Lektion 3 (lösningar)

$\boxed{B3}$

17b För att f ska vara kontinuerlig i $x=2$, måste $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 3.$$

$\Rightarrow$ f är kontinuerlig.

18 För att f ska bli kontinuerlig vi sätter

$$\underset{f(1)}{\overset{}{a}} = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2+x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2(x-1)+(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+1)} = 0.$$

Svar: $\underline{\underline{a=0}}$

19 a) $$a = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}}^{=\infty}} =$$

$$= \frac{1}{\underbrace{e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}}}_{=\infty}} = \underline{\underline{0}}$$

b) $$a = \lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\cancel{x^2}+2x+\cancel{2})-(\cancel{x^2}-2x+\cancel{2})}{x\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}\right)}$$

$$= \lim \frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

20 Ja: sätt $\lim_{x \to \pi n} g(x) =: g(\pi n)$, då

$$\lim_{x \to \pi n} g(x) = \lim_{x \to \pi n} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \to \pi n} 2\cos x =$$

$$= 2\cos \pi n = 2(-1)^n.$$

$$g(\pi n) = 2(-1)^n.$$

17a Vi undersöker först om f har ett gränsvärde i $x = 2$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 2^+} f(x) &= \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (x^2+1) = 5 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2} (x+1) = 3 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 2} f(x) \text{ saknas.}$$

f kan inte vara kontinuerlig.

$\boxed{P3}$

8 a) $\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}} = \dfrac{1}{e^{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}}} = 0$ $\quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

b) $\lim_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \left[e^{+\infty}\right] = +\infty$

c) $\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x}}$ saknas.

9 $\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{\ln x^2}} = \lim_{x \to \infty} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{2\ln x}} =$

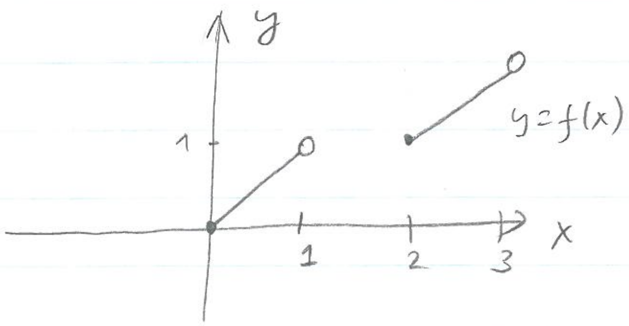
$= \lim_{x \to \infty} \sqrt{e} = \sqrt{e}.$

18 $\lim_{x\to 0} \underbrace{\sin x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{begr.}} = 0 \Rightarrow$

Vi kan sätta $f(0)=0 \Rightarrow f$ blir kontinuerlig.

$\boxed{\text{Extra}}$

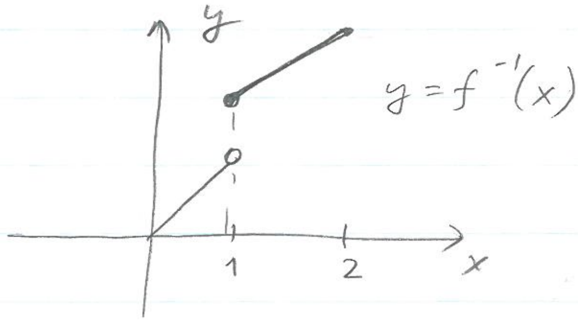
$\boxed{\text{B3}}$ **27** $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$



f är kontinuerlig i sin definitionsmängd.

$\begin{cases} y = x & 0 \le x < 1 \\ y = x-1 & 2 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y & 0 \le y < 1 \\ x = y+1 & 2 \le y+1 \le 3 \Leftrightarrow 1 \le y \le 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x & 0 \le x < 1 \\ y = x+1 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$



f^{-1} är inte kontinuerlig.

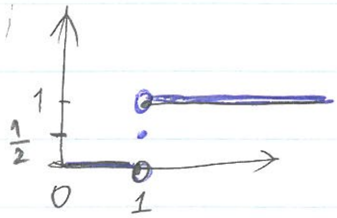
Det är ingen motsägelse med sats 3.6 eftersom fs definitionsmängd är inte ett intervall.

$\boxed{\text{P3}}$ **10** (a) f är kont. i $x = 1 \Leftrightarrow$
$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

(b) f är en kontinuerlig funktion $\Leftrightarrow$ den är kontinuerlig i varje $x \in D_f$

(c) Är $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ kont. för $x \geq 0$?

◄ $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{för } x = 1 \\ 1 & \text{för } x > 1 \end{cases}$ $\quad \frac{1}{1+\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)^n}_{\to 0}}$



Nej! ►

(d) Är $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x + x^2 + \ldots + x^n}{1 + x + \ldots + x^n}$ kont. för $x \geq 0$?

◄ $\frac{x + x^2 + \ldots + x^n}{1 + x + \ldots + x^n} = 1 - \frac{1}{1 + x + \ldots + x^n}$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{(1-x)}{1 - \underbrace{x^{n+1}}_{\to 0}}\right) = \underset{\sim}{x}$

$x = 1 \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \underline{1}$

$x > 1 \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{(x-1)}{x^{n+1} - 1}\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1} - x}{x^{n+1} - 1} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{-n}}{1 - x^{-n-1}} = \underline{1}$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = f(x) \Rightarrow f$ - kont. ►