Lektion 16

$\boxed{B9}$ **26**

Vi löser först ekvationen $y'' - 2y' = e^{2x}(x^2+x-3)$.

Lösningen y_h till $y'' - 2y' = 0$ är $y_h = C_1 e^{2x} + C_2$, då karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r = 0$ har rötter $r_1 = 2$, $r_2 = 0$.

För att hitta y_p, gör vi ansatsen $y_p = z \cdot e^{2x}$, där z är en obestämd funktion:

$$y_p' = z' \cdot e^{2x} + 2ze^{2x}, \quad y_p'' = z'' e^{2x} + 4z'e^{2x} + 4ze^{2x},$$

så insättning av y_p in i ekvationen ger

$$z'' \cancel{e^{2x}} + 4z'\cancel{e^{2x}} + \cancel{4ze^{2x}} - 2z'\cancel{e^{2x}} - \cancel{4ze^{2x}} = \cancel{e^{2x}}(x^2+x-3)$$

$$z'' + 2z' = x^2 + x - 3.$$

z_p kan sökas som $z_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$. Insättning ger

$$6Ax + 2B + 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + x - 3 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{llcl}
x^2: & 6A = 1 & & A = \frac{1}{6} \\
x: & 6A + 4B = 1 & \Leftrightarrow & B = 0 \\
1: & 2B + 2C = -3 & & C = -\frac{3}{2}
\end{array}$$

så $z_p = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x$, och $y_p = \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x\right) \cdot e^{2x}$.

Totalt: $y = C_1 e^{2x} + C_2 + \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x\right) e^{2x}$.

Villkoret $y(0) = 2$ ger $2 = C_1 + C_2$,

$y'(0) = 2$ ger

$$2 = \left[2C_1 e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x\right)\cdot 2e^{2x}\right]_{x=0} =$$

$= 2C_1 - \frac{3}{2} \Rightarrow C_1$ och C_2 satisfierar

$$\begin{matrix} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 - \frac{3}{2} = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = \frac{7}{4} \\ C_2 = \frac{1}{4} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow y = \frac{7}{4}e^{2x} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x\right)e^{2x}$$

Svar: $y = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}\right)e^{2x} + \frac{1}{4}$.

$\boxed{B9}$ 30 a)

$y'' + 4y' + 4y = 25\cos x$ ska lösas.

Först söker vi lösningen y_h till $y'' + 4y' + 4y = 0$. Vi ser att $y_h = e^{-2x}(C_1 x + C_2)$ då den karakteristiska ekvationen $r^2 + 4r + 4 = 0$ har rötter $r_1 = r_2 = -2$.

I detta fall är det enklast att söka y_p på formen $y_p = A\cos x + B\sin x$.

Insättning ger

$$(A\cos x + B\sin x)'' + 4(A\cos x + B\sin x)' + 4(A\cos x + B\sin x) = 25\cos x$$

$$-A\cos x - B\sin x - 4A\sin x + 4B\cos x + 4A\cos x + 4B\sin x = 25\cos x$$

$$\begin{matrix} \cos x: & 3A + 4B = 25 \\ \sin x: & -4A + 3B = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow + \begin{matrix} 12A + 16B = 100 \\ -12A + 9B = 0 \\ \hline 25B = 100 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} B = 4 \\ A = 3 \end{matrix}$$

$\Rightarrow y_p = 3\cos x + 4\sin x$, och

$$y = e^{-2x}(C_1 x + C_2) + 3\cos x + 4\sin x$$

c) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\sin x$

Söker y_h: $y'' - 3y' + 2y = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 2.$

$$\Rightarrow y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}.$$

Notera nu att högerledet är

$$e^{3x}\sin x = e^{3x}\,\mathrm{Im}(e^{ix}) = \mathrm{Im}(e^{(3+i)x}).$$

Betraktar därför hjälpekvation

$$u'' - 3u' + 2u = e^{(3+i)x}$$

och gör ansatsen $u(x) = z(x)e^{(3+i)x}$.

$$u'(x) = z'(x)e^{(3+i)x} + (3+i)z(x)e^{(3+i)x}$$

$$u''(x) = z''(x)e^{(3+i)x} + 2(3+i)z'(x)e^{(3+i)x} + (3+i)^2 z(x)e^{(3+i)x}$$

$\Rightarrow$ insättning ger (efter forkortning med $e^{(3+i)x}$)

$$z''(x) + 2(3+i)z'(x) + (3+i)^2 z(x) - 3z'(x) - 3(3+i)z(x) + 2z(x) = 1$$

$$z''(x) + (3+2i)z'(x) + (9+6i-1-9-3i+2)z(x) = 1$$

$$z'' + (3+2i)z' + (1+3i)z = 1$$

Antag att $z = C = \text{konst} \Rightarrow$

$$(1+3i)\cdot C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{1+3i} = \frac{(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{1-3i}{10}.$$

Så vi kan ta $z = \frac{1-3i}{10}$, och då är

$$u(x) = z(x)\cdot e^{(3+i)x} = \frac{1}{10}(1-3i)\cdot e^{3x}(\cos x + i\sin x) =$$

$$= \frac{e^{3x}}{10}\Big(\cos x + 3\sin x + (-3\cos x + \sin x)i\Big).$$

Det är nu rimligt att ta $y_p(x) = \operatorname{Im} u$, d vs

$$y_p(x) = \frac{e^{3x}}{10}(-3\cos x + \sin x).$$

Totalt har vi $y = y_p + y_h \Rightarrow$

$$y = \frac{e^{3x}}{10}(-3\cos x + \sin x) + C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}.$$

$\boxed{P8}$ 37

$$y'' + 2y = \sin x - \cos x.$$

y_h är lösningen till $y'' + 2y = 0 \Rightarrow$
$y_h = C_1 \sin\sqrt{2}x + C_2\cos\sqrt{2}x$ då den karakteristiska ekvationen $r^2 + 2 = 0$ har rötter $r_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$.

Om vi jämför y_h och högerledet i ekvationen, då ser vi att argumentena inte är samma ($\sqrt{2}x$ i y_h, x i högerledet). Därför är det

4

rimligt att söka y_p på formen $A\sin x + B\cos x$.

Insättning ger

$$-A\sin x - B\cos x + 2A\sin x + 2B\cos x = \sin x - \cos x.$$

Om vi jämför koefficienterna $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ll} \sin x: & -A + 2A = 1 \\ \cos x: & -B + 2B = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \end{array} \Rightarrow y_p = \sin x - \cos x.$$

Lösningen blir $y = y_h + y_p = C_1 \sin\sqrt{2}x + C_2\cos\sqrt{2}x + \sin x - \cos x.$

Nu måste vi bestämma C_1 och C_2 så att $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$ är uppfylld.

$y(0) = 1$ ger $1 = C_2 - 1 \Rightarrow C_2 = 2$.

$y'(x) = \sqrt{2}C_1\cos\sqrt{2}x - C_2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x + \cos x + \sin x.$

$y'(0) = 0$ ger $0 = C_1\sqrt{2} + 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Det betyder att

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x + 2\cos\sqrt{2}x + \sin x - \cos x$$

Extra

$\boxed{P8}$ 40

a) Vi söker den lösningskurva till ekvationen $y'' + 2y' + y = 2\sin x$ som uppfyller $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

5

Vilket betyder att den tangerar x-axeln i origo.

Söker y_h: y_h löser $y''+2y'+y=0$ med den karakt. ekvationen $k^2+2k+1=0$ som har rötter $k_{1,2}=-1$

$$\Rightarrow y_h = e^{-x}(C_1x+C_2)$$

Söker nu y_p på formen $y_p = A\sin x + B\cos x$. Insättning ger

$$-A\sin x - B\cos x + 2(A\cos x - B\sin x) + A\sin x + B\cos x = 2\sin x.$$

Jämför koefficienter i vänsterledet och högerledet

$$\begin{array}{lll} \sin x: & \cancel{-A} - 2B + \cancel{A} = 2 & \Leftrightarrow \quad B = -1 \\ \cos x: & \cancel{-B} + 2A + \cancel{B} = 0 & \quad\quad\quad A = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow y_p = -\cos x$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p = e^{-x}(C_1x+C_2) - \cos x. \ (*)$$

Villkoret $y(0)=0$ ger $0 = C_2 - 1 \Rightarrow C_2 = 1$.

$y'(x) = -e^{-x}(C_1x+C_2) + C_1e^{-x} + \sin x$, så

$y'(0)=0$ ger $0 = -C_2 + C_1 \Rightarrow C_1 = C_2 = 1$.

Den sökta lösningskurvan är $y = e^{-x}(x+1) - \cos x$

b) Från $(*)$ ser vi att $y(0) = C_2 - 1$. Vi vill veta för vilka värde på konstanterna är detta ett lokalt maximum. Om 0 är ett lokalt max, då $y'(0) = 0$. Detta ger $C_1 = C_2$ (se ovan).

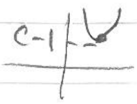
Nu utvecklar vi $(*)$ med $c_1 = c_2 = c$!

$$y = c(x+1)e^{-x} - \cos x =$$

$$= c(x+1)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right) - 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4) =$$

$$= (c-1) + \cancel{x(c-c)} + x^2\left(\frac{c}{2} - \cancel{c} + \frac{1}{2}\right) + O(x^3)$$

$$= (c-1) + x^2 \cdot \frac{(1-c)}{2} + O(x^3) =$$



$$= (c-1) + \underbrace{x^2}_{>0} \underbrace{\left(\frac{(1-c)}{2} + \underbrace{O(x)}_{\text{liten}}\right)}_{\substack{>0 \text{ om } c<1 \\ <0 \text{ om } c>1}} \quad \begin{cases} \geq c-1 & \text{då } c<1 \\ \leq c-1 & \text{då } c>1 \end{cases}$$

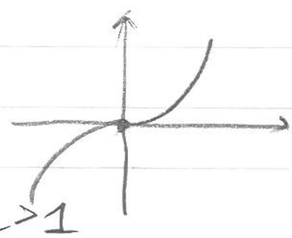
Slutsatsen är att $x=0$ är ett lok. max om $c<1$, och ett lok. min om $c>1$.

Fallet då $c=1$ ska också undersökas, och i detta fall behöver vi fler termer i utvecklingen:

$$y = (x+1)e^{-x} - \cos x = (x+1)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)\right) - 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4) =$$

$$= 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + O(x^4) =$$

$$= \underbrace{x^3}_{\substack{>0 \text{ då } x>0 \\ <0 \text{ då } x<0}} \overbrace{\left(\frac{2}{3} + O(x)\right)}^{>0} \quad \begin{cases} >0 = y(0) & \text{då } x>0 \\ <0 = y(0) & \text{då } x<0 \end{cases}$$



detta är varken max eller min!

Svar Lösningarna $y = c(x+1)e^{-x} - \cos x$, $c>1$ har ett lokalt maximum i $x=0$.