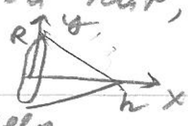
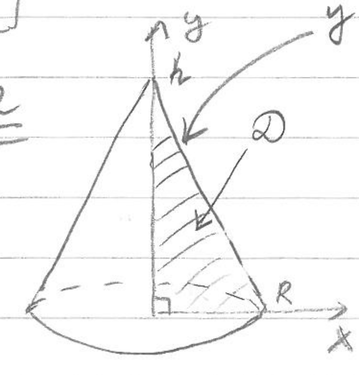
Lektion 3

OBS! Man kan också placera konen så här, och använda formeln för rotationen kring x-axeln.



B7

$y = h - \frac{h}{R}\cdot x$



12

Man får denna kon genom att rotera området D runt y-axeln. Observera att

$$D = \{0 \le x \le R;\ 0 \le y \le h - \frac{h}{R}\cdot x\}$$

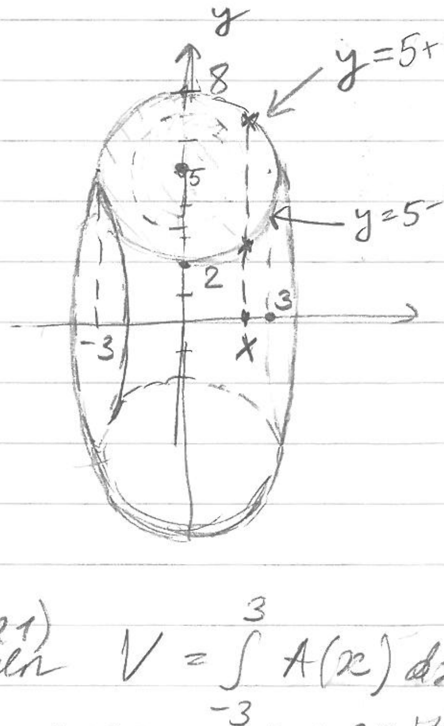
$$\Rightarrow V = 2\pi \int_0^R x\left(h - \frac{h}{R}x\right)dx =$$

$$= 2\pi h\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3R}\right]_0^R =$$

$$= 2\pi h\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3}\right) = 2\pi h \cdot \frac{R^2}{6} = \frac{1}{3}\pi h R^2.$$

19

$x^2 + (y-5)^2 \le 3^2$ är en cirkelskiva av radien 3 med centrum i $(0;5)$.

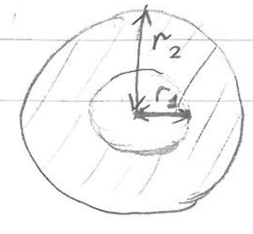


$y = 5 + \sqrt{9 - x^2}$

$y = 5 - \sqrt{9 - x^2}$

Roterar vi den runt x-axeln, får vi en ring.

Metod 1 Använder formeln (s. 321) $V = \int_{-3}^{3} A(x)\,dx$, där $A(x)$ är arean av snittet som är vinkelrätt mot x-axeln. Man ser att denna snitet är en ring: inre radien $r_1 = 5 - \sqrt{9 - x^2}$ yttre radien $r_2 = 5 + \sqrt{9 - x^2}$

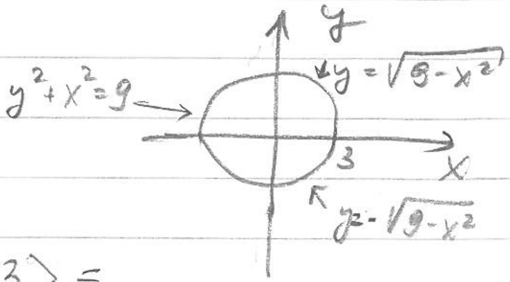


$$\Rightarrow A(x) = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = 20\pi\sqrt{9 - x^2}$$

kan behandlas med variabelsubst. $x=3\sin t$, eller part. integration eller ...

Volymen är alltså $V = 20\pi\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx =$

$$= 10\pi\int_{-3}^{3} 2\sqrt{9-x^2}\,dx$$



$$= 10\pi \langle \text{arean av cirkeln med } R=3 \rangle =$$

$$= 10\pi \cdot 9\pi = 90\pi^2$$

Metod 2

Beräkna V_1 som man får vid rotationen av $\mathcal{D}_1 = \{-3 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 5+\sqrt{9-x^2}\}$ och V_2 som man får vid rotationen av $\mathcal{D}_2 = \{-3 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 5-\sqrt{9-x^2}\}$ kring x-axeln.

$$V_1 = \pi\int_{-3}^{3}\left(5+\sqrt{9-x^2}\right)^2 dx,$$

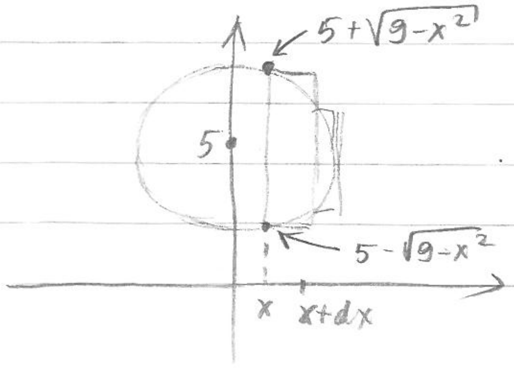
$$V_2 = \pi\int_{-3}^{3}\left(5-\sqrt{9-x^2}\right)^2 dx$$

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_{-3}^{3}\left[\left(5+\sqrt{9-x^2}\right)^2 - \left(5-\sqrt{9-x^2}\right)^2\right] dx$$

$$= \pi\int_{-3}^{3} 20\sqrt{9-x^2}\,dx = \ldots = 90\pi^2$$

(se ovan)

Metod 3 (Pappos-Guldins regel, s 326)



$dV = l \cdot dA$, där dA är arean av ytelementet och l är tyngdpunktens väg

$$dA = 2\sqrt{9-x^2} \cdot dx$$

Tyngdpunkten är "placerat" ovanför x på rektangelns halva höjd (detta inte är sant, men vi kan anta så, eftersom dx är liten) $\Rightarrow$ den har koordinater $(x, 5)$.

När vi roterar cirkelskivan är tyngdpunktens väg $\ell = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \Rightarrow$

$$dV = 20\pi\sqrt{9-x^2}\,dx, \qquad -3 \le x \le 3.$$

$$V = 20\pi\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx = \ldots = 90\pi^2 \text{ (se ovan).}$$

<u>Metod 4</u>. Guldins regel gäller inte bara för "små" volym dV, men också för hela V, d.v.s

$$V = \langle \text{arean av skivan} \rangle \cdot \langle \text{väg av skivans tyngdpunkt} \rangle.$$

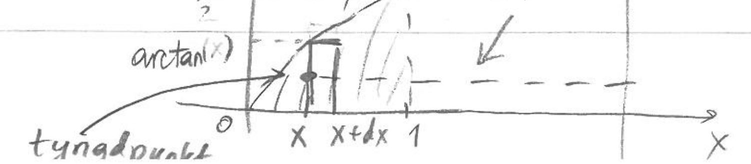
Tyngdpunkt ligger i skivans center d v s i $(0;5)$, så tyngdpunktens väg vid rotationen är $5 \cdot 2\pi = 10\pi$. Arean av skivan är

$$\int_{-3}^{3}\left(5+\sqrt{9-x^2} - 5 - \sqrt{9-x^2}\right)dx = 2\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$$

så $$V = 20\pi\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx = \ldots = 90\pi^2$$

i detta fall igen.

<u>20</u> <u>Metod 1</u> Guldins regel för volymselement:



$dV = \ell \cdot dA$, där

$dA = \arctan x \cdot dx$,

tyngdpunkten väg

$\ell = 2\pi(3-x)$

$$\Rightarrow V = \int_0^1 dV = 2\pi\int_0^1 (3-x)\arctan x\, dx =$$

$$= 2\pi\left[-\frac{(3-x)^2}{2}\arctan x\right]_0^1 + \cancel{2}\pi\int_0^1 \frac{(3-x)^2}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= -\cancel{2}\pi\cdot\frac{4}{\cancel{2}}\cdot\frac{\pi}{\cancel{4}} + \pi\int_0^1\left(1-\frac{6x-8}{x^2+1}\right)dx =$$

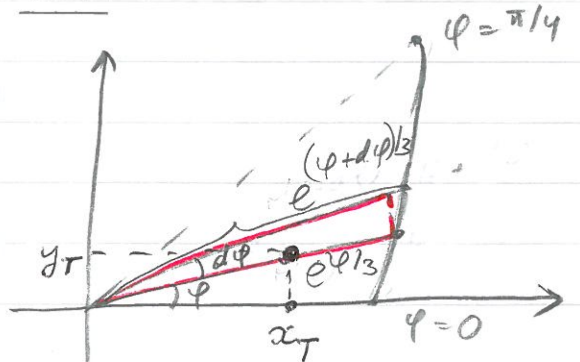
$$= -\pi^2 + \pi\left[x - 3\ln(x^2+1) + 8\arctan x\right]_0^1 =$$

$$= -\pi^2 + \pi\left(1 - 3\ln 2 + \overset{2}{\cancel{8}}\cdot\frac{\pi}{\cancel{4}}\right) =$$

$$= \pi^2 + \pi - 3\pi\ln 2$$

Metod 2 Se Lektion 2, problem 7.17 c).

23 Se s. 328-329 i boken.



$r(\varphi)\uparrow$ när $\varphi\uparrow$

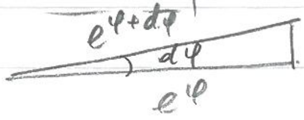
Använder Guldinsregel:

$dV = l\cdot dA$, där

$dA = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi/3}\right)^2\cdot d\varphi$ − den ungefärliga arean

$D = \left\{0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4};\ 0 \le r \le e^{\varphi/3}\right\}$

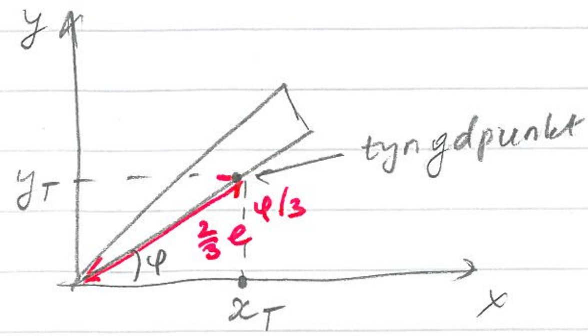
av triangeln



, då $e^{\frac{\varphi}{3}} \approx e^{\frac{\varphi+d\varphi}{3}}$,

och $\sin d\varphi \approx d\varphi$.

l är tyngdpunktens väg. Man antar att tyngdpunkten är placerat på sidan med längd $e^{\frac{\varphi}{3}}$ på $\frac{2}{3}$ av avståndet till origon (se Bild).



Vi ser att

$$x_T = \frac{2}{3} e^{\varphi/3} \cos\varphi$$

$$y_T = \frac{2}{3} e^{\varphi/3} \sin\varphi .$$

När vi roterar runt x-axeln,

$$\ell = 2\pi \cdot y_T = \frac{4\pi}{3} e^{\varphi/3} \sin\varphi \text{ , och}$$

när vi roterar runt y-axeln,

$$\ell = 2\pi \cdot x_T = \frac{4\pi}{3} e^{\varphi/3} \cos\varphi .$$

Slutligen, om området roteras kring y-axeln:

$$dV_y = \frac{2\pi}{3} e^{\varphi} \cdot \cos\varphi \, d\varphi \Rightarrow V_y = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} e^{\varphi} \cos\varphi \, d\varphi ,$$

där

$$\int e^{\varphi} \cos\varphi \, d\varphi = e^{\varphi}\cos\varphi + \int e^{\varphi} \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= e^{\varphi}\cos\varphi + e^{\varphi}\sin\varphi - \int e^{\varphi}\cos\varphi \, d\varphi$$

$$\Rightarrow \int e^{\varphi}\cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi}\cos\varphi + e^{\varphi}\sin\varphi\right)$$

$$V_y = \frac{\pi}{3}\left[e^{\varphi}\cos\varphi + e^{\varphi}\sin\varphi\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(e^{\pi/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\pi/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{2}\, e^{\pi/4} - 1\right)$$

Om området roteras kring x-axeln:

$$dV_x = \frac{2\pi}{3} e^{\varphi} \sin\varphi \, d\varphi \Rightarrow$$

$$V_x = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} e^{\varphi} \sin\varphi \, d\varphi \text{ , där}$$

$$\int e^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi = e^{\varphi}\sin\varphi - \int e^{\varphi}\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= e^{\varphi}\sin\varphi - \left(e^{\varphi}\cos\varphi + \int e^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi\right)$$

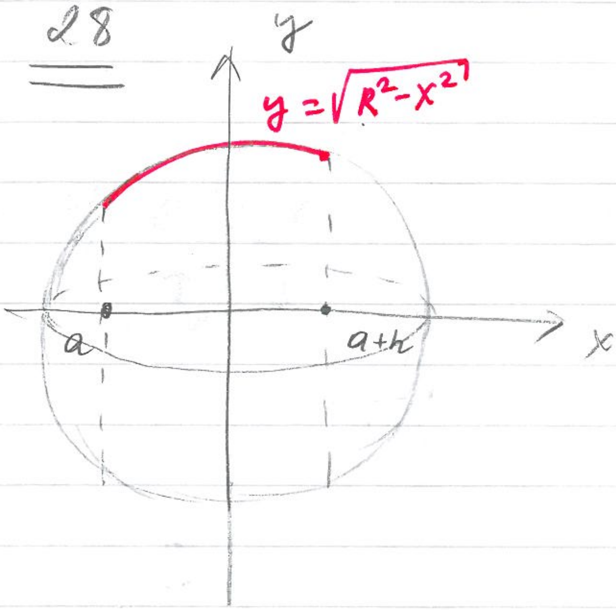
$$= e^{\varphi}\sin\varphi - e^{\varphi}\cos\varphi - \int e^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi \Rightarrow$$

$$\int e^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}e^{\varphi}(\sin\varphi - \cos\varphi).$$

$$V_x = \frac{\pi}{3}\left[e^{\varphi}(\sin\varphi - \cos\varphi)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{3}.$$

Extra

$\boxed{B7}$ 28



Vi får denna area om vi roterar $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $a \le x \le a+h$ kring x-axeln ett varv.

Då kan vi använda formeln

$$A = 2\pi \int_a^{a+h} \sqrt{R^2 - x^2}\,ds \quad (\text{s. } 330).$$

ds är kurvans bågelement $\Rightarrow$ $ds = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx$

(se s. 318 ex. 7.5).

$$A = 2\pi \int_a^{a+h} \frac{R}{\cancel{\sqrt{R^2 - x^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = \left[2\pi R x\right]_a^{a+h} =$$

$$= 2\pi R h.$$