Lektion 4 (lösningar)

sluten begr. int.

$\boxed{B3}$

3.21 a) $f(x) = \dfrac{x^5 - x^2 + 7}{x^2+1}$ är kont. på $[-5,5]$

$\Rightarrow$ antar sitt största och minsta värdet där. $\boxed{\text{Ja}}$

Sats 3.8

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x + 7} - \sqrt{x^2+x}$ är kont.

men $x \geq 4$ är inte ett begränsat interval.

$\boxed{\text{Nej}}$

c) Ingen interval givet, $\boxed{\text{Nej}}$

d) $D_f = [0, \pi] \not\ni \{7; -1\} \Rightarrow f$ är uppenbarligen kont. overallt förutom $x = \frac{\pi}{2}$. Kontrolerar denna punkt:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \frac{x \sin 3x}{x - 7} =$$

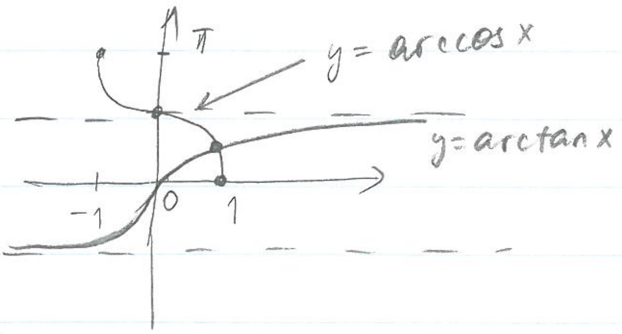
$$= \frac{\frac{\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - 7} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - 7}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \frac{x \cos 5x}{x + 1} = 0$$

f är inte kontinuerlig. $\boxed{\text{Nej}}$

22 (Sats 3.9) $f(x) = x^3 + x + 1$ är kontinuerlig i interv. $[-1, 0]$ och $f(0) = 1$, $f(-1) = -1$
$\Rightarrow$ det finns ett punkt $x_0 \in [-1, 0)$
så $f(x_0) = 0$, då $0 \in [-1, 1]$.

23



(följdsats)

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2} >$
$\arctan 0 = 0$
medan $\arctan 1 >$
$> 0 = \arccos 1$

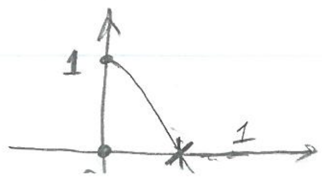
$\Rightarrow$ det finns en punkt där graferna skär varandra (både arccosx och arctan x är kontinuerliga och intervallet $[0;1]$ är sluten och begränsat)

Alternativt kan man betrakta
$\arccos x - \arctan x = f(x)$ så att

$f(0) = 1$, $f(1) < 0$, och tillämpa sats 3.9

Observera att $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} < 0$

Så $f(x)$ är strängt avtagande $\Rightarrow$ det kan finnas endast en rot.



3.24 $f(x) = \frac{1}{x}$ är inte kontinuerlig i 0 $\Rightarrow$ nej.

3.25 Låt $f(x) = e^{2\sin x} - 5\cos x$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

$f(x)$ är kontinuerlig.

$f(0) = 1 - 5 = -4$, $f(\frac{\pi}{2}) = e^2$

$\Rightarrow$ det finns en punkt $x_0 \in (0; \frac{\pi}{2})$ så $f(x_0) = 0$.

$$f'(x) = \underbrace{2\cos x}_{>0} \underbrace{e^{2\sin x}}_{>0} + 5 \underbrace{\sin x}_{>0} > 0$$

då $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

Så f är strängt växande $\Rightarrow$ ekvationen $f(x) = 0$ kan ha högst en lösning.

3.26 Betrakta ett reelt polynom av udda grad: $p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_0$

Vi antar att $a_{2n+1} > 0$ ($a_{2n+1} < 0$ betraktas likadant).

Eftersom $a_{2n+1}x^{2n+1}$ är den dominanta termen då $x \to \pm\infty$ så den kommer att avgöra tecken på $p(x)$ då x är tillräckligt stor. Det betyder att vi kan hitta ett stort tal A så $p(A) > 0$ och $p(-A) < 0$ då $a_{2n+1}A^{2n+1} > 0$ och $a_{2n+1}(-A)^{2n+1} < 0$.

det betyder att $p(x)$ har en rot i intervalet $[-A ; A]$.

<u>3.51</u> Det vore rimligt att sätta

$$b = \lim_{x \to 1} \frac{6x^2 - 5ax + a^2}{x-1}.$$

Men om $x = 1$ är inte en rot till $5x^2 - 5ax + a^2$ så får vi

$$b = \lim_{x \to 1} \frac{\overbrace{6 - 5a + a^2}^{\neq 0}}{x - 1} = \infty \text{ ?!}$$ det blir ingen kontinuitet.

Det betydet att för att f ska bli kontinuerlig så måste $x = 1$ vara en rot till $6x^2 - 5ax + a^2 = 0$ d vs $6 - 5a + a^2 = 0$.
Detta betyder att $a = 2$ eller $a = 3$.

Ta $\boxed{a = 2}$: $b = \lim_{x \to 1} \frac{6x^2 - 10x + 4}{x - 1} =$

$3x^2 - 5x + 2$

$x = \frac{4}{3}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{6\cancel{(x-1)}(x - \frac{2}{3})}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} (6x - 4) = \boxed{+2}$$

$\underline{a = 2, \quad b = +2}$

Ta $\boxed{a = 3}$: $b = \lim_{x \to 1} \frac{6x^2 - 15x + 9}{x - 1} =$

$2x^2 - 5x + 3$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{6\cancel{(x-1)}(x - \frac{3}{2})}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} (6x - 9) = \boxed{-3}.$$

<u>Svar</u>: $a = 2, \; b = +2$
eller $a = 3, \; b = -3$.

P3 11a

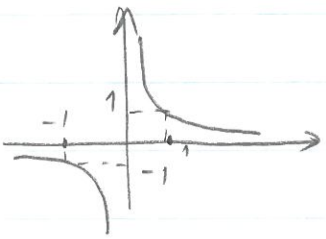
Satsen om mellanliggande värde

Antag att f är kontinuerlig på den slutna och begränsade intervallet $[a, b]$ och att $f(a) \neq f(b)$. Då för varje C som ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$ finns det $x_0 \in [a, b]$ s a $f(x_0) = C$.

11b

Vilkoren kontinuitet / sluten intervall kan ej mildras:

T ex $f(x) = \frac{1}{x}$ är inte kontinuerlig på $[-1, 1]$, och samtidigt finns det

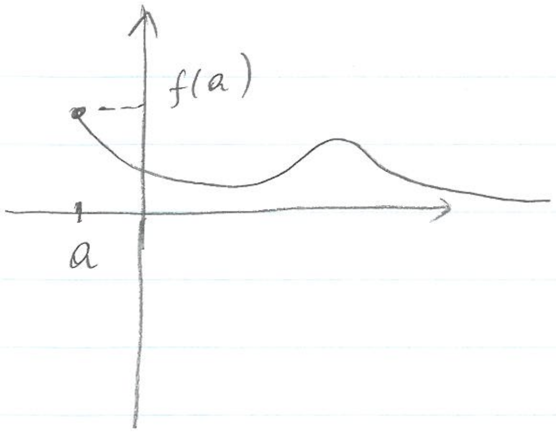


ingen x s a $f(x) = 0$, trots att $f(1) = 1$ och $f(-1) = -1$.

Betrakta nu $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0; 1) \\ 2 & x = 2 \end{cases}$

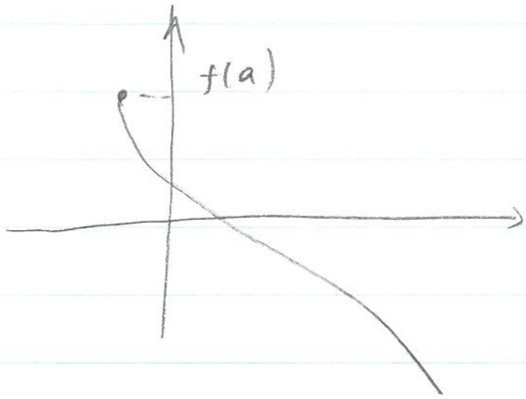
vilken är kontinuerlig i $[0; 1)$ men inte i $[0; 1]$ (d v s intervallet är inte sluten). $f(0) = 0$, $f(2) = 2$, men det finns ingen x_0 s a $f(x_0) = 1,5$.

Vi kunde tillåta ett obegränsat interval. T.ex låt f vara i kont. i $[a, +\infty)$ och $f(a) \neq \lim_{x \to +\infty} f(x)$ då för varje C mellan $f(a)$ och $\lim f(x)$ finns det x_0 s a $f(x_0) = C$



$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Varje värde mellan 0 och f(a) antas.



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Varje värde i intervallet $(-\infty; f(a))$ antas.

12 Invers funktion till $f(x) = x\ln x$ ($x \geq 1$) finns:

$x\ln x$ är kontinuerlig på $[1, +\infty)$ och strängt växande där $\Rightarrow f^{-1}$ existerar och kontinuerlig på intervallet $[f(x) : x \in [1; +\infty)) = [0; +\infty)$ (sats 3.5)

$x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$

~~Antag att $f(x) \to \infty \Rightarrow x \to \infty$~~

~~Det betyder att då $x \to \infty$ så $f^{-1}(x) \to \infty$~~

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)\ln x}{x} = \begin{bmatrix} x = f(y) \\ x \to \infty \Rightarrow f(y) \to \infty \Rightarrow y \to \infty \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{\cancel{y}\ln(y\ln y)}{\cancel{y}\ln y} = \lim_{y\to\infty} \frac{\ln y + \ln(\ln y)}{\ln y}$$

$$= 1 + \frac{\ln(\ln y)}{\ln y}$$

$\downarrow$

0

$\ln_x \ln x$