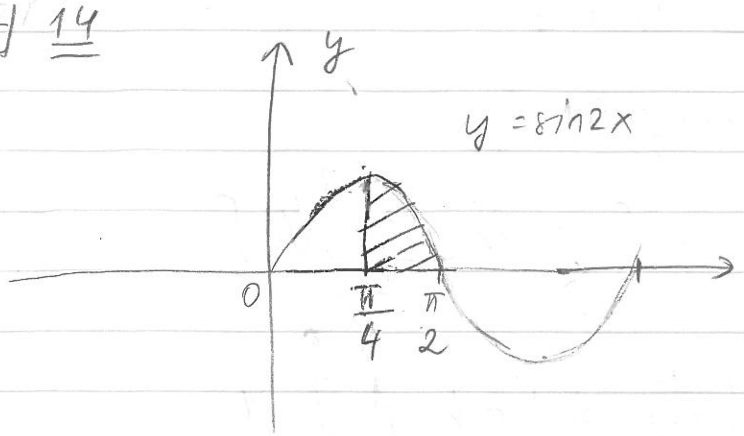
Lektion 2

$\boxed{B7}$ 14



a) När vi roterar kring x-axeln området

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \sin 2x\}$$

får vi volymen (s. 323)

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^2\,dx =$$

$$= \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_{x=\frac{\pi}{4}}^{x=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - 0 = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{8}}}$$

b) När vi roterar samma område kring y-axeln får vi

$$V = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{\sin 2x}\,dx =$$

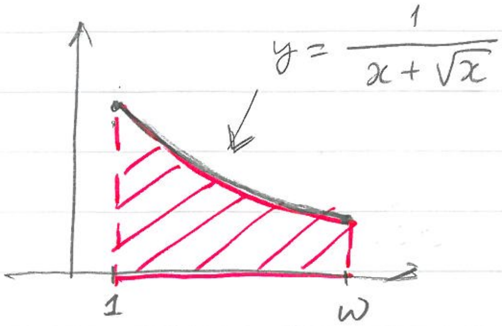
$$= \cancel{2}\pi\left(\left[-\frac{x\cos 2x}{\cancel{2}}\right]_{x=\frac{\pi}{4}}^{x=\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\cancel{2}}\,dx\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \pi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2 - \pi}{2}.$$

15

$y = \frac{1}{x+\sqrt{x}}$ – avtagande



När

$D = \{1 \le x \le \omega,\ 0 \le y \le \frac{1}{x+\sqrt{x}}\}$

roteras kring x-axeln:

$$V = \pi \int_1^{\omega} \frac{1}{(x+\sqrt{x})^2}\,dx = \otimes$$

$$\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x})^2} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt \end{array}\right] = \int \frac{2t\,dt}{(t^2+t)^2} =$$

$$= \int \frac{2\cancel{t}\,dt}{t^{\cancel{2}}(t+1)^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2} \\ \text{Handpåläggning: } A=1,\ C=-1, \text{ sätt} \\ t=1:\ \frac{1}{4} = 1 + \frac{B}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow B = -1 \end{array}\right]$$

$$= 2\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\right) dt =$$

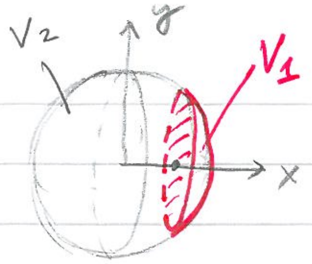
$$= 2\left[\ln t - \ln(t+1) + \frac{1}{t+1}\right] = 2\ln\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow$$

$$\otimes = 2\pi\left[\ln\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega}+1} - \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\omega}+1} - \frac{1}{2}\right]$$

$$\lim_{\omega\to\infty} V(\omega) = \lim_{\omega\to\infty} 2\pi\left[\ln\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{\omega}}}}_{\to 1} - \ln\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\omega}+1}}_{\to 0} - \frac{1}{2}\right]$$

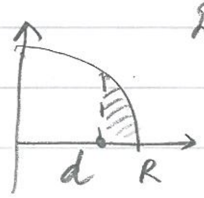
$$= \pi(2\ln 2 - 1)$$

16



V_1 uppstår då man roterar området

$$D = \{ d \le x \le R;\ 0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2} \}$$



ett varv runt x-axeln $\Rightarrow$

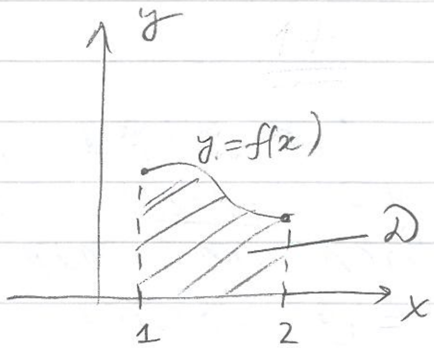
$$V_1 = \pi \int_d^R (R^2 - x^2)\,dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=d}^{x=R} =$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - R^2 d + \frac{d^3}{3} \right) = \frac{\pi}{3}\left(2R^3 - 3R^2 d + d^3\right)$$

$$V_2 = \langle \text{klotets volym} \rangle - V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 - V_1 =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(2R^3 + 3R^2 d - d^3\right)$$

17



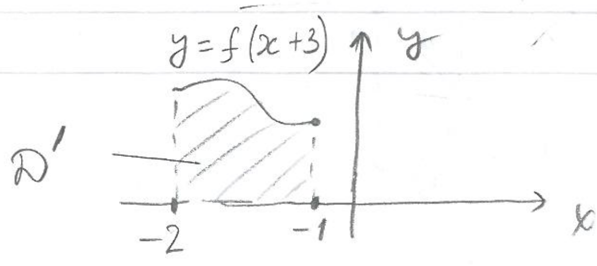
a) Roterar D kring x-axeln:

$$V = \pi \int_1^2 (f(x))^2\,dx$$

b) Roterar D kring y-axeln:

$$V = 2\pi \int_1^2 x f(x)\,dx$$

c) Denna volym blir samma som den vi får när vi flyttar D 3 enheter åt vänster och sedan roterar kring y-axeln: D' på bilden

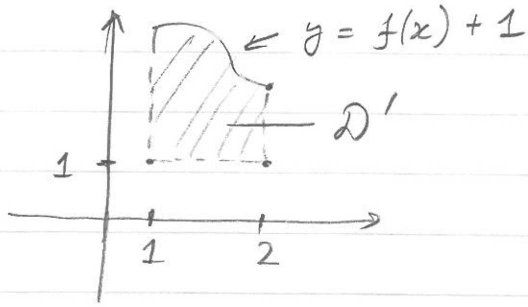


$$\Rightarrow V = \left| 2\pi \int_{-2}^{-1} x f(x+3)\,dx \right| =$$

$$= \left[\begin{matrix} t = x+3 \\ dt = dx \end{matrix} \quad [-2; -1] \to [1; 2] \right] =$$

$$= \left| 2\pi \int_1^2 \overbrace{(t-3)}^{<0} \overbrace{f(t)}^{>0}\,dt \right| = 2\pi \int_1^2 (3-x) f(x)\,dx$$

d) Vi får samma volym om vi flyttar $\mathcal{D}$ 1 enhet uppåt och sedan roterar kring x-axeln, dvs vi roterar $\mathcal{D}'$:



Vi beräknar först rotationsvolym som fås då vi roterar

$\{1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq f(x)+1\}$:

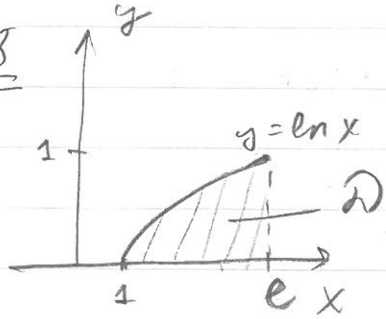
$$V_1 = \pi \int_1^2 (f(x)+1)^2 dx,$$

Och drar av rotationsvolym som fås då vi roterar $\{1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$, vilket är

$$V_2 = \{\text{vol. av cylinder: } r = 1,\ h = 1\} = \pi.$$

Slutligen, $V = V_1 - V_2 = \pi \left[\int_1^2 (f(x)+1)^2 dx - 1 \right].$

<u>18</u>



$\mathcal{D}$ roteras ett varv kring x-axeln:

a) $V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx$

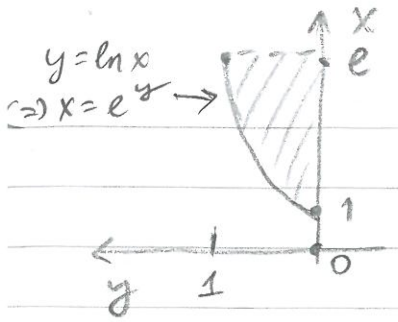
Detta kan beräknas: $\int (\ln x)^2 dx = \begin{bmatrix} \ln x = t \\ x = e^t,\ dx = e^t dt \end{bmatrix} =$

$= \int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2\int t e^t dt = t^2 e^t - 2\left(te^t - \int e^t dt\right)$

$= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x \Rightarrow$

$V = \pi(e - \cancel{2e} + \cancel{2e} - 2) = \pi(e-2)$

b) Vi kan också tänka på så sätt!



Området $\{0 \le y \le 1,\ e^y \le x \le e\}$ roteras kring x axeln. Detta ger

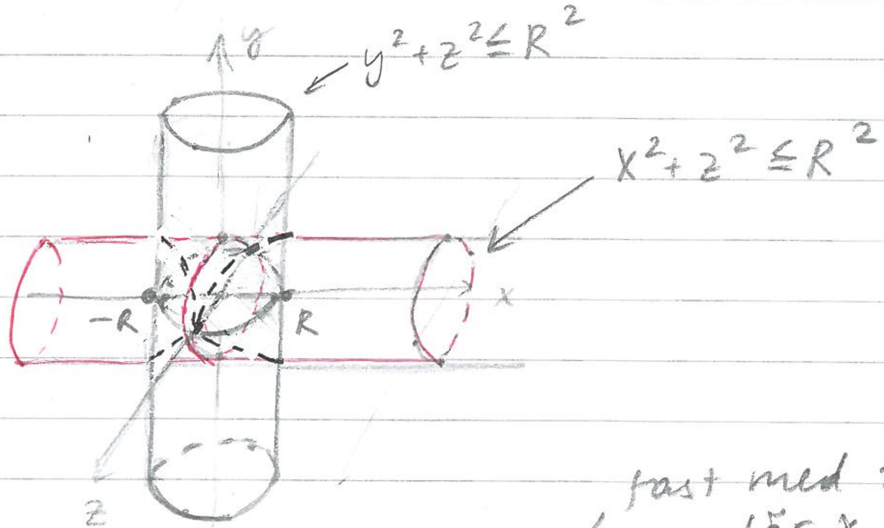
$$V = \underbrace{2\pi \int_0^1 y \cdot e \, dy}_{\substack{\text{Volym för rot. av} \\ D = \{0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le e\}}} - \underbrace{2\pi \int_0^1 y \cdot e^y \, dy}_{\substack{\text{Volym för rot. av} \\ D = \{0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le e^y\}}}$$

$$= 2\pi \int_0^1 y(e - e^y)\, dy.$$

se s. 323:
Byt $x \leftrightarrow y$
$y \leftrightarrow x$
⟹ om
$D = \{(x,y) : a \le y \le b,\ 0 \le x \le f(y)\}$
roteras kring
x-axeln ⟹
$V = 2\pi \int_a^b y f(y)\, dy$

Extra

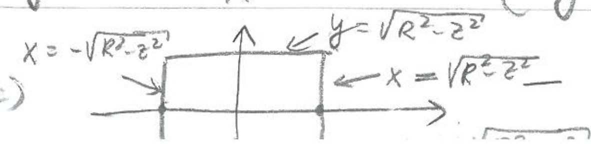
$\boxed{\text{B7}}$ 42



fast med z istället för x

Vi använder formeln på s. 321. Kroppen satisfierar $-R \le z \le R$. Låt oss hitta tvärsnittarean $A(z)$: Om z är "fixed", så beskrivs tvärsnittet av systemet

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \le R^2 \\ y^2 + z^2 \le R^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 \le R^2 - z^2 \\ y^2 \le R^2 - z^2 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| \le \sqrt{R^2 - z^2} \\ |y| \le \sqrt{R^2 - z^2} \end{cases}$$

⟺ 

bilden i planet z = konst

$$A(z) = \left(2\sqrt{R^2 - z^2}\right)^2 = 4(R^2 - z^2).$$

Då är volymen $V = \int_{-R}^{R} A(z)\,dz = 4\int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)\,dz$

$$= 4\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{z=-R}^{z=R} =$$

$$= 4\left[2R^3 - \frac{2R^3}{3}\right] = \frac{16R^3}{3}.$$