Lektion 8

$\boxed{B4}$

10 a) $\left((2x^2+3x)^{10}\right)' = 10(2x^2+3x)^9 \cdot (4x+3)$

b) $\left(\ln(1+\cos^2 x)\right)' = \dfrac{-2\sin x \cos x}{1+\cos^2 x}$

$=$

c) $(x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(\ln x + 1)$

$\boxed{P4}$

7 Låt oljefläckans radie vara r, då är arean $A(r) = \pi r^2$

Vi vet att $r'(t) = 5 \; m/h$,
och vi vill beräkna $A'(t)$,
där $A(t) = A(r(t)) = \pi(r(t))^2$

$A'(t) = \pi \cdot 2r(t) \cdot \underbrace{r'(t)}_{5} = 10\pi r(t)$

När radien är 200 m, så

$A'(t) = 10\pi \cdot 200 = 2000\pi.$

8 Högerderivatan:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(2)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(2+|x|)e^x - 2}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2e^x + xe^x - 2}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{2(e^x-1)}{x} + e^x\right) =$$

$$= 2+1 = \underline{\underline{3}}$$

Vänsterderivatan:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(2-x)e^x - 2}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\frac{2(e^x-1)}{x} - e^x\right) = 2-1 = \underline{\underline{1}}$$

Båda existerar men inte lika.
Detta innebär att $f'(0)$ inte är definierad.

9 f är deriverbar om högerderivatan är lika med vänsterderivatan.

a) Högerderivatan:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(1+h)-1-1}{h} =$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

Vänsterderivatan:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{2h+h^2}{h} = \underline{\underline{2}} \Rightarrow f \text{ är deriverbar.} \quad \boxed{2}$$

(Eller: $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(1+h)-1}{h} = \infty$
$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-1}{h} = 0$) $\Rightarrow$ ej deriverbar

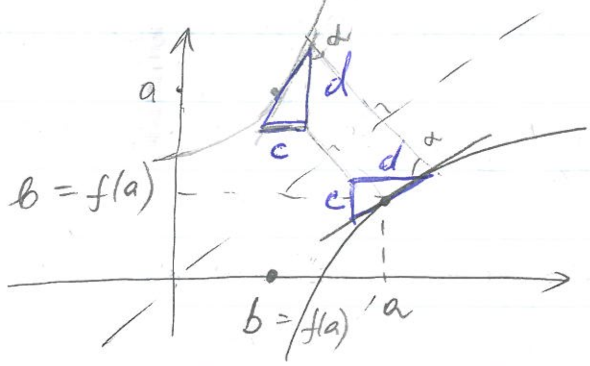
b) Det är klart att f inte är kontinuerlig i 1, så den är inte heller deriverbar.

11

Antag att f är en omvändbar funktion, som är deriverbar i punkt a och har derivatan $f'(a) \neq 0$. I så fall är den inversa funktionen f^{-1} deriverbar i den motsvarande punkten $b = f(a)$ och har derivatan

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

förutsatt att f^{-1} är kontinuerlig i b.



$$f'(a) = \frac{c}{d}$$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{d}{c} = \frac{1}{f'(a)}$$

12

$f(x) = 1 + e^{2x}$ är kontinuerlig och strängt växande $\Rightarrow$ har kontinuerlig invers. Inversen är $1 + e^{2x} = y \Rightarrow$ $x = \frac{1}{2}\ln(y-1)$. $\quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(x-1)$

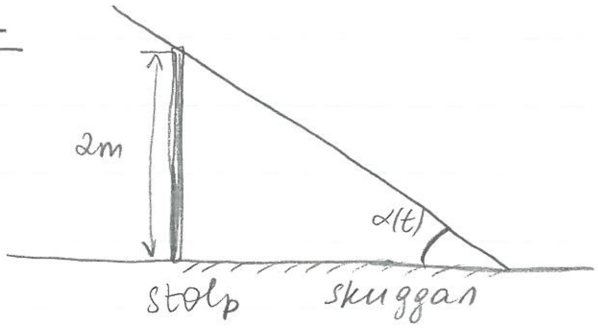
a) $(Df^{-1})(2) = \left.\frac{1/2}{x-1}\right|_{x=2} = \frac{1}{2}$

b) $2 = f(0) \Rightarrow$

$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \left.\frac{1}{2e^{2x}}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$

3

13



Låt $\alpha(t)$ vara solens vinkel vid t-tiden, så $\alpha(0) = 27°$, och $\alpha'(t) = -7°$ i timmen. (eftersom $\alpha(t)$ ↓)

Skuggans längd vid t-tiden är $x(t)$ där

$$\frac{2}{x(t)} = \tan \alpha(t) \Rightarrow \quad x(t) = 2\cot\alpha(t) \text{ meter}$$

Hastigheten av skuggans tillväxt:

$$x'(t) = -\frac{2}{\sin^2 \alpha(t)} \cdot \alpha'(t)$$

$$x'(0) = -\frac{2}{\sin^2 \alpha(0)} \cdot \alpha'(0) = +\frac{2}{\sin^2 27°} \cdot 7° \cdot \left(\frac{m}{tim}\right) =$$

$$= + \frac{\cancel{2}}{\sin^2 27°} \cdot 7 \cdot \frac{\pi}{\underbrace{18\cancel{0}}_{1°}} \cdot \frac{10\cancel{0}\, sm}{\underbrace{\cancel{6}\cancel{0}}_{3}\, min} =$$

$$= \frac{7\pi}{54 \sin^2 27} \left(\frac{sm}{min}\right).$$

Extra

$\boxed{P4}$ 10 Det är nödvändigt att f är kontinuerlig $\Rightarrow$

$$A \cdot e^0 + B \cdot 0 + 0 = \sqrt{0+1} \Rightarrow$$

$$A = 1$$

sedan måste vänsterderivatan vara lika med högerderivatan.

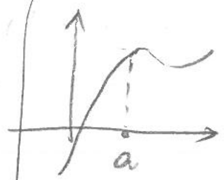
$$\left(Ae^x + Bx + x^2\right)'\Big|_{x=0} = \left(\overset{=1}{Ae^x} + B + 2x\right)\Big|_{x=0} =$$

$$= 1 + B$$

$$\left(\sqrt{x+1}\right)'\Big|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Svar! $A = 1$
$B = -\frac{1}{2}$.



$f(x) = \begin{cases} h(x) & x \geq a \\ g(x) & x \leq a \end{cases}$

$h(a) = g(a) \Rightarrow$

$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a^+} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = h'(a)$

och

$f'_-(a) = g'(a)$

14 Låt $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

se s.6

OBS! f är faktiskt kont. i $x=0$: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2\ln|x| = 0 = f(0)$!

f är deriverbar då $x \neq 0$!

$f'(x) = 2x\ln|x| + x$ – deriverbar då $x \neq 0$,

så att $f''(x) = 2\ln|x| + 2 + x$ – då $x \neq 0$.

Vi vet att $f'(x) = 2x\ln|x| + x$ då $x \neq 0$.

Beräknar $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\ln|x| + x - 0}{x - 0}$

$= \lim_{x\to 0} (2\ln|x| + 1) = -\infty$,

Medan $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}(2x\ln|x| + x) = 0 \neq f'(0) = -\infty$

Det betyder att $f'(x)$ inte är kontinuerlig i $x=0 \Rightarrow$ den är inte heller deriverbar $\Rightarrow f''(0)$ existerar ej.

$\boxed{B4}$ **15** y som funktion av x satisfierar

$$(y(x))^3 + (x^2+1)\,y(x) = x$$

Deriverar m a p x:

$$3(y(x))^2 \cdot y'(x) + 2x \cdot y(x) + (x^2+1)y'(x) = 1$$

$$y'(x)\left(3(y(x))^2 + x^2 + 1\right) = 1 - 2x \cdot y(x)$$

$$y'(x) = \frac{1-2x\,y(x)}{3(y(x))^2 + x^2 + 1}$$

$$\boxed{y' = \frac{1-2xy}{3y^2+x^2+1}}\ .$$

$\boxed{B4}$ **14** När $x \neq 0$, så $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & x>0 \\ x^2 \ln(-x) & x<0 \end{cases}$

och är deriverbar två gånger!

$$f'(x) = 2x \ln|x| + x, \quad f''(x) = 2\ln|x| + 2 + 1 = $$
$$= 3 + 2\ln|x|$$

Detta gäller då $x \neq 0$.

Undersöker nu $x=0$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\ln|x| - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x\ln|x| = 0$$ – är definierad, men

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\ln|x| + x - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} (2\ln|x| + 1) = -\infty \Rightarrow f''(0) \text{ existerar ej}$$