - 2 \\
-\,(x^3 - x^2 - 2x) & \\
\hline
x^2 + 2x & \\
-\,(x^2 - x - 2) & \\
\hline
3x + 2 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{x^2-x-2} =$$

$$= x + 1 + \frac{3x+2}{x^2-x-2}$$

Observera att $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \Rightarrow$
vi måste partialbråkuppdela

$$\frac{3x+2}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Genom att använda handpåläggning

vi ser att $\quad A = \frac{3\cdot(-1)+2}{-3} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

$$B = \frac{3\cdot 2+2}{2+1} = \frac{8}{3}.$$

Slutligen

$$\int \frac{x^3}{x^2-x-2}\,dx = \int\left(x+1+\frac{3x+2}{x^2-x-2}\right)dx =$$

$$= \int(x+1)\,dx + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{8}{3}\int\frac{dx}{x-2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{8}{3}\ln|x-2| + C.$$

<u>14</u> En primitiv funktion

$$f(x) = \int\Big[\frac{1}{1+x} + \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{=\frac{-1}{x-1}} + \frac{1}{1+x^2}\Big]dx =$$

$$= \ln|1+x| - \ln|x-1| + \arctan x + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \arctan x + C.$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ger

$$0 = \lim_{x\to\infty}\Big(\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \overbrace{\arctan x}^{\to\frac{\pi}{2}} + C\Big) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\Big(\overbrace{\ln\underbrace{\left|\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right|}_{\to 1}}^{\to 0} + \underbrace{\arctan x}_{\to\frac{\pi}{2}} + C\Big)$$

$$= C + \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = -\frac{\pi}{2}.$$

$D_f = \{x \neq 1\}$

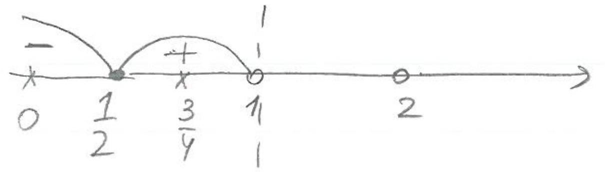
Om vi vill att f ska bli kontinuerlig och deriverbar, så kan vi bara betrakta f då $x > 1$ så att $f = \ln\frac{x+1}{x-1} + \arctan x - \frac{\pi}{2}$

<u>Svar:</u> $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \arctan x - \frac{\pi}{2}.$

Extra

$\boxed{P5}$ 34

Vi ser att $f'(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)}$



så $f \downarrow$ då $x < \frac{1}{2}$

och $f \uparrow$ då $\frac{1}{2} \le x < 1$

$x = \frac{1}{2}$ är minimi-punkt $\Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 5$

Beräknar $f(x) = \int \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\, dx$.

$\dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2}$, och handpåläggning ger

$\dfrac{2\cdot 1-1}{-1} = A \Rightarrow A = -1$.

$\dfrac{4-1}{1} = B \Rightarrow B = 3$.

$f(x) = -\int \dfrac{dx}{x-1} + 3\int \dfrac{dx}{x-2} = -\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$

När $x < 1$: $x-1 < 0 \Rightarrow |x-1| = -x+1$

$x-2 < 0 \Rightarrow |x-2| = -x+2$ $\Rightarrow$

$f(x) = -\ln(1-x) + 3\ln(2-x) + C$.

Använder $f(\frac{1}{2}) = 5$:

$5 = -\ln\frac{1}{2} + 3\ln\frac{3}{2} + C \Rightarrow C = 5 + \ln\frac{1}{2} - 3\ln\frac{3}{2}$

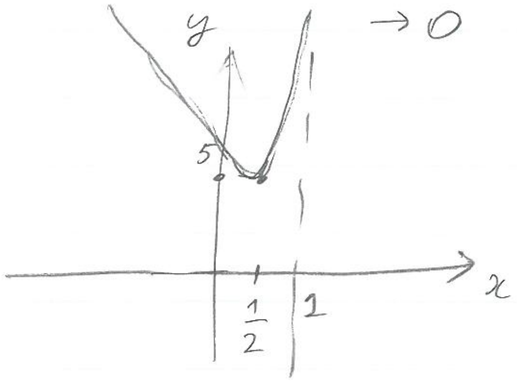
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\underbrace{\ln|x-1|}_{\to 0} + 3\ln 1 + C = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\ln(2-x) - \ln(1-x) + 2\ln(2-x) +$

$+ C) = \boxed{8}$

$$\overset{y=-x}{=} \lim_{y\to\infty}\left(\ln\frac{2+y}{1+y} + 2\ln(2+y) + C\right) =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(\underbrace{\ln\frac{1+\frac{2}{y}}{1+\frac{1}{y}}}_{\to 0} + \underbrace{2\ln(2+y)}_{\to\infty} + C\right) = \infty$$



Det är nu klart att ekvationen $f(x) = 9$ har exakt två reela rötter.