Lektion 21

$\boxed{B10}$

20 Vi använder Cauchys rotkriterium som säger att om $\sqrt[k]{|a_k|} \to Q$ då $k \to \infty$ $(Q \in [0; \infty])$

då $\begin{cases} Q > 1 \Rightarrow \text{serien divergent} \quad (\text{t om } Q = \infty) \\ Q < 1 \Rightarrow \text{serien konvergent} \\ Q = 1 \Rightarrow \text{ytterligare undersökning krävs.} \end{cases}$

a) $$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|x|^k}{2^k+1}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|x|^k}{2^k(1+2^{-k})}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt[k]{1+\underbrace{2^{-k}}_{\to 0}}}}_{\to 1} = \frac{|x|}{2}$$

Nu säger rotkriterium att:

1) Serien blir divergent om $\frac{|x|}{2} > 1 \Leftrightarrow |x| > 2$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \end{array}\right.$

2) Serien blir konvergent om $\frac{|x|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$
$\Leftrightarrow \underline{-2 < x < 2}$

3) $\frac{|x|}{2} = 1 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$ ska undersökas separat.

Om $x = 2 \Rightarrow$ serien blir $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^k+1}$.

Men i så fall $\lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{2^k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k \cdot 1}{2^k(1+2^{-k})} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ serien är divergent.

Om $x = -2 \Rightarrow$ serien blir $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{2^k+1}$, och

$\lim_{k\to\infty} \frac{(-2)^k}{2^k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{2^k}(-1)^k}{\cancel{2^k}(1+2^{-k})}$ – existerar inte.

(För udda $k=2n$ $\quad \frac{(-1)^{2n}}{1+2^{-2n}} = \frac{1}{1+2^{-2n}} \to 1$

för jämna $k=2n+1$ $\quad \frac{(-1)^{2n+1}}{1+2^{-(2n+1)}} = \frac{-1}{1+2^{-(2n+1)}} \to -1$

$\Rightarrow$ något gemensamt gränsvärdet finns inte).

Serien är alltså konvergent endast för $-2<x<2$.

__Svar__: $-2<x<2$.

b) $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{x^{2k}}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt[k]{k}} = x^2$

$\to 1$ - standartgränsvärdet

1) $x^2>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right.$ serien är divergent

2) $x^2<1 \Leftrightarrow -1<x<1$ serien är konvergent.

3) $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$ ska undersökas vidare.

I så fall blir serien $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$

vilket är divergent.

__Svar__: $-1<x<1$.

__10.21__

Vi kan också använda d'Alemberts kvotkriterium: om $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \to Q$ då $k\to\infty \Rightarrow$ $Q \in [0;\infty]$

$\left\{\begin{array}{ll} Q>1 & \text{serien divergent} \quad (\text{inkl. } Q=\infty) \\ Q<1 & \text{serien abs. konvergent} \\ Q=1 & \text{ytterliggare undersökning behövs.} \end{array}\right.$

a) Använder kvotkriterium!

$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{(k+1)|x|^{k+1}}{k+2}}{\frac{k|x|^k}{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}|x| =$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+2k+1}{k^2+2k}|x| = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{k^2(1+2k^{-1}+k^{-2})}{k^2(1+2k^{-1})}}_{\to 1}|x| = |x|.$$

1) $|x| > 1 \iff \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right.$ – serien divergent

2) $|x|<1 \iff -1<x<1$ – serien konvergent.

3) $|x|=1 \iff x=\pm 1$ – undersöker separat

Om $x=1 \Rightarrow$ serien blir $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}$. Eftersom

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{\cancel{k}\,1}{\cancel{k}(1+k^{-1})} = 1 \neq 0$$

den är divergent.

Om $x=-1 \Rightarrow$ serien blir $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(-1)^k}{k+1}$. Eftersom

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k(-1)^k}{k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{\cancel{k}(-1)^k}{\cancel{k}(1+k^{-1})} \neq 0$$

den är divergent.

Svar: $-1<x<1$.

b) Använder kvotkriterium:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!|x|^{k+1}}{k!|x|^k} = \lim_{k\to\infty}(k+1)|x|$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{om } x\neq 0 \\ 0 & \text{om } x=0. \end{cases}$$

Då ser vi att serien är konvergent om $x=0$, och divergent om $x\neq 0$.

Svar: $x=0$

OBS! $e^{\frac{1}{k}} > 1$ för alla $k \geq 1$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{e} - 1) x^k$ – använder rotkriterium.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\sqrt[k]{e} - 1}\ |x| =$$

$$= |x| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\underbrace{\frac{e^{1/k} - 1}{1/k}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{k}}$$

$$= |x| \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sqrt[k]{\frac{e^{1/k}-1}{1/k}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)}_{\to 1} = |x|$$

1) $|x| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$ serien är divergent

2) $|x| < 1$ – serien är konvergent, för $-1 < x < 1$.

3) $x = 1 \Rightarrow$ serien blir $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{e} - 1)$.

Vi kan skriva

$$\sqrt[k]{e} - 1 = \underbrace{\frac{\sqrt[k]{e} - 1}{\frac{1}{k}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{k}, \text{ och}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{e} - 1)$

är divergent pga 2a jämf.satsen.

$x = -1 \Rightarrow$ serien blir $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{e} - 1)(-1)^k$ – alternerande.

Leibnitz kriterium: i) $\lim_{k\to\infty} (\underset{\downarrow 1}{\sqrt[k]{e}} - 1)(-1)^k = 0$ – ok!

ii) $|a_{k+1}| \overset{?}{<} |a_k| \Leftrightarrow e^{\frac{1}{k+1}} \cancel{-1} \overset{?}{<} e^{\frac{1}{k}} \cancel{-1} \Leftrightarrow$

$e^k < e^{k+1}$ – sant!

$\Rightarrow$ serien konvergerar.

Svar: $-1 \le x < 1$

d) Använder rotkriterium: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} =$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|x|^{3k}}{3^k + k^3}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^3}{\sqrt[k]{3^k\left(1 + \frac{k^3}{3^k}\right)}} = \frac{|x|^3}{3}$$

3^k växer snabbare

$\frac{k^3}{3^k} \to 0$

1) $\frac{|x|^3}{3} < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow -\sqrt[3]{3} < x < \sqrt[3]{3}$ – konverg.

2) $\frac{|x|^3}{3} > 1 \Leftrightarrow |x| > \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \sqrt[3]{3} \\ x < -\sqrt[3]{3} \end{array}\right.$ – divergent.

3) $\frac{|x|^3}{3} = 1$ – undersöker separat ($x = \pm\sqrt[3]{3}$)

(i) $x = \sqrt[3]{3}$ ger serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{3^k + k^3} \text{ där } \lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{3^k + k^3} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{3^k}\,1}{\cancel{3^k}\left(1 + \frac{k^3}{3^k}\right)}$$

$\frac{k^3}{3^k} \to 0$

$= 1 \neq 0$

vilket är divergent.

(ii) $x = -\sqrt[3]{3}$ ger serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^k}{3^k + k^3},$$ vilket är också divergent av samma anledning.

Svar: $-\sqrt[3]{3} < x < \sqrt[3]{3}$.

e) Använder kvotkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1-1}{|x|^{k+1}}}{\frac{k-1}{|x|^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{|x|} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(1-k^{-1})} \cdot \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|}$$

1) $\frac{1}{|x|} < 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array}\right. \Rightarrow$ konvergent

2) $\frac{1}{|x|} > 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow$ divergent

3) $\frac{1}{|x|} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ ska undersökas separat.

(i) $x = 1$: serien blir $\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \Rightarrow$ divergent,
då $\lim_{k \to \infty} (k-1) \neq 0$

(ii) $x = -1$ serien blir $\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)(-1)^k$.

$\lim_{k \to \infty} (k-1)(-1)^k \neq 0 \Rightarrow$ divergent

<u>Svar:</u> $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

f) Använder kvotkriterium:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{(k+1)|x+2|^{\cancel{k+1}}}{[(k+1)^2+1]} \cdot \frac{k^2+1}{k\,\cancel{|x+2|^k}}$$

$$= \frac{(k+1)(k^2+1)}{k(k^2+2k+2)} |x+2| =$$

$$= \frac{k^3+k^2+k+1}{k^3+2k^2+2k} \cdot |x+2| =$$

$$= \underbrace{\frac{\cancel{k^3}(1+k^{-1}+k^{-2}+k^{-3})}{\cancel{k^3}(1+2k^{-1}+2k^{-2})}}_{\to 1} |x+2| \to |x+2|$$

1) Serien konvergerar om $|x+2| < 1 \Leftrightarrow$
$-1 < x+2 < 1 \Leftrightarrow -3 < x < -1$

2) Serien är divergent om $|x+2| > 1 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x+2>1 \\ x+2<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} x>-1 \\ x<-3 \end{array}.$$

3) i) Om $x=-1 \Rightarrow$ serien är $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k^2+1}$.

$$\frac{k}{k^2+1}=\frac{k}{k^2(1+k^{-2})}=\frac{1}{k}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+k^{-2}}}_{\to 1} \quad \& \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \text{ - diverg.}$$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k^2+1}$ är divergent pga 2a jämf. satsen.

ii) Om $x=-3$, serien är $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(-1)^k}{k^2+1}$ - alternerande.

Leibnitz kriterium!

$$\to \lim_{k\to\infty}\frac{k(-1)^k}{k^2+1}=\lim_{k\to\infty}\underbrace{\frac{\cancel{k}}{k^{\cancel{2}}}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{(-1)^k}{1+k^{-2}}}_{\to 1}=0 \quad \text{Ok!}$$

$$\to |a_k| \overset{?}{>} |a_{k+1}| \Leftrightarrow$$

$$\frac{k}{k^2+1} \overset{?}{>} \frac{k+1}{(k+1)^2+1} \Leftrightarrow$$

$$k(k^2+2k+2) \overset{?}{>} (k+1)(k^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{k^3}+2k^2+2k \overset{?}{>} \cancel{k^3}+k^2+k+1 \Leftrightarrow$$

$$k^2+k-1 \underset{?}{>} 0$$ - sant för alla $k>1$ - ok!

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(-1)^k}{k^2+1} \text{ är konvergent.}$$

Svar: $-3 \le x < 1$.

g) Använder kvotkriterium:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\frac{(k+1)!}{(2(k+1))!}|x|^{k+1}\cdot\frac{(2k)!}{k!\,|x|^k}=$$

$$=\frac{(k+1)\,|x|}{(2k+1)(2k+2)}=\underbrace{\frac{\cancel{k}}{k^{\cancel{2}}}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{(1+k^{-1})\,|x|}{\left(2+\frac{1}{k}\right)\left(2+\frac{2}{k}\right)}}_{\to 1}=0$$

Detta betyder att serien konvergerar för alla x.

<u>Svar!</u> alla $x \in \mathbb{R}$

h) Använder kvotkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1+(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} |x|^{\cancel{k+1}}}{\frac{k+(-1)^k}{k^2} \cancel{|x|^k}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1+(-1)^{k+1})k^2}{(k+1)^2(k+(-1)^k)} |x| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k^3}(1+k^{-1}+(-1)^{k+1}k^{-1})|x|}{\cancel{k^3}(1+k^{-1})^2(1+(-1)^k k^{-1})} = |x|$$

1) serien konvergerar då $|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$

2) serien är divergent då $|x|>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right.$

3) Om $x=1 \Rightarrow$ serien är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+(-1)^k}{k^2}$, där $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent, och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ är absolut konvergent. Hela serien är alltså divergent.

Om $x=-1 \Rightarrow$ serien är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+(-1)^k}{k^2}(-1)^k =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{k^2}\right)$. Här är

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergent p g a Leibnitz kriterium ($\lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 0$ och $|a_k| = \frac{1}{k} > |a_{k+1}| = \frac{1}{k+1}$) och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konverg.

Det betyder att serien är konvergent då $x = -1$.

Svar: $-1 \leq x < 1$.

Extra

$\boxed{B10}$ 26 Satsen 10.16 säger att i fall

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ är en potensserie med konvergensradie $R > 0 \Rightarrow$

$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$ har samma konvergensradie $R > 0$.

$\Rightarrow$ vi kan tillämpa samma sats till $f'(x)$, vilket ger

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2},$$ med

samma konvergensradie $R > 0$ ... osv

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) c_k x^{k-n}.$$

Också har konvergensradien $R > 0$.

Låt $x = 0 \Rightarrow f^{(n)}(0) = \Big/$ endast $k = n$ term överlever $\Big/ =$

$= n(n-1) \cdots \cdot 1 \cdot c_n = n! \, c_n$.

Det följer att $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow$

potensseriens koefficienter c_n bestäms entydigt av seriens summa $f(x)$.