Lektion 11

$\boxed{B8}$

31 Vi vet att

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos^{(2n+2)}(\xi) t^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$/ \; \xi$ är mellan 0 och $t \Rightarrow \xi = \theta t \quad 0 \le \theta \le 1 \; /$

$$\Rightarrow \cos\sqrt{x} = \underbrace{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}}_{p_n(x)} + \underbrace{\frac{\cos^{(2n+2)}(\xi) x^{n+1}}{(2n+2)!}}_{r_n(x)}$$

Vi söker n så att

$$|\cos\sqrt{x} - p_n(x)| = |r_n(x)| < 10^{-5} \quad \text{då } 0 \le x \le 2.$$

Observera att $|\cos^{(2n+2)}(\xi)| \le 1$, då $\cos^{(k)}(\xi)$ är antingen $\pm\cos\xi$ eller $\pm\sin\xi$.

Vi ser att för $0 \le x \le 2$ resttermen kan uppskattas

$$|r_n(x)| = \left| \frac{\cos^{(2n+2)}(\xi) x^{n+1}}{(2n+2)!} \right| \le \frac{1 \cdot |x|^{n+1}}{(2n+2)!} \le \frac{2^{n+1}}{(2n+2)!},$$

så $|r_n(x)| < 10^{-5}$ är uppfylld så fort

$$\frac{2^{n+1}}{(2n+2)!} < 10^{-5}.$$

Testar $n = 0, 1, 2$ – passar inte

$n=3$: $\quad \frac{2^4}{8!} \overset{?}{<} \frac{1}{10^5} \Leftrightarrow \cancel{16} \cdot 10^5 \overset{?}{<} \cancel{8} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}$

nej!

$n=4: \quad \frac{2^5}{10!} \overset{?}{<} 10^{-5} \Leftrightarrow \cancel{32}\cdot 10^{\cancel{5}\,3} \overset{?}{<} \cancel{10}\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}$

$$\underbrace{1000}_{50\cdot 20} \overset{?}{<} 9\cdot 7\cdot 6\cdot 3 = 54\cdot 21$$

sant!

Dvs $p_5(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!}$ satisfierar

$$|\cos\sqrt{x} - p_5(x)| = |r_5(x)| < \frac{2^5}{10!} < 10^{-5}.$$

<u>Svar:</u> $p_5(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!}$ är polynomet

<u>32</u> Vi vet att

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

$\xi = \theta x$ för $0 \le x \le 1$.

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} + \frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)x^{2n+2}}{(2n+3)!}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\underbrace{x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}}_{p_{2n+1}(x)} + \underbrace{\frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)x^{2n+3}}{(2n+3)(2n+3)!}}_{r_{2n+1}(x)}\right]_0^1$$

Vi vill använda $[p_{2n+1}(x)]_{x=0}^{x=1}$ som approximation, då ges felet av $[r_{2n+1}(x)]_0^1 \Rightarrow$ vårt mål är att hitta n sådan att $|[r_{2n+1}(x)]_0^1| < 10^{-4}$, då $0 \le x \le 1$.

$$|[r_{2n+1}(x)]_0^1| = \left|\frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)\cdot 1^{2n+3}}{(2n+3)(2n+3)!}\right| \le \frac{|\sin^{(2n+3)}(\xi)|}{(2n+3)(2n+3)!} \le$$

$$\le \frac{1}{(2n+3)(2n+3)!} \Rightarrow \boxed{2}$$

$|r_{2n+1}(x)| < 10^{-4}$ blir uppfylld i fall

$$\frac{1}{(2n+3)(2n+3)!} < \frac{1}{10^4}.$$

Testar: $n=0$ — $\frac{1}{3\cdot 3!} \overset{?}{<} \frac{1}{10^4}$ - nej.

$n=1$ — $\frac{1}{5\cdot 5!} \overset{?}{<} \frac{1}{10^4}$ - nej.

$n=2$ — $\frac{1}{7\cdot 7!} \overset{?}{<} \frac{1}{10^4} \Leftrightarrow$ $\cancel{10^4}^{3} \overset{?}{<} 7\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5}\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2}$

$1000 < 24\cdot 49 = 1176$

ja!

Det betyder att

$$\left[P_5(x)\right]_{x=0}^{x=1} = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{25\cdot 4\cdot 3!} =$$

$$= \frac{1800 - 100 + 3}{\underbrace{25\cdot 4\cdot 3\cdot 3!}_{=1800}} = \frac{1703}{1800}$$

approximerar $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ med felet $r_5(x) < \frac{1}{7\cdot 7!} < \frac{1}{10^4}$

Svar: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \frac{1703}{1800}$ med felet mindre än 10^{-4}!

$\boxed{P7}$ 23 $\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{1+32}$, men 32 är inte nära noll. Bryter ut 32:

$$\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32\left(1+\frac{1}{32}\right)} = 2\sqrt[5]{1+\frac{1}{32}}$$

Vi utvecklar

$$2(1+x)^{1/5} = 2\left(1+\frac{1}{5}x+\binom{\frac{1}{5}}{2}x^2+\dots+\binom{\frac{1}{5}}{n}x^n+\frac{\left((1+x)^{1/5}\right)^{(n+1)}\Big|_{x=\xi}x^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{5}x+\binom{\frac{1}{5}}{2}x^2+\dots+\binom{\frac{1}{5}}{n}x^n+\right.$$

$\boxed{\xi \text{ är mellan } 0 \text{ och } x}$

$$\left.+\frac{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}-1\right)\dots\left(\frac{1}{5}-n\right)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\frac{1}{5}-(n+1)}x^{n+1}\right)$$

$$= 2+\frac{2}{5}x+\dots+2\binom{1/5}{n}x^n+2\binom{1/5}{n+1}(1+\xi)^{\frac{1}{5}-(n+1)}x^{n+1}.$$

$$\Rightarrow 2\left(1+\frac{1}{32}\right)^{1/5} = \underbrace{2+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{32}+\dots+2\binom{1/5}{n}\frac{1}{32^n}}_{=p_n(x)}+\underbrace{2\binom{1/5}{n+1}(1+\xi)^{\frac{1}{5}-(n+1)}\cdot\frac{1}{32^{n+1}}}_{=r_n(x)}$$

$$0 \le \xi \le \frac{1}{32}.$$

Vi vill hitta n sådant att $|r_n(x)| < \frac{1}{100}$.

Observera att

$$|r_n(x)| = 2\left|\binom{1/5}{n+1}\right| \cdot \overbrace{\frac{1}{\underbrace{(\underbrace{1+\xi}_{\ge 0})^{(n+1)-\frac{1}{5}}}_{\ge 1}}}^{\le 1} \cdot \frac{1}{32^{n+1}} \le$$

kan vara negativ

$$\le 2\cdot\left|\binom{1/5}{n+1}\right|\frac{1}{32^{n+1}}, \text{ så}$$

$$|r_n(x)| < \frac{1}{100} \text{ så fort } 2\cdot\binom{1/5}{n+1}\cdot\frac{1}{32^{n+1}} < \frac{1}{100}.$$

Testar $n = 0, 1, 2 \dots$:

$n=0$: $\left|2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}\right| \overset{?}{<} \frac{1}{100}$ – nej.

$n=1$: $\left|\cancel{2}\cdot\frac{1/5\,(1/5-1)}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{32^2}\right| < \frac{1}{100}$ – ja!

Det betyder att

$$P_1(x) = 2 + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{32} = \frac{161}{80} \quad \text{approximerar } \sqrt[5]{33}$$

med felet $\frac{4}{25\cdot 32^2} < \frac{1}{100}$

Svar: $\sqrt[5]{33} \approx \frac{161}{80}$ med fel $< \frac{1}{100}$.

24

Funktionen $f(x) = xe^{x^2}$ är strängt monoton $\Rightarrow$ inverterbar.

Observera att $f(x)$ är udd:

$$f(-x) = -x\,e^{(-x)^2} = -x\,e^{x^2} = -f(x).$$

Det betyder att inversen också är udd,

$$\left[\begin{array}{l}\text{detta synns från grafen, eller kolla på}\\ f^{-1}(-y) = \left[\begin{array}{l}\text{låt } y = f(x) \Rightarrow\\ x = f^{-1}(y)\end{array}\right] = f^{-1}(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{udd}}}{-f(x)}) = f^{-1}(f(-x)) = -x =\\ \qquad = -f^{-1}(y)\end{array}\right]$$

Och Maclaurinutveckling för $f^{-1}(y)$ innehåller endast udda potenser $\Rightarrow$ kan skrivas på formen:

$$f^{-1}(y) = a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + O(y^7).$$

Vi kommer att bestämma a_1, a_3, a_5 genom att använda sambandet

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \text{och utvecklingen}$$

$$f(x) = xe^{x^2} = x\left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + O(x^6)\right) =$$

$$= x + x^3 + \frac{x^5}{2} + O(x^7).$$

Vi ser att

$$x = f^{-1}(f(x)) = a_1 f(x) + a_3 (f(x))^3 + a_5 \cdot (f(x))^5 + O((f(x))^7)$$

$$= a_1\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + O(x^7)\right) + a_3 \underbrace{(x+x^3+O(x^5))(x+x^3+O(x^5))}_{x^2+2x^4+O(x^6)}(x+x^3+O(x^5))$$

$$+ a_5(x + O(x^3))^5 + O(x^7) =$$

$$= a_1 x + x^3(a_1 + a_3) + x^5\left(\frac{a_1}{2} + 3a_3 + a_5\right) + O(x^7) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_1 + a_3 = 0 \\ \frac{a_1}{2} + 3a_3 + a_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -1 \\ a_5 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$f^{-1}(y) = y - y^3 + \frac{5}{2}y^5 + O(y^7).$$

Svar $f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + O(x^7).$

Extra

$\boxed{P7}$ 22

a) Motivation:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right) \approx$$

$$\approx m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2}$$ då $\frac{v}{c}$ är liten.

$\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}$

b) Observera att

$$(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{\left((1+t)^{-1/2}\right)''\big|_{t=\xi}}{2!}\cdot t^2 =$$

$\boxed{\xi \text{ är mellan } 0 \text{ och } t}$

$$= 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3(1+\xi)^{-\frac{1}{2}-2}}{8}\cdot t^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3t^2}{8(1+\xi)^{5/2}} \Rightarrow$$

$$m_0c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3v^4}{8c^4(1+\xi)^{5/2}}\right)$$

$\boxed{\xi \text{ är mellan } 0 \text{ och } -\frac{v^2}{c^2} \text{ eller } \xi = -\theta\frac{v^2}{c^2},\ 0 \le \theta \le 1}$

$$= m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2} + \frac{3m_0v^4}{8c^2(1+\xi)^{5/2}} \cdot$$

$$= m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2} + \underbrace{\frac{3m_0v^4}{8c^2\left(1-\theta\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}}}_{\text{felet}}$$

för $0 \le \theta \le 1$.

När $|v| < \frac{c}{10}$ kan vi uppskatta felet:

$$\left|\frac{3m_0v^4}{8c^2\left(1-\theta\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}}\right| < \frac{3m_0\cdot\frac{c^4}{10^4}}{8c^2\left(1-\theta\cdot\frac{1}{100}\right)^{5/2}} =$$

$$= \frac{3m_0c^2}{8\cdot10^4\left(1-\theta\cdot\frac{1}{100}\right)^{5/2}} <$$

θ är 1 som störst

$$< \frac{3m_0\cdot c^2}{8\cdot10^4\left(1-\frac{1}{100}\right)^{5/2}} = \underbrace{\frac{3\cdot m_0\cdot c^2}{8\cdot\left(\frac{99}{100}\right)^{5/2}\cdot10^4}}$$