Lektion 20

B10 **9** I den här uppgiften ska vi använda 2a jämförelsesatsen för serier (se Lektion 19)

Given en serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ($a_k \geq 0$) ska vi försöka skriva

$$a_k = c_k \cdot b_k \quad \text{där} \quad \lim_{k\to\infty} c_k \neq 0 \text{ existerar och ändligt,}$$

och $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ är sådan att det är uppenbart om den är konvergent eller divergent.

I så fall $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverg.

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ divergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverg.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k^2}$. Eftersom $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, kan vi skriva ($\sin \frac{1}{k^2} \geq 0$ då $k \geq 1$)

$$\sin \frac{1}{k^2} = \underbrace{\frac{\sin \frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}}}_{\to 1 \text{ då } k\to\infty} \cdot \frac{1}{k^2}, \text{ och } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ är konverg.}$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k^2}$ är konvergent med.

d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{k-1}$. Vi bryter ut dominanta termer!

$$\frac{\sqrt{k(1+k^{-1})}}{k(1-k^{-1})} = \frac{\sqrt{k}\sqrt{1+k^{-1}}}{k(1-k^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \overbrace{\frac{\sqrt{1+k^{-1}}}{1-k^{-1}}}^{\to 1 \text{ då } k\to\infty}, \text{ och}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ är divergent $\Rightarrow$ serien är divergent

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{5^k-4^k}$. Vi bryter ut dominanta termer: i täljaren 3^k växer fortare än 2^k, i nämnaren 5^k växer fortare än 4^k.

$$\frac{2^k+3^k}{5^k-4^k} = \frac{3^k\left(\frac{2^k}{3^k}+1\right)}{5^k\left(1-\frac{4^k}{5^k}\right)} = \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k+1}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^k}$$

$\rightarrow 1$ då $k \rightarrow \infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \dots$ – geometrisk serie med $q = \frac{3}{5} < 1 \Rightarrow$ konvergent.

Då är serien konvergent.

f) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{e} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 1$

Vi kommer ihåg en standart gränsvärde

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (det går också bra att Maclaurin-utveckla $e^{1/k}$):

$e^{\frac{1}{k}} - 1 = \frac{e^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{k}$, och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent.

$\rightarrow 1$ då $k \rightarrow \infty$

h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+1)-\ln k}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln\frac{k+1}{k}}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\sqrt{k+1}}$.

Vi använder $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow$

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\sqrt{k+1}} = \frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1}} =$$

$$= \frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{k\sqrt{k}\cdot\sqrt{1+k^{-1}}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k^{-1}}}}_{\to 1 \text{ då } k\to\infty} \cdot \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ är konvergent $\Rightarrow$

serien är konvergent.

$\boxed{\text{B 10}}$ 12a Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ är inte absolutkonvergent, eftersom

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ är divergent } \left(\tfrac{1}{2} < 1\right).$$

$\boxed{\text{B10}}$ 13 Både serierna i a) och b) är alternerande (dvs a_k är negativ för udda k och positiv för jämna k, eller tvärtom).

Det går att använda Leibniz kriterium som säger att om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är alternerande och

a) $a_k \to 0$ då $k\to\infty$ b) $|a_k| \geq |a_{k+1}|$ för $k=1,2,3\ldots$

$\Rightarrow$ den är konvergent.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k+1} = 0 \underbrace{- \frac{1}{2}}_{<0} \underbrace{+ \frac{\sqrt{2}}{3}}_{>0} \underbrace{- \frac{\sqrt{3}}{4}}_{<0} \underbrace{+ \frac{\sqrt{4}}{5}}_{>0} - \dots$

är en alternerande serie. Testar $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$!

$\lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{k} \cdot \frac{(-1)^k}{1+k^{-1}} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{(-1)^k}{1+k^{-1}}}_{\text{begr.}} = 0$

Testar nu $|a_k| > |a_{k+1}|$!

$\frac{\sqrt{k}}{k+1} \overset{?}{>} \frac{\sqrt{k+1}}{k+2} \iff \frac{k}{(k+1)^2} \overset{?}{>} \frac{k+1}{(k+2)^2} \iff$

$k(k+2)^2 \overset{?}{>} (k+1)^3 \iff k(k^2+4k+4) \overset{?}{>} k^3+3k^2+3k+1$

$\iff \cancel{k^3} + 4k^2 + 4k \overset{?}{>} \cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1$

$k^2 + k \overset{?}{>} 1$ – sant då $k > 1$.

Pga Leibnitz kriterium är serien konvergent.

(OBS! Man kan lätt kontrolera att den inte är absolutkonvergent m h a 2a jämf. satsen).

b) Man kan använda Leibnitz kriterium som i a).

Det går också bra att använda Cauchys rotkriterium:

t om absolut konverg.!

$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = Q \in [0, \infty]$ (kan vara ∞) $\Rightarrow \begin{cases} Q<1: \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ – konverg.} \\ Q>1: \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ – diverg.} \end{cases}$

inklusiv $Q = \infty$

I vårt fall

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{k^2}{(-2)^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^2}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\sqrt[k]{k}\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{\left(\underbrace{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}}_{=1,\ \text{standart gränsvärde}}\right)^2}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{serien är absolut konvergent.}$$

Vi kan också använda d'Alemberts kvotkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \underbrace{Q}_{\text{kan vara } \infty} \in [0,\infty] \Rightarrow \begin{cases} Q < 1: \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ är absolut konverg.} \\ \underbrace{Q > 1}_{\text{inklusiv } Q=\infty}: \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ är divergent.} \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^2}{(+2)^{k+1}}}{\frac{k^2}{(+2)^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{(+2)^{k+1}} \cdot \frac{\cancel{(+2)^k}}{k^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{serien är konvergent.}$$

$\boxed{B10}$ $\underline{\underline{14}}$ a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \tan \frac{1}{k}$ är inte absolutkonverg. $\quad \frac{1}{k} \in (0;1] \Rightarrow \tan\frac{1}{k} > 0$

(kan testas med hjälp av 2a jämförelsesatsen då

$$|a_k| = \tan\frac{1}{k} = \frac{\sin\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos\frac{1}{k}}}_{\to 1 \text{ då } k\to\infty} \cdot \frac{1}{k}$$

och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent.

Vi använder därför Leibnitz kriterium:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \tan\frac{1}{k} = -\tan\frac{1}{1} + \tan\frac{1}{2} - \tan\frac{1}{3} + \tan\frac{1}{4} - \dots$$

är alternerande.

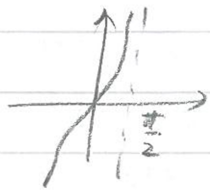
$\lim_{k\to\infty} |a_k| = \tan\frac{1}{k} = 0$ — ok!

Testar $|a_k| > |a_{k+1}|$ för $k = 1, 2, \dots$:

$\tan\frac{1}{k} > \tan\frac{1}{k+1}$ för $k = 1, 2, \dots$ — sant

då $\frac{1}{k} > \frac{1}{k+1}$ och tan är växande

då $x \in (0; 1]$.



$\Rightarrow$ Serien är konvergent.

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k}{1+k^2}$, cos k byter tecken.

Studerar absolutkonvergensen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\cos k}{1+k^2}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\cos k|}{1+k^2}.$$

Eftersom

$$0 \le \frac{|\cos k|}{1+k^2} \le \frac{1}{k^2} \quad \text{för } k \ge 1$$

och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent $\Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos k|}{1+k^2}$ är konvergent pga 1a jämf. satsen.

Vi ser att $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\cos k|}{1+k^2}$ är konvergent $\Rightarrow$

vår serie är absolutkonvergent.

B10.15 En följd av Leibniz kriterium för alternerande serier är att summan $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kan approximeras med en delsumma $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ och felet kan uppskattas som

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$$

a) Vi vet att

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq |a_{n+1}| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \right| = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Detta är mindre än eller lika med $\frac{1}{100}$ då $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow$ $100 \leq (n+1)^2$ eller $n \geq 9$.

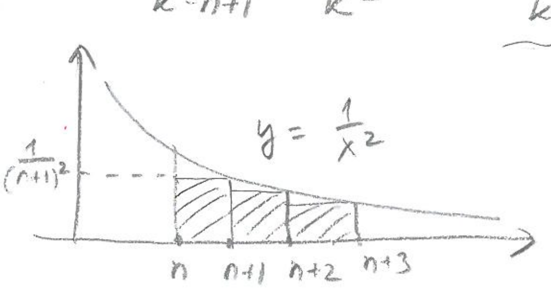
b) OBS! Denna serie är inte alternerande! Dvs metoden som vi använde i a) fungerar inte. Vi resonerar som i **B10** 5b (se Lektion 19) istället.

Observera att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$ är absolut konvergent eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin k}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k^2}$ är konvergent p g a 1a jämf. satsen ($0 \leq \frac{|\sin k|}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent)

I så fall

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \overset{\text{sats 10.8}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k^2} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\text{undersumma}} \leq \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-x^{-1} \right]_{x=n}^{x\to\infty}$$



$$= 0 + \frac{1}{n}$$

Detta är $\leq \frac{1}{100}$ då $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow n \geq 100$

Extra

$\boxed{B10}$ 9

g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} = 1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \dots =$

Vi kan uppskatta a_k så här (för $k \geq 3$):

$$\frac{3!}{3^3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3^2} \cdot 1 = \frac{2}{3^2}$$

$$\frac{4!}{4^4} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 4} \cdot \underbrace{\frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4}}_{\leq 1} \leq \frac{2}{4^2} \cdot 1 = \frac{2}{4^2}$$

$$\frac{5!}{5^5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 5} \cdot \underbrace{\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5}}_{\leq 1} \leq \frac{2}{5^2} \cdot 1 = \frac{2}{5^2}$$

$$\dots$$

$$\frac{k!}{k^k} = \frac{1 \cdot 2}{k \cdot k} \cdot \underbrace{\frac{3 \cdot \ldots \cdot k}{k \cdot \ldots \cdot k}}_{\leq 1} \leq \frac{2}{k^2} \dots$$

Eftersom $0 \leq \frac{k!}{k^k} \leq \frac{2}{k^2}$ för $k \geq 3$ och $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{k^2}$ konvergerar $\Rightarrow \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ konvergerar också $\Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ också är konvergent.

$\boxed{B10}$ 10 a) Först noterar vi att

$\lim_{k \to \infty} \ln(1 + k^{-\alpha}) \neq 0$ då $\alpha \leq 0$

$\Rightarrow$ för $\alpha \leq 0$ divergerar serien. Vi kollar nu på $\alpha > 0$:

$\boxed{\alpha > 0}$ $\ln(1+k^{-\alpha})$ kan skrivas som

$\dfrac{\ln(1+k^{-\alpha})}{k^{-\alpha}} \cdot k^{-\alpha} \Rightarrow$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ är $\begin{cases} \text{konverg. } \alpha > 1 \\ \text{diverg. } \alpha \leq 1 \end{cases}$

$\to 1$ då $k \to \infty \Rightarrow$ p.g.a. 2a jämförelsesatsen konvergerar $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+k^{-\alpha})$ då $\alpha > 1$.

Svar: $\alpha > 1$

b) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sqrt{k}}{k+1}\right)^\alpha = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sqrt{k}}{k(1+k^{-1})}\right)^\alpha =$

$= \displaystyle\lim_{k\to\infty} \Bigg(\frac{1}{\sqrt{k}\underbrace{(1+k^{-1})}_{\to 1}}\Bigg)^\alpha = \begin{cases} 1 & \alpha = 0 \\ \infty & \alpha < 0 \\ 0 & \alpha > 0 \end{cases}$

Så $\alpha \leq 0 \Rightarrow$ serien är divergent.

Betraktar $\alpha > 0$: vi har redan sett att

$\displaystyle\left(\frac{\sqrt{k}}{k+1}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{k}(1+k^{-1})}\right)^\alpha = \frac{1}{k^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+k^{-1})^\alpha}}_{\to 1 \text{ då } k \to \infty}$

Och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha/2}}$ konvergerar då $\frac{\alpha}{2} > 1 \Rightarrow \alpha > 2$, och är divergent då $\frac{\alpha}{2} \leq 1 \Rightarrow \alpha \leq 1$.

Serien är alltså konvergent för $\alpha > 2$.

Svar: $\alpha > 2$

$\boxed{B10}$ 14 c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{3/2}} + \frac{(-1)^k}{k^{1/2}}\right)$ – ska undersökas.

Observera att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ är konvergent, och

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{1/2}}$ är också konvergent p g a Leibnitz kriterium, då $\lim_{k \to \infty} \frac{(-1)^k}{k^{1/2}} = 0$ och

$$|a_k| = \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k+1}} = |a_{k+1}|.$$

Det följer att $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{3/2}} + \frac{(-1)^k}{k^{1/2}} \right)$ också är konvergent.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k} \right)$ är divergent, eftersom

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ är konvergent (se c)) och

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent.