Lektion 12

$\boxed{B9}$ **2** |sätt in $y = Ce^{-4x}$ i ekvationerna!|

a) $y = Ce^{-4x}$ satisfierar

$$y' = (Ce^{-4x})' = -4Ce^{-4x} \neq 4x \text{ för alla } x$$

$\Rightarrow$ ej lösning.

b) $y = Ce^{-4x} \leadsto y' + 4y = 0$:

$$(Ce^{-4x})' + 4(Ce^{-4x}) = -4Ce^{-4x} + 4Ce^{-4x} =$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow$ lösning.

c) $y = Ce^{-4x} \leadsto y' - 4y = 0$:

$$(Ce^{-4x})' - 4(Ce^{-4x}) = -4Ce^{-4x} - 4Ce^{-4x} =$$

$$= -8Ce^{-4x} \neq 0 \text{ för alla } x$$

$\Rightarrow$ ej lösning.

Svar Endast till ekvation b)

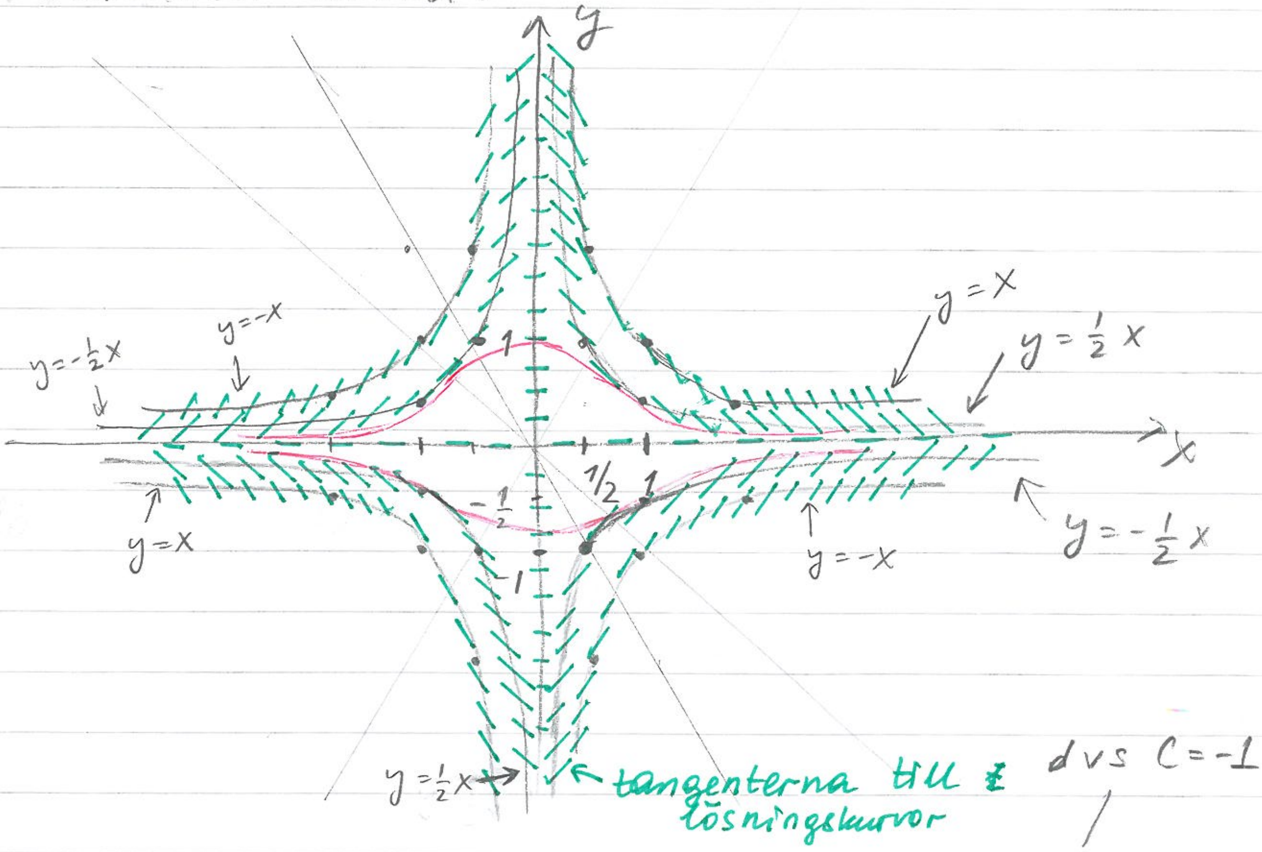
$\boxed{P8}$ **2** a) Vi kan beräkna lutningen av lösningskurvorna från sambandet

$$y' = -2xy \quad \left(\begin{array}{l} \text{t ex om } x=1,\ y=1 \\ \Rightarrow y' = -2 - \text{lutningen} \end{array}\right)$$

För att få en bra bild, kollar på punkter (x, y) som satisfierar $-2xy = C = \text{konst}$, där $y' = C = \text{konst}$.

T ex låt $C = 1 \Rightarrow -2xy = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2x}$.

I alla punkter på denna kurva $y' = 1$ – dvs tangenter till lösningskurvorna har lutning 1. Skisserar detta:



Likadant finner vi att när $-2xy = -1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x}$, är $y' = -1$ – tangenterna har lutning -1

Vi kan också kolla på fallet $C = 2$, då finner vi att när $-2xy = 2 \Leftrightarrow xy = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x}$ så $y' = 2$. Man kan också studera $C = -2$.

Observera också att när $x = 0$ eller $y = 0$ så $y' = 0$ – tangenterna är parallella med x-axeln

Med tanke på att de gråna linjerna på bilden är tangenterna till lösningskurvorna, kan vi skissera lösningskurvorna (röda kurvor på bilden).

b) $y'(x) + 2xy(x) = 0$

Koefficient framför $y(x)$ är $2x$, och den har en primitiv funktion x^2 $\Rightarrow$ multiplicerar ekvationen med e^{x^2}:

$$e^{x^2} \cdot y'(x) + 2xe^{x^2} y(x) = 0$$

Vänstersidan är $\left(e^{x^2} \cdot y(x)\right)'$ $\Rightarrow$

$$\left(e^{x^2} \cdot y(x)\right)' = 0 \Rightarrow$$

$e^{x^2} \cdot y(x) = C$ där C = konst (valfri).

$$\boxed{y(x) = \frac{C}{e^{x^2}}, \quad C = \text{konst}}$$

c) Om lösningskurvan ska gå genom $(1, 1)$ $\Rightarrow$

$$1 = \frac{C}{e^{1^2}} \Rightarrow 1 = \frac{C}{e} \Rightarrow C = e$$

Vilket ger $y(x) = \frac{e}{e^{x^2}}$ eller

$$\boxed{y(x) = e^{1-x^2}}$$

P8 4

a) Skriver som $y' - 3y = x^2$ (standartform).

Koefficient framför y är -3 med en primitivfunktion $-3x \Rightarrow$ multiplicerar ekvationen med e^{-3x}:

$$y' \cdot e^{-3x} - 3 \cdot e^{-3x} y = x^2 e^{-3x}$$

$$(y \cdot e^{-3x})' = x^2 e^{-3x}$$ eller

$$y \cdot e^{-3x} = \int x^2 e^{-3x} dx.$$

Beräknar

$$\int \overset{\downarrow}{x^2} \overset{\uparrow}{e^{-3x}} dx = x^2 \cdot \frac{e^{-3x}}{-3} + \int 2x \cdot \frac{e^{-3x}}{+3} dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3}\int \overset{\downarrow}{x} \overset{\uparrow}{e^{-3x}} dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3}\frac{e^{-3x}}{-3}x - \frac{2}{3}\int \frac{e^{-3x}}{-3} dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9}e^{-3x}x - \frac{2}{27}e^{-3x} + C$$

där $C = \text{konst}$

$$\Rightarrow y e^{-3x} = -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9}e^{-3x} \cdot x - \frac{2}{27}e^{-3x} + C$$

$$y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{2}{27} + Ce^{3x}, \quad C = \text{konst}$$

b) $y' + 2xy = x$ är i standartform.

Koeff. framför y är $2x$. Och dess primitiv är x^2. Multiplicerar ekvationen med e^{x^2}:

$$e^{x^2} \cdot y' + 2x e^{x^2} \cdot y = x e^{x^2} \iff$$

$$(e^{x^2} \cdot y)' = x e^{x^2} \quad \text{eller}$$

$$e^{x^2} \cdot y = \int x e^{x^2} dx \iff$$

$$e^{x^2} \cdot y = \frac{e^{x^2}}{2} + C, \text{ så}$$

$$\underline{y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}}, \quad C = \text{konst}.$$

e) $y' + 3x^2 y = x^2$ är i standartform.

Koeff. framför y är $3x^2$ och dess primitiv är x^3. Multiplicerar ekvationen med e^{x^3}:

$$y' \cdot e^{x^3} + 3x^2 e^{x^3} \cdot y = x^2 e^{x^3} \iff$$

$$(y \cdot e^{x^3})' = x^2 e^{x^3} \iff$$

$$y e^{x^3} = \int x^2 e^{x^3} dx \iff$$

$$y e^{x^3} = \frac{e^{x^3}}{3} + C \implies$$

$$\underline{y = \frac{1}{3} + Ce^{-x^3}}, \quad C = \text{konst}$$

d) Man kan ju skriva på standartform

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x}{1+x^2}$$

och beräkna en integrerande faktor...

Observera dock att VL i ekvationen är

$$(1+x^2)y' + 2xy = \left((1+x^2)y\right)', \text{ så}$$

$$\left((1+x^2)y\right)' = 2x \Leftrightarrow$$

$$(1+x^2)y = x^2 + C \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{x^2+C}{1+x^2}, \quad C = \text{konst}$$

/ Detta kan också skrivas som

$$y = \frac{(x^2+1)+(C-1)}{x^2+1} = 1 + \frac{C-1}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow y = 1 + \frac{C}{x^2+1}, \text{ då } C = \text{konst (valfri)} /$$

som i boken

e) Skriver på standartform $(x>0)$

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Koefficient framför y är $\frac{2}{x}$, dess primitiv funktion är $2\ln x$. Vi ser att en integrerande faktor är $e^{2\ln x} = x^2$.

Multiplicerar ekvationen med x^2:

$$x^2 \cdot y' + 2yx = x \cdot \sin x \iff$$
$$(x^2 \cdot y)' = x \sin x \iff$$
$$x^2 \cdot y = \int x \sin x \, dx \implies$$
$$y = \frac{1}{x^2} \int \overset{\downarrow}{x} \overset{\uparrow}{\sin x} \, dx =$$
$$= \frac{1}{x^2} \left[-x \cos x + \int \cos x \, dx \right] =$$
$$= \frac{1}{x^2} \left[-x \cos x + \sin x + C \right] =$$
$$= -\frac{1}{x} \cos x + \frac{\sin x}{x^2} + \frac{C}{x^2}, \quad C = \text{konst.}$$

$$\underline{y = -\frac{1}{x} \cos x + \frac{\sin x}{x^2} + \frac{C}{x^2}}, \quad C = \text{konst}$$

f) Skriver på standartform ($x > 0$):
$$y' - \frac{y}{2x} = \frac{x}{2}$$
Koeff. framför y är $-\frac{1}{2x}$, dess primitiv funktion är $-\frac{1}{2} \ln x \implies$ multiplicerar ekvationen med $e^{-\frac{1}{2}\ln x} = x^{-1/2}$:
$$\frac{y'}{\sqrt{x}} - \frac{y}{2x\sqrt{x}} = \frac{x}{2\sqrt{x}} \iff$$
$$y' x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} y = \frac{1}{2}\sqrt{x} \iff$$
$$(y \cdot x^{-1/2})' = \frac{1}{2} x^{1/2} \iff$$

$$y \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2}\int x^{1/2}\,dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{y}{x^{1/2}} = \frac{1}{2}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + C \Rightarrow y = \frac{x^2}{3} + C\sqrt{x} \qquad C = \text{konst}$$

$\boxed{B9}$ $\underline{\underline{40}}$ Observera att när $x=0$ $\underbrace{\cancel{\int_0^0 y(t)\,dt}}_{=0} + y(0) = 1$
$\Rightarrow y(0) = 1$. Deriverar:

$$\left(\int_0^x y(t)\,dt + (1+x^2)y(x)\right)' = (1)' \Leftrightarrow$$

$$\left(\int_0^x y(t)\,dt\right)' + 2x \cdot y(x) + (1+x^2)\,y'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

/ p g a analysens huvudsats, då $y(t)$-kont./

$$y(x) + 2x\,y(x) + (1+x^2)\,y'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y'(x) \cdot (1+x^2) + (2x+1)\,y(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y'(x) + \frac{2x+1}{1+x^2}\,y(x) = 0$$

Koeff. framför $y(x)$ är $\frac{2x+1}{x^2+1}$ och

dess primitiv funktion är

$$\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \ln(x^2+1) + \arctan x \Rightarrow$$

Ekvationen ska multipliceras med

$$e^{\ln(x^2+1) + \arctan x} = (x^2+1)\,e^{\arctan x}$$

vilket ger

$$y'(x)\cdot(x^2+1)e^{\arctan x}+(2x+1)\cdot e^{\arctan x}\cdot y(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(y(x)\cdot(x^2+1)e^{\arctan x}\right)'=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y(x)\cdot(x^2+1)e^{\arctan x}=C \quad \Rightarrow$$

$$y(x)=\frac{C}{(x^2+1)e^{\arctan x}}, \quad C=\text{konst}$$

Kommer ihåg att $y(0)=1 \Rightarrow C=1$.

<u>Svar</u>: $y=\frac{1}{(x^2+1)e^{\arctan x}}$

<u>Extra</u>

$\boxed{P8}$ <u>12</u> Antag att $y=f(x)$ är en lösning $\Rightarrow$

$$f'(x)+g(x)f(x)=h(x) \quad (*)$$

När $x=a$ så $y=f(a)$, och vi söker ekvationen för tangenten i punkten $(a, f(a))$.

Tangentens lutning ges av $f'(a)$.

Vi kan använda $(*)$ för att hitta

$$f'(a)=h(a)-g(a)f(a) \Rightarrow$$

tangentens ekvation $\quad y=f'(a)(x-a)+f(a)$

blir $\quad y=(h(a)-g(a)f(a))(x-a)+f(a)$.

Vi vill visa att i fall både

$y=f_1(x)$ och $y=f_2(x)$ är lösningar till $(*)$

har tangenterna

$$(**)\begin{cases} y = (h(a) - g(a)f_1(a))(x-a) + f_1(a) \\ y = (h(a) - g(a)f_2(a))(x-a) + f_2(a) \end{cases}$$ och

en gemensam punkt som inte beror på f_1 och f_2.

En sådan punkt är en lösning (x, y) till $(**)$:

$$\Rightarrow \quad 0 = (\cancel{h(a)} - g(a)f_1(a) - \cancel{h(a)} + g(a)f_2(a))(x-a) + f_1(a) - f_2(a)$$

(första ekvationen minus andra ekvationen)

Vi ser att $x - a = \dfrac{\cancel{f_2(a) - f_1(a)}}{g(a)(\cancel{f_2(a) - f_1(a)})} \Rightarrow$

$$x = a + \frac{1}{g(a)}.$$

Om vi sätter $x = a + \dfrac{1}{g(a)}$ i den första ekvationen:

$$y = (h(a) - g(a)f_1(a)) \cdot \frac{1}{g(a)} + f_1(a) =$$

$$= \frac{h(a)}{g(a)} - \cancel{f_1(a)} + \cancel{f_1(a)} = \frac{h(a)}{g(a)}.$$

Vi ser att tangenterna skär varandra i

$$\left(a + \frac{1}{g(a)};\ \frac{h(a)}{g(a)}\right).$$

Denna punkt beror inte på f_1 och f_2 $\Rightarrow$ den är gemensam för alla lösningar!