Lektion 13

$\boxed{P8}$ **5** a) $y' = \frac{2}{x}y \Leftrightarrow y' - \frac{2}{x}y = 0$ (standartform)

Koeff. framför y är $-\frac{2}{x}$, och dess primitiv funktion är $-2\ln|x| = -2\ln x$ då $x > 0$. En integrerande faktor är

$$e^{-2\ln x} = x^{-2}.$$

Multiplicerar ekvationen med x^{-2}:

$$x^{-2} \cdot y' - \frac{2}{x} \cdot x^{-2} y = 0 \Leftrightarrow$$

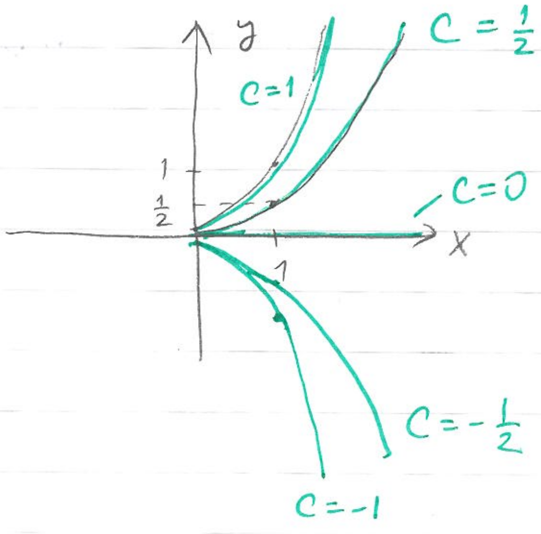
$$x^{-2} \cdot y' - 2x^{-3} \cdot y = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^{-2} \cdot y)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^{-2} \cdot y = C \qquad C = \text{konst}$$

$$\Rightarrow y = Cx^2, \quad C = \text{konst}, \ x > 0$$

För olika värden på C ser lösningarna ut så här:



b) $y = Cx^2$ går genom $(2, -3)$ innebär att

$$-3 = C \cdot 2^2 \Rightarrow C = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x^2, \quad x > 0$$

är denna lösningskurva

13 $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$, $x > 0$

Samlar alla y i VL, alla x i HL:

$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$ $\underline{\text{då } y \neq 0 \text{ !}}$

OBS! $y=0$ måste kontroleras separat – den kan vara en lösning!

Integrerar:

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \overset{\text{konst}}{C} \Leftrightarrow$

$/ e^{VL} = e^{HL} / \Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{C + 2\ln|x|} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |y| = |x|^2 \cdot \underbrace{e^C}_{\text{konst} > 0} \Leftrightarrow y = \underbrace{\pm e^C}_{\text{konst} \neq 0} x^2$, då $y \neq 0$.

Observera att $y=0$ också är en lösning:

$0' = \frac{2 \cdot 0}{x}$.

Om vi lägger ihop $y = Cx^2$, $C = \text{konst} \neq 0$
och $y = 0$.

så kan vi skriva $y = Cx^2$, $C = \text{konst}$, $x > 0$

14 $x^2 y' = y^2 + 2y + 1$ är en separabel ekvation!

$\frac{x^2 dy}{dx} = (y+1)^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{(y+1)^2} = \frac{dx}{x^2}$

då $y \neq -1$, $x \neq 0$.

$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{(y+1)^2} = \int \frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow -(y+1)^{-1} = -x^{-1} + C$

eller $\frac{1}{y+1} = \frac{1}{x} + C$ (−C och C är samma sak då C är valfri).

$\Leftrightarrow \frac{1}{y+1} = \frac{1+Cx}{x} \Leftrightarrow y+1 = \frac{x}{1+Cx} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{x}{1+Cx} - 1 \Leftrightarrow y = \frac{x(1-C)-1}{1+Cx}$, $C = \text{konst}$

Observera att y är definierad för alla x sådana att $1+Cx \neq 0$,

Observera också att $y=-1$ är en lösning, då $\underbrace{x^2(-1)^2}_{=0} = \underbrace{(-1+1)^2}_{=0}$

a) Vi söker en lösning s a $y(-1) = 1$.
Den är uppenbarligen inte $y=-1$, så vi söker C s a

$$+1 = \frac{-1(1-C)-1}{1-C} \Leftrightarrow 1-C = -1+C-1$$

$$\Rightarrow 2C = 3 \Rightarrow C = \frac{3}{2}.$$

Alltså är $y = \frac{x\cdot(-\frac{1}{2})-1}{1+\frac{3}{2}x} \Leftrightarrow y = \frac{-x-2}{2+3x}$

vilket är definierad då $x \neq -\frac{2}{3}$. Grafen

$y = \frac{-x-2}{2+3x}$, $x \neq -\frac{2}{3}$ består av två kurvor:

1) $y = -\frac{x+2}{2+3x}$, $x > -\frac{2}{3}$

2) $y = -\frac{x+2}{2+3x}$, $x < -\frac{2}{3}$.

I vårt fall går kurvan genom $x=-1$, så vi väljer 2).

Svar: $y = -\frac{x+2}{2+3x}$, $x < -\frac{2}{3}$.

b) Det är klart att $y=-1$ satisfierar $y(-1)=-1$. Om vi däremot söker C s.a

$$-1 = \frac{-1(1-C)-1}{1-C} \Leftrightarrow \cancel{-1} + \cancel{C} = \cancel{-1} + \cancel{C} - 1$$

så får vi $0=-1$ – motsägelse.
Dvs det finns ingen lösning på formen

$$y = \frac{x(1-C)-1}{1+Cx}, \quad C = \text{konst}$$

som går genom $(-1,-1)$.

Svar: $y=-1$.

$x \neq 0$, $x \neq 1$ – ekvationens definitionsmängd

15 $$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y}{x^2+x} \Leftrightarrow \frac{dy}{1+y} = \frac{dx}{x^2+x}$$

/ gäller då $y \neq -1$, $x^2+x \neq 0$
(dvs $x \neq 0$, $x \neq -1$) /
$y=-1$ – ska testas senare!

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{x^2+x} \Leftrightarrow \ln|y+1| = \int \frac{dx}{x(x+1)}$$

$$\left[\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C \right]$$

$$\Leftrightarrow \ln|y+1| = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln|y+1|} = e^{\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C} \Leftrightarrow$$

$$|y+1| = \underbrace{e^{c}}_{\text{konst}>0} \cdot \left|\frac{x}{x+1}\right| \Leftrightarrow y+1 = \underbrace{\pm e^{c}}_{\text{konst} \neq 0} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = -1 + \frac{Cx}{x+1}, \quad C \neq 0 \text{ - konst}$$

Observera att $y=-1$ också är en lösning:
($då\ x \neq 0,\ x \neq -1$).

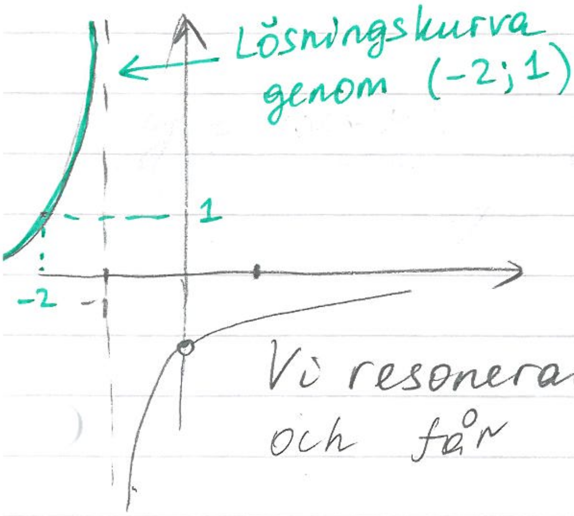
Vi kan slå ihop dessa två lösningar och skriva

$$y = -1 + \frac{Cx}{x+1} \quad C\text{-konst},\ x \neq 0,\ x \neq -1$$

a) $y(-2) = 1 \Rightarrow 1 = -1 - \frac{2C}{-1}$

$2 = 2C \Rightarrow C = 1$

$\Rightarrow y = -1 + \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow y = \frac{-1}{x+1}$ $\quad x \neq 0,\ x \neq -1$

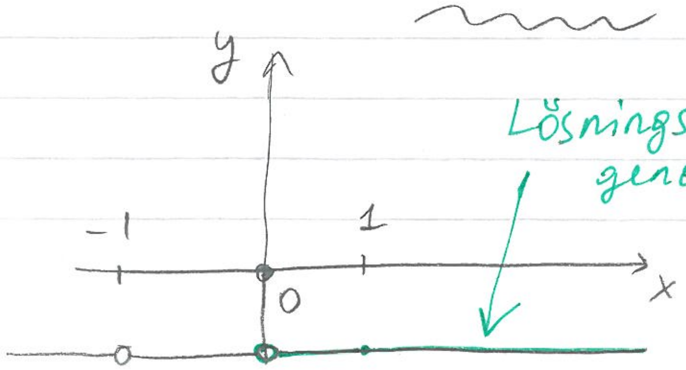


Vi resonerar på samma sätt som i P8:14 och får

$$y = -\frac{1}{x+1}, \quad x < -1$$

b) $y(1) = -1 \Rightarrow \cancel{-1} = \cancel{-1} + \frac{C}{2} \Rightarrow C = 0$

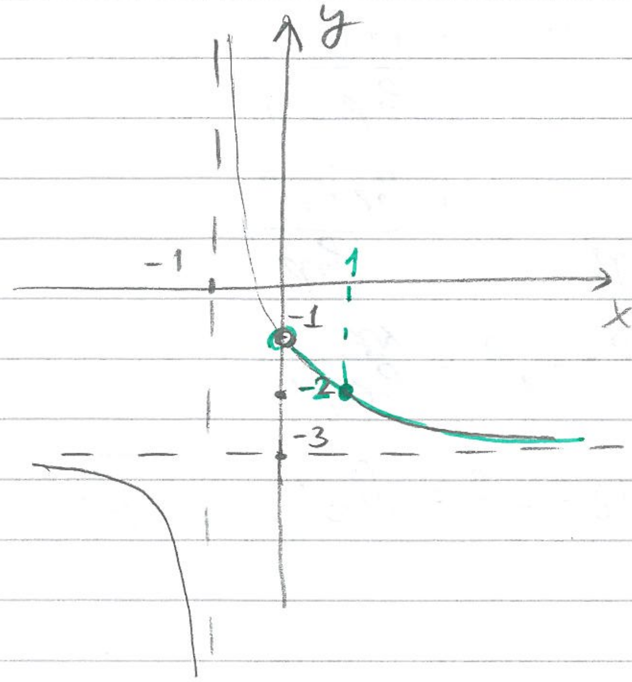
och $y = -1$, $x \neq 0$, $x = -1$



Lösningskurva genom (1, -1) är
$y = -1,\ x > 0$

c) $y(1) = -2 \Rightarrow -2 = -1 + \frac{C}{2} \Rightarrow C = -2$

och $y = -1 - \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow y = \frac{-3x-1}{x+1}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$



Skisserar grafen:

$\lim_{x \to -1^+} \frac{-3x-1}{x+1} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$

$\lim_{x \to -1^-} \frac{-3x-1}{x+1} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x}(-3-\frac{1}{x})}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})} = -3$

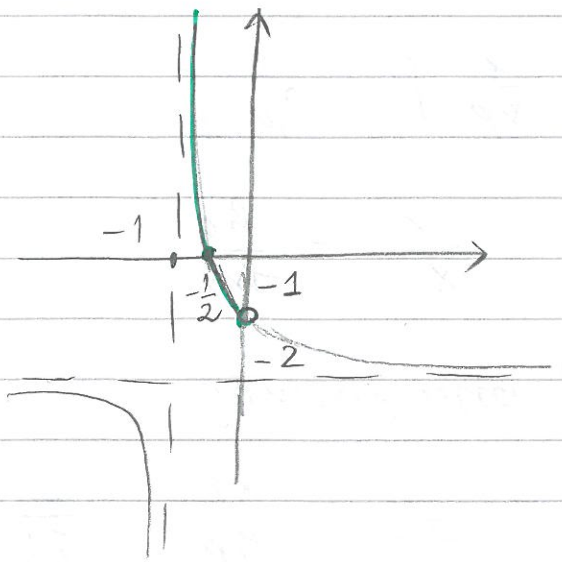
Vi ser att lösningskurvan genom $(1,-2)$ är

$y = \frac{-3x-1}{x+1}$, $x > 0$

d) $y(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 0 = -1 + \frac{-C/2}{-1/2+1} \Rightarrow 0 = -1 + \frac{-C}{1}$

$\Rightarrow C = -1$

och $y = -1 - \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow y = \frac{-2x-1}{x+1}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$



Grafen skisserar man på samma sätt som i c)

Vi ser att lösningskurvan genom $(-\frac{1}{2}, 0)$ är

$y = \frac{-2x-1}{x+1}$, $-1 < x < 0$

17 $e^{y}(1+y')=1 \Leftrightarrow$

$y' = e^{-y} - 1 \Leftrightarrow y' = \frac{1-e^{y}}{e^{y}}$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-e^{y}}{e^{y}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{e^{y}dy}{1-e^{y}} = dx$ då $1-e^{y} \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$.

(vi kan testa senare att $y=0$ är en lösning)

$\int \frac{e^{y}dy}{1-e^{y}} = \int dx \Leftrightarrow$

$-\ln|1-e^{y}| = x + C$, $C = \text{konst} \Leftrightarrow$

$\ln|1-e^{y}| = -x + C$ (då C är valfri) $\Leftrightarrow$

$|1-e^{y}| = e^{-x+C} \Leftrightarrow$

$1-e^{y} = \underbrace{\pm e^{C}}_{\text{konst} \neq 0} \cdot e^{-x} \Leftrightarrow$

$e^{y} = 1 + Ce^{-x}$ där $C = \text{konst} \neq 0$

$y = \ln(1+Ce^{-x})$, $C \neq 0$

definierad för alla x, då $1+2e^{-x} > 0$ för alla x

OBS! $y=0$ är en lösning, så vi kan skriva den allmäna lösningen som

$y = \ln(1+Ce^{-x})$, $C = \text{konst}$

(OBS! definierad för x som uppfyller $1+Ce^{-x}>0$)

$y(0) = \ln 3$ ger $\ln 3 = \ln(1+C) \Rightarrow C=2$

och $\Rightarrow y = \ln(1+2e^{-x})$.

Extra

$\boxed{Pg}$ 42 $\quad y' - xy = x^3 y^2 \quad y \neq 0$

Dividerar med y^2:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{x}{y} = x^3$$

och låter $z(x) = \frac{1}{y(x)}$.

Detta ger $y(x) = \frac{1}{z(x)} \Rightarrow y'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)}$

Byter mot z i ekvationen:

$$\underbrace{-\frac{z'(x)}{z^2(x)}}_{y'} \cdot \underbrace{z^2(x)}_{y^{-2}} - x \cdot \underbrace{z(x)}_{1/y} = x^3 \Leftrightarrow$$

$$z'(x) + x\, z(x) = -x^3, \text{ vilken är en linjär ekvation.}$$

prim. funk. $= \frac{x^2}{2}$

Den integrerande faktorn är $e^{x^2/2}$:

$$z'(x) \cdot e^{x^2/2} + x e^{x^2/2} z(x) = -x^3 e^{x^2/2}$$

$$\left(z(x) \cdot e^{x^2/2}\right)' = -x^3 e^{x^2/2} \Rightarrow$$

$$z(x) e^{x^2/2} = -\int x^3 e^{x^2/2}\, dx.$$

Beräknar $\int x^3 e^{x^2/2}\, dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{2} = t,\ dt = x\,dx \\ x^2 = 2t \end{array}\right] =$

$$= \int x^2 \cdot e^{x^2/2} \cdot \underbrace{x\,dx}_{dt} = \int 2t\, e^t\, dt = 2te^t - 2e^t + C =$$

$$= x^2 e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + C. \qquad C = \text{konst}$$

Vi ser att

$$z(x)e^{x^2/2} = -x^2 e^{x^2/2} + 2e^{x^2/2} + C$$ valfri

$$z(x) = -x^2 + 2 + Ce^{-x^2/2}.$$

Tillbaka till $y = \frac{1}{z}$!

$$y = \frac{1}{(2-x^2) + Ce^{-x^2/2}} \quad \text{eller} \quad y = \frac{e^{x^2/2}}{(2-x^2)e^{x^2/2} + C}.$$

C = konst

Svar: $y = \dfrac{e^{x^2/2}}{(2-x^2)e^{x^2/2} + C}.$

43 $\quad x^2 y'(x) = 3xy - 2y^2$

Skriver på homogen form: $(x \neq 0)$

$$y'(x) = \frac{3y}{x} - \frac{2y^2}{x^2}$$ och sätter $z(x) = \frac{y(x)}{x}$

I så fall $y(x) = x\,z(x)$

$$y'(x) = (x\,z(x))' = z(x) + x\,z'(x)$$

Byter mot z i ekvationen:

$$z(x) + x\,z'(x) = 3z(x) - 2(z(x))^2 \iff$$

$$z' \cdot x = 2z - 2z^2 \iff x \cdot \frac{dz}{dx} = 2(z - z^2)$$

$$\frac{dz}{2(z-z^2)} = \frac{dx}{x}$$

OBS! $z - z^2 = 0 \iff z = 0$, $z = 1$ ska också undersökas!

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z(z-1)}.$$

Beräknar

$$\int \frac{dz}{z(z-1)} = \int\left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right) dz = -\ln|z| + \ln|z-1| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{z-1}{z}\right| + C \quad \Rightarrow$$

valfri konst

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z}\right| + C \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln\left|\frac{z}{z-1}\right| = 2\ln|x| + C, \quad C\text{-valfri konst}$$

$$e^{\ln\left|\frac{z}{z-1}\right|} = e^{C+2\ln|x|} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{z}{z-1}\right| = \underbrace{e^C}_{\text{konst}>0} \cdot |x|^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{z}{z-1} = \underbrace{\pm e^C}_{\text{konst}\neq 0} x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z}{z-1} = Cx^2, \quad C \neq 0$$

$$z = Cx^2(z-1), \quad C \neq 0$$

$$z(Cx^2-1) = Cx^2 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{Cx^2}{Cx^2-1}, \quad C \neq 0$$

Om vi byter C mot $-C$ (kan göra då C är valfri), får vi $z = \frac{-Cx^2}{-Cx^2-1} = \frac{Cx^2}{1+Cx^2}$

som i svaret i boken.

Eftersom $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{Cx^3}{1+Cx^2}, \quad C \neq 0$

är en lösning.

OBS! $z=0$ motsv. $y=0$ också är en lösning, så vi kan tillåta situationen $C=0$.

Dessutom är $z=1$ motsv. $y=x$ en lösning

Svar:

$$y = \frac{Cx^3}{1+Cx^2}$$

C-valfri konstant,

$y = x$.