Lektion 19

Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent om gränsvärdet

$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{= s_N}$ existerar och är ändligt.

$= s_N$ – kallas för delsumma

OBS! Om $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0 \Rightarrow$ serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent (= ej konvergent).

Men $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ innebär inte att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent.

$\boxed{B10}$ $\underline{\underline{1}}$

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k+1}$ är divergent då $\lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{k+1} =$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k}(1-\frac{1}{k})}{\cancel{k}(1+\frac{1}{k})} = 1 \neq 0.$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k$ är divergent då $\lim_{k\to\infty} \sin k$ inte existerar.

c) $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2+2k} = 0$ men detta innebär inte att serien är konvergent.

Vi undersöker konvergensen med hjälp av partialbråksuppdelningen

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2} \Leftrightarrow \quad \Big| \times k(k+2)$$

$$1 = Ak + 2A + Bk \Rightarrow \begin{array}{l} k:\ A+B=0 \\ 1:\ 2A=1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} B = -\frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{2} \end{array}$$

Vi beräknar först delsummorna:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+2)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \Big(1 + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{5}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n-1}} + \cancel{\frac{1}{n}}$$

$$- \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}} - \dots - \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \Big)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

Seriens summa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^n$$

är en geometrisk serie. Eftersom delsumman

$$s_n = a + aq + \dots + aq^n = a \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow$$

serien konvergerar då $|q| < 1$ (så att $q^n \to 0$ då $n \to \infty$) med summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \lim_{n\to\infty} a \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

$\boxed{B10.}\underline{\underline{3}}$ c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^k}{3^k} = 3 + 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2^2}{3^2} + \dots$

är en geometrisk serie med $a = 3$, $q = \frac{2}{3}$.

$|q| < 1 \Rightarrow$ den är konvergent med summan $\frac{3}{1 - \frac{2}{3}} = \underline{\underline{9}}$ $\boxed{2}$

d) $2-2^{1/2}+1-2^{-1/2}+\dots = 2+2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+$

$+2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+\dots$

Geom. serie med $a=2$, $q=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$|q|<1 \Rightarrow$ den kovergerar och summan är

$\frac{a}{1-q} = \frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

e) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^k-2^{-k}\right)$ är en summa av två geometriska serier

$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k = 2+2\cdot 2+2\cdot 2^2+\dots \quad (a=2,\ q=2>1)$

och $-\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\dots\right) \quad \left(a=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}<1\right)$.

Den första är divergent och den andra är konvergent, så hela serien är divergent.

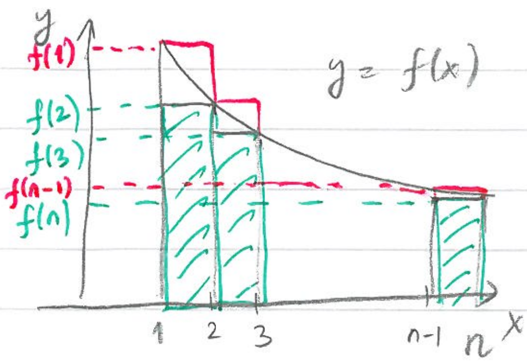
f) $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{4^k}+\frac{3}{(-4)^k}\right)$ är en summa av två geom. serier

$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3}{4^k} = \frac{3}{16}+\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{4^2}+\dots \quad \left| \begin{array}{l} a=\frac{3}{16} \\ q=\frac{1}{4} \end{array} \right|$

och $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3}{(-4)^k} = \frac{3}{16}+\frac{3}{16}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{16}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\dots \quad \left| \begin{array}{l} a=\frac{3}{16} \\ q=-\frac{1}{4} \end{array} \right|$

Båda är konvergenta $\Rightarrow$ serien är konvergent med summan

$$\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{3}{16}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}}+\frac{\frac{3}{16}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{4}+\frac{3}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$



Om $y = f(x)$ är strängt avtagande $\Rightarrow$

$$\int_1^n f(x)\,dx > \underbrace{\sum_{k=2}^{n} f(k)}_{\text{undersumman}}$$

och $$\int_1^n f(x)\,dx < \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} f(k)}_{\text{översumman}}$$

Det följer att

$$\boxed{f(n) + \int_1^n f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} f(k) < f(1) + \int_1^n f(x)\,dx.}$$

Kan användas för att uppskatta summor!

B10 | 4

Enligt formeln ovan, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ satisfierar $\left(f(x) = \frac{1}{x}\right)$

$$\underbrace{\frac{1}{n}}_{=f(n)} + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \underbrace{\frac{1}{1}}_{f(1)} + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{n} + \ln n}_{> \ln n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \ln n \Rightarrow$$

$$\ln n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \ln n$$

a) Det räcker att hitta n så $\ln n > 10$, i så fall $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln n > 10$. Vi söker n så $\ln n > 10 = \ln e^{10} \Rightarrow \underbrace{n > e^{10}}$ passar

4

b) Samma argument som i a) visar att $n > e^{1000}$ passar.

5 a) Enligt formeln på s 4, där $f(x) = \frac{1}{x^3}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{k^3}}_{=f(k)} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^3}\,dx \Leftrightarrow$$

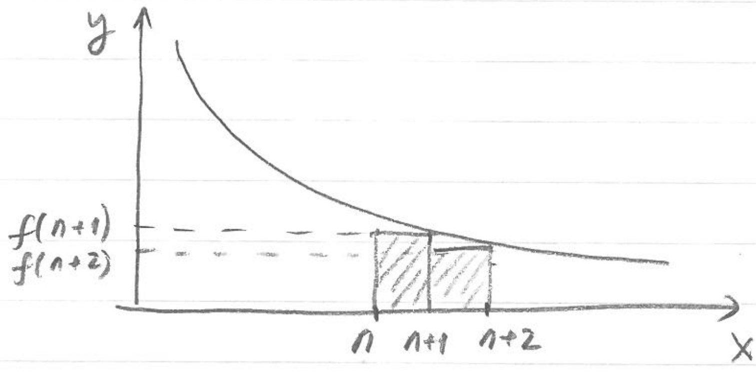
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < 1 + \left[\frac{1}{-2x^2}\right]_{x=1}^{x=n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}.$$

Om vi låter $n \to \infty \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \frac{3}{2}.$$

b) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$



Från grafen ser vi att

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \geq$$

$\geq$ {arean av undertrappan}

$$\geq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

För att göra $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ mindre än $\frac{1}{1000}$ räcker det nu att hitta n så $\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx < \frac{1}{1000}$, i så fall

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^3} < \frac{1}{1000} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \frac{1}{1000},$$

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_n^N \frac{dx}{x^3} = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{x=n}^{x=N} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{2N^2}+\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} \underset{?}{<} \frac{1}{1000}$$

om $1000 < 2n^2 \Rightarrow n > \sqrt{500}$ - passar.

Jämförelsesatser för serier $\sum_{k=1}^\infty a_k$ med $a_k \geq 0$

Jämf. sats 1 1) Om $\sum_{k=1}^\infty b_k$ - konv. och $0 \leq a_k \leq b_k$ för alla k $\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty a_k$ konv.

2) Om $\sum_{k=1}^\infty b_k$ diverg. och $0 \leq b_k \leq a_k$ för alla k $\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty a_k$ diverg.

Jämf. sats 2 Antag att $0 \leq a_k = \underset{\underset{0}{\wedge}}{b_k} \cdot c_k$ där $\lim_{k\to\infty} c_k \geq 0$ är ändligt och existerar. I så fall om

1) $\sum_{k=1}^\infty b_k$ är konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent

2) $\sum_{k=1}^\infty b_k$ är divergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty b_k$ divergent.

$\boxed{B10}$ **8** a) $\dfrac{k-1}{k^2+1} = \dfrac{k(1-\frac{1}{k})}{k^2(1+\frac{1}{k^2})} = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{(1-\frac{1}{k})}{1+\frac{1}{k^2}}$.

Här är $\lim_{k\to\infty}\dfrac{(1-\frac{1}{k})}{1+\frac{1}{k^2}} = 1$ och

$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ är divergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty \frac{k-1}{k^2+1}$ är divergent.

2a jämf. sats.

b) $$\frac{\sqrt{k^2+1}-k}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k^2(1+k^{-2})}-k}{\sqrt{k}} = \frac{k\left(\sqrt{1+k^{-2}}-1\right)}{\sqrt{k}} =$$

$$= \sqrt{k}\cdot\left(\cancel{1}+\frac{1}{2k^2}+O(k^{-3})-\cancel{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2k^{3/2}} + O\left(k^{-5/2}\right) = \frac{1}{2k^{3/2}}\left(1+O(k^{-1})\right)$$

Serien $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$ konvergerar då $3/2>1$, och

$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+O(k^{-1})\right)=\frac{1}{2}$ => serien

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k^2+1}-k}{\sqrt{k}}$ också är konvergent.

c) Vi vet att k växer mycket snabbare än $(\ln k)^{100}$ => det finns $m\in\mathbb{Z}$ s.a.

Om $k\geq m$ => $k\geq(\ln k)^{100}$ =>

$0\leq\frac{1}{k}\leq\frac{1}{(\ln k)^{100}}$, och $\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k}$ är divergent

=> $\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^{100}}$ också är divergent p g a 1a jämförelsesatsen,

och

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^{100}}$ blir ju också divergent.

d) Vi kan uppskatta för $k\geq 1$

$$\frac{1}{k!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}\leq\frac{1}{1\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}=\frac{1}{2^{k-1}},$$

där $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}$ är konvergent (geom. serie med $q=\frac{1}{2}$)

=> $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$ är konvergent p g a 1a jämf. satsen.

$$(xe^{-x^2})' = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} =$$
$$= (1-2x^2)e^{-x^2} < 0 \quad \text{för } x > 1.$$

Extra

$\boxed{B10}$ **6** $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$ kan uppskattas med hjälp av formeln på s. 4! $\left(f(x) = xe^{-x^2} \downarrow\right)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2} \leq 1 \cdot e^{-1} + \int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx =$$

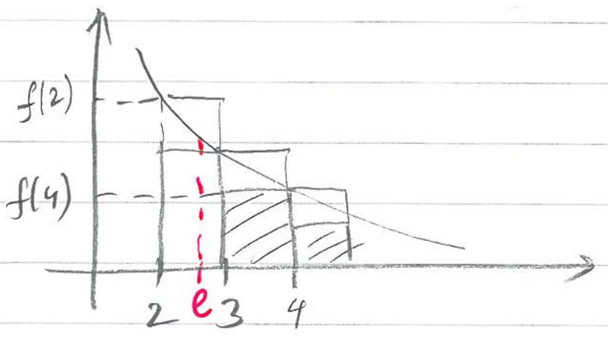
$$= e^{-1} + \lim_{N\to\infty} \int_1^N \cancel{x}e^{-x^2}\,dx$$

$$= e^{-1} + \lim_{N\to\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^N =$$

$$= e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{3}{2}e^{-1}.$$

V.S.V.

$\boxed{B.10}$ **7**



Vi ser att
$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}} \leq \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$$
vilket konvergerar då $\alpha > 1$.

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}} = \frac{1}{2(\ln 2)^{\alpha}} + \frac{1}{3(\ln 3)^{\alpha}} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}}$$

också är konvergent.

Å andra sidan, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}} \geq \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$ vilket är divergent då $\alpha \leq 1 \Rightarrow$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}}$ också är divergent.