Lektion 2 (lösningar)

$\boxed{P3}$

2a

a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+x^2} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1\cdot \cancel{x}}{(x^2+x)\cdot\cancel{x}} = \underline{0}.$$

3

a) $$\lim_{x\to 7} \frac{-x^2+x+6}{2x^2-5x-3} = \frac{-49+7+6}{2\cdot 49-5\cdot 7-3} = \frac{-36}{60} = \underline{-0{,}6}$$

b) $$\lim_{x\to 3} \frac{-x^2+x+6}{2x^2-5x-3} = \left[\frac{-9+3+6}{18-15-3} = \frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-(x+2)\cancel{(x-3)}}{2(x+\frac{1}{2})\cancel{(x-3)}} = \frac{-5}{2(3+\frac{1}{2})} = \underline{\frac{-5}{7}}$$

c) $$\lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+x+6}{2x^2-5x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}(-1+\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2})}{\cancel{x^2}(2-\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2})} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

$\boxed{B3}$

11

a) $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = [\infty-\infty] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot 1}{x\left(1+\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \ldots = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{-\sqrt{x^2}}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\underbrace{1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}_{\to 0}}$

OBS! $x<0$
$\Rightarrow x=-\sqrt{x^2}$

$= \infty$.

12

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+x^3)}{\ln(x^2+x^4)} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\ln\left(x^4\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\ln x+\overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}^{\to 0}}{4\ln x+\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{\ln x}\left(3+\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\cancel{\ln x}\left(4+\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)} = \dfrac{3}{4}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+x^3)}{\ln(x^2+x^4)} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x\cdot(1+x^2)}{\ln x^2(1+x^2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x+\ln(1+x^2)}{2\ln x+\ln(1+x^2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{\ln x}\left(1+\frac{\ln(1+x^2)}{\ln x}\right)}{\cancel{\ln x}\left(2+\frac{\ln(1+x^2)}{\ln x}\right)} = \dfrac{1}{2}$

Högergränsvärdet

14 a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+3x^2}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1+3x^2}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(3+\frac{1}{x^2}\right) = \underset{\sim}{= \infty}$

Vänstergränsvärdet är samma.

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x^2-2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+x}{x(x-2)} =$

$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to +\infty} = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x^2-2x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to -\infty} = +\infty.$

15 För att $\lim_{x\to 1} f(x)$ ska existera måste

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$ vara uppfylld.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \arctan \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to +\infty} = \underset{\sim}{\frac{\pi}{2}}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{a(x^3-1)}{x^2-1} =$

$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{a\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} =$

$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{a\cdot 3}{2} = \frac{3a}{2}.$

Från $\frac{3a}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{\pi}{3}}$.

Extra!

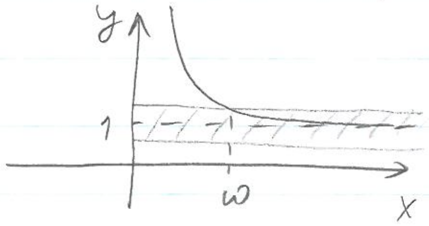
$\boxed{P3}$

5 a, b

a) Vad menas med att $f(x) \to 1$ då $x \to \infty$?

Se def 3.3[a] i kursboken!

$f(x) \to 1$ då $x \to \infty$ betyder att för varje givet tal $\varepsilon > 0$ finns det något tal ω s.a. för varje $x \in D_f$ med $x > \omega$ gäller $|f(x) - 1| < \varepsilon$



för varje "litet" band kring $y = 1$ existerar ω s.a. för alla $x > \omega$ ligger grafen i bandet.

b) Bestäm ω s.a. $\left|\frac{x}{x-1} - 1\right| < \frac{1}{10}$ då $x > \omega$.

$$\left|\frac{x}{x-1} - 1\right| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{\cancel{x} - \cancel{x} + 1}{x-1}\right| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10 < |x-1|, \text{ där}$$

$$|x-1| := \begin{cases} x-1 & \text{då } x-1 \geq 0 \\ -x+1 & \text{då } x-1 < 0 \end{cases} \quad \text{dvs}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{då } x < 1 \end{cases}$$

Olikheten blir $\begin{cases} 10 < x-1 & \text{då } x \geq 1 \\ 10 < -x+1 & \text{då } x \quad 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 11 & \text{då } x \geq 1 \\ x < -9 & \text{då } x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x > 11 \text{ och } x < -9$$

Vi ser att $\omega = 11$ passar, d vs

$\left| \frac{x}{x-1} - 1 \right| < \frac{1}{10}$ då $x > 11$. ▶

$\boxed{B3}$ **5** Visa m h a definitionen att $x^3 \to 1$ då $x \to 1$.
(jmf exempel 3.7 i B)

◀ Definition 3.2 ska användas, d vs vi måste visa att för varje $\varepsilon > 0$ finns det $\delta > 0$ så a $|x^3 - 1| < \varepsilon$ gäller för alla x med $|x - 1| < \delta$.

Vi noterar att $|x^3 - 1| = |(x-1)(x^2 + x + 1)| =$

$$= |x-1| \, |x^2 + x + 1|.$$

Om vi kräver att $|x-1| < 1$ d vs $0 < x < 2$ så gäller det att $|\underbrace{x^2 + x + 1}_{>0}| < 7$.

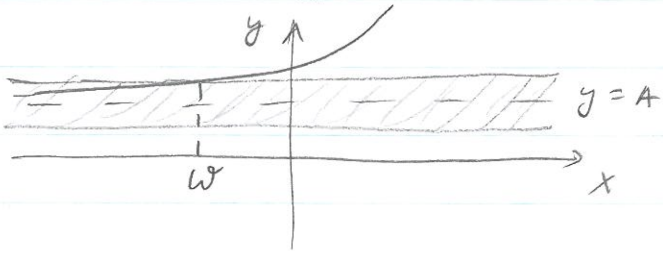
Om vi dessutom kräver att $|x-1| < \delta$ så gäller det att

$|x^3 - 1| < 7\delta$. Detta är $< \varepsilon$ om $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$.

Låt $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$. I så fall om $|x-1| < \delta \Rightarrow |x-1| < 1$ och $|x-1| < \frac{\varepsilon}{7}$, men vi har sett att om $|x-1| < 1$ och $|x-1| < \frac{\varepsilon}{7}$ så $|x^3 - 1| < \varepsilon$. Alltså för varje $\varepsilon > 0$ kan vi ta $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$ så att $|x^3 - 1| < \varepsilon$ för varje $|x-1| < \delta$ ▶

6 Definiera vad som menas med att $f(x) \to A$ då $x \to -\infty$.

$f(x) \to A$ då $x \to -\infty$ betyder att funktionens graf närmar sig den räta linjen $y = A$ då $x \to -\infty$.



För varje litet band $y = A$ finns det ett tal ω s.a. grafen ligger i bandet för alla $x < \omega$.

Def (jmf 3.3 (a)) Vi säger att $f(x) \to A$ då $x \to -\infty$ om för varje givet $\varepsilon > 0$ finns något tal ω sa $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x \in D_f$ med $x < \omega$