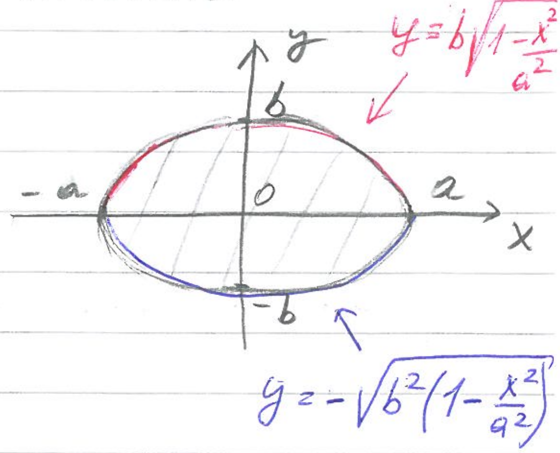
Lektion 1

$\boxed{B7}$

2

Arean som avgränsas av ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$(a>0,\ b>0)$ är arean mellan
de två kurvorna



$$y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

(man får dem genom
att lösa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
för $y \geq 0$ och $y \leq 0$).

DVS vi måste beräkna arean av
området

$$D = \left\{(x,y) : -a \leq x \leq a,\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right\}$$

$$\Rightarrow A(D) \overset{\text{se s. 312 i boken}}{\underset{}{\overset{1}{=}}} \int_{-a}^{a} \left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} - \left(-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\right] dx =$$

$$= \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\, dx =$$

$$= \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Det finns olika sätt att beräkna $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$:
t. ex partiell integration ger

$$\int 1\cdot\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + \int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$\Rightarrow \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

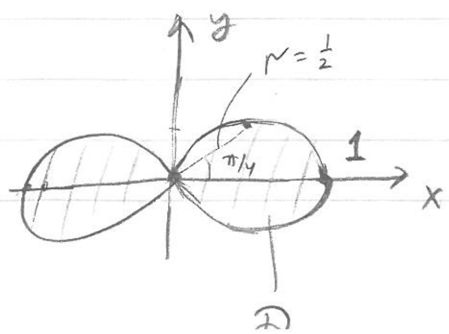
$$A(D) = \frac{2b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_{x=-a}^{x=a} =$$

$$= \frac{2b}{a}\left(0 - 0 + \frac{a^2}{2}\underbrace{\arcsin 1}_{=\frac{\pi}{2}} - \frac{a^2}{2}\underbrace{\arcsin(-1)}_{=-\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \underline{\underline{\pi a b}}\ .$$

$\underline{\underline{3}}$ Vi måste beräkna $A(D)$, där

$$D = \{(x,y) : 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le \cos^2\varphi\}$$



$$A(D) \underset{\text{s 315}}{=} \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos^4\varphi\,d\varphi$$

Från Eulers formel,

$$\cos^4\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4i\varphi}+4e^{2i\varphi}+6+4e^{-2i\varphi}+e^{-4i\varphi}}{16}$$

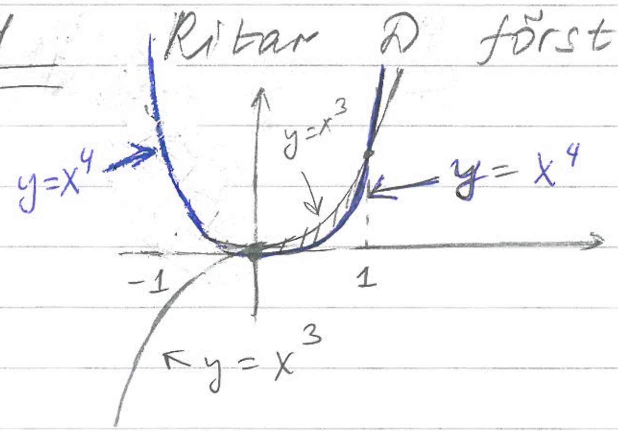
$$= \frac{\cos 4\varphi}{16} + \frac{\cos 2\varphi}{4} + \frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos 4\varphi}{16} + \frac{\cos 2\varphi}{4} + \frac{3}{8}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 4\varphi}{64} + \frac{\sin 2\varphi}{8} + \frac{3}{8}\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0-0+0-0+\frac{3}{8}(2\pi-0)\right) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{8}}}.$$

$\underline{\underline{4}}$ Ritar $\mathcal{D}$ först!



$$\Rightarrow \mathcal{D} = \{0 \le x \le 1,\ x^4 \le y \le x^3\}$$

$$\Rightarrow A(D) = \int_0^1 (x^3 - x^4)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{5} + 0 = \underline{\underline{\frac{1}{20}}}$$

$\underline{\underline{8}}$ Längden av kurvan $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \underset{\text{s. 319}}{=}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)^2 + (-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)^2}\,dt$$

3

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{-2t}\cos^2 t + \cancel{2e^{-2t}\cos t \sin t} + 2e^{-2t}\sin^2 t - \cancel{2e^{-2t}\cos t \sin t}}\; dt$$

$$\underset{\cos^2+\sin^2=1}{=} \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{-2t}}\; dt\; dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} e^{-t}\, dt =$$

$$= -\sqrt{2}\left[e^{-t}\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{\sqrt{2}\left(1-e^{-2\pi}\right)}}.$$

$\underline{\underline{9}}$ Längd av kurvan $\begin{cases} r = \varphi^2 \\ -\pi \le \varphi \le \pi \end{cases}$ ges av

$$s \overset{s.320}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\; d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\varphi^4 + 4\varphi^2}\; d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi| \sqrt{\varphi^2+4}\; d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \varphi\sqrt{4+\varphi^2}\, d\varphi - \int_{-\pi}^{0} \varphi\sqrt{4+\varphi^2}\, d\varphi = \otimes$$

Här är $\int \varphi\sqrt{4+\varphi^2}\, d\varphi = \left[\begin{array}{l} 4+\varphi^2 = y \\ dy = 2\varphi\, d\varphi \Rightarrow \varphi\, d\varphi = \frac{dy}{2} \end{array}\right] =$

$$= \int \sqrt{y}\, \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{3/2}}{3/2} = \frac{y\sqrt{y}}{3} = \frac{(4+\varphi^2)\sqrt{4+\varphi^2}}{3}$$

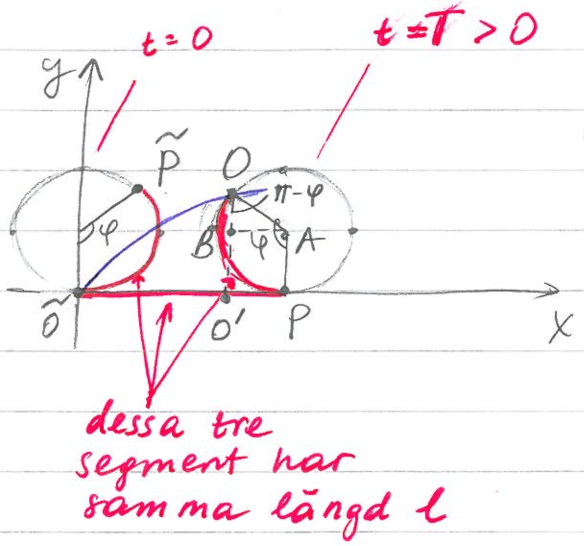
$$\Rightarrow \otimes = \frac{(4+\pi^2)^{3/2}}{3} - \frac{4\sqrt{4}}{3} - \frac{4\sqrt{4}}{3} + \frac{(4+\pi^2)^{3/2}}{3} =$$

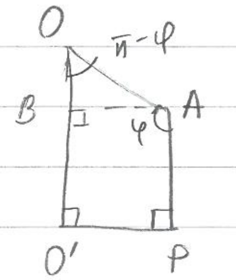
$$= \frac{2}{3}\left[(4+\pi^2)\sqrt{4+\pi^2} - 8\right]$$

Extra

B 7

43





När hjulet rullar:
$\tilde{O}$ blir O och $\tilde{P}$ blir P.

Från cirkeln:

$$l = \frac{\varphi}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi} R = \varphi R \Rightarrow$$

avståndet $\tilde{O}P$ längs x-axeln är φR.

Vi vill veta x-koord. av punkt O på den andra cirkeln (då $t = T > 0$), dvs längden av $\tilde{O}O'$.

$$O'P = AB = OA \cdot \sin(\pi - \varphi) = R\sin\varphi,$$

$$\tilde{O}O' = \tilde{O}P - O'P = \varphi R - R\sin\varphi = R(\varphi - \sin\varphi)$$

Likadant finner vi y-koord. av O vilket är samma som $O'O$:

$$O'O = O'B + OB = R + OA \cdot \cos(\pi - \varphi) =$$

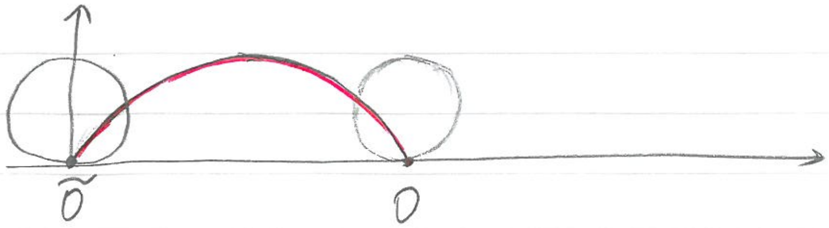
$$= R - R\cos\varphi = R(1 - \cos\varphi).$$

Vi ser att cykloiden kan parametriseras som

$$\begin{cases} x = R(\varphi - \sin\varphi) \\ y = R(1 - \cos\varphi) \end{cases}$$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

När hjulet har rullat ett varv $\Rightarrow \varphi = 2\pi$



Beräknar längen $\tilde{O}O$ (se s. 319)!

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(R - R\cos\varphi)^2 + (R\sin\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(1 - 2\cos\varphi + \underbrace{\cos^2\varphi) + R^2\sin^2\varphi}_{=1}}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} R\sqrt{2 - 2\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2R\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

≥ 0 då $0 \leq \frac{\varphi}{2} \leq \pi$ $\Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

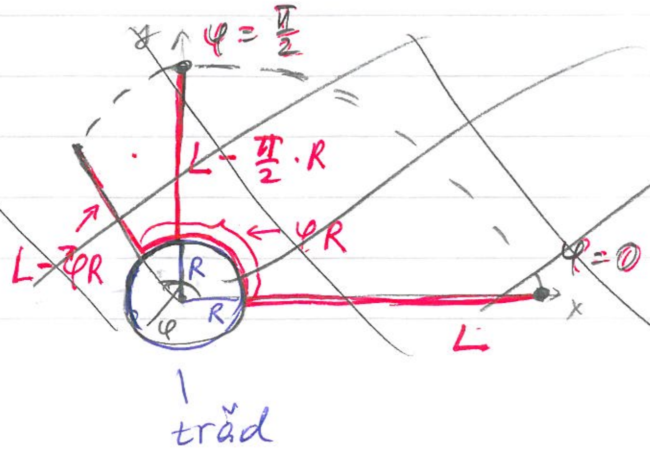
$$= \int_0^{2\pi} 2R\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 2R \cdot \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi$$

$$= 2R\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = \left[-4R\cos\frac{\varphi}{2}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} =$$

$$= 4R - (-4R) = \underline{\underline{8R}}.$$

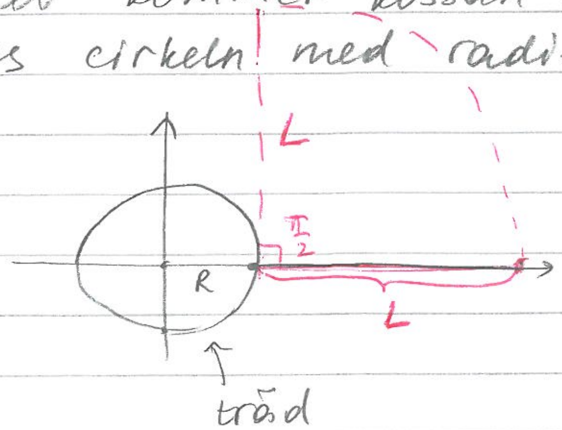
P6

19

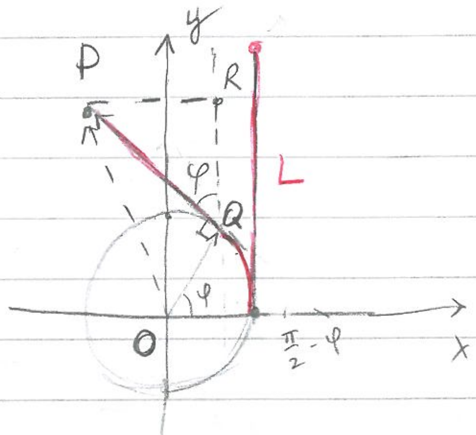


Om man tittar uppifrån på kossans rörelse ser den ut så här:

P6 Innan snöret börjar vinda upp sig på trädet kommer kossan att gå ett $1/4$ varv längs cirkeln med radien L! detta ger sträckan med längden $\frac{\pi}{2}L$.



Efter detta börjar snöret vinda upp sig på trädet.



Antar att kossan har gått en vinkel φ runt trädet. I hennes position är snöret tangent till trädets yta. Kossans koordinater på xy-planet är koordinaterna av punkt P eller dessa av vektorn $\vec{OP}$. Vi kan få dessa genom att addera:

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}.$$

$\vec{OQ} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ då Q ligger på cirkeln med radien R.

Vi ser att $\varphi = \angle PQR$ och $PQ = L - R\varphi$.

Från $\Delta PQR \Rightarrow PR = PQ\sin\varphi = (L-R\varphi)\cdot\sin\varphi$

$QR = PQ\cos\varphi = (L-R\varphi)\cos\varphi$

$\Rightarrow \vec{PQ} = (-(L-R\varphi)\cdot\sin\varphi, (L-R\varphi)\cos\varphi)$

Det betyder att $\vec{OR} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi) +$

$+(-(L-R\varphi)\sin\varphi, (L-R\varphi)\cos\varphi)$

$=(R\cos\varphi-(L-R\varphi)\sin\varphi, R\sin\varphi+(L-R\varphi)\cos\varphi)$

Kossan kommer till stammen då $R\varphi = L \Rightarrow \varphi = \frac{L}{R}$.

Vi beräknar längden av kurvan

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi - (L - R\varphi)\sin\varphi \\ y = R\sin\varphi + (L - R\varphi)\cos\varphi \end{cases} \qquad 0 \le \varphi \le \frac{L}{R}$$

vilket motsvarar länden av sträckan efter att snöret har börjat vinda upp sig på trädet.

$$l = \int_0^{L/R} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

$$x'(\varphi) = \cancel{-R\sin\varphi} - (L - R\varphi)\cos\varphi + \cancel{R\sin\varphi}$$

$$y'(\varphi) = \cancel{R\cos\varphi} - (L - R\varphi)\sin\varphi - \cancel{R\cos\varphi}$$

$$\Rightarrow (x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 = (L - R\varphi)^2 \underbrace{\cancel{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}}_{=1}$$

$$l = \int_0^{\frac{L}{R}} \sqrt{(\underbrace{L - R\varphi}_{\ge 0})^2}\, d\varphi = \int_0^{\frac{L}{R}} (L - R\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \left[L\varphi - \frac{R\varphi^2}{2}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{L}{R}} = L \cdot \frac{L}{R} - \frac{\cancel{R} \cdot L^2}{2R^{\cancel{2}}} = \frac{L^2}{2R}.$$

Sammanlagt har kossan gått $\underline{\underline{\frac{\pi}{2} + \frac{L^2}{2R}}}$