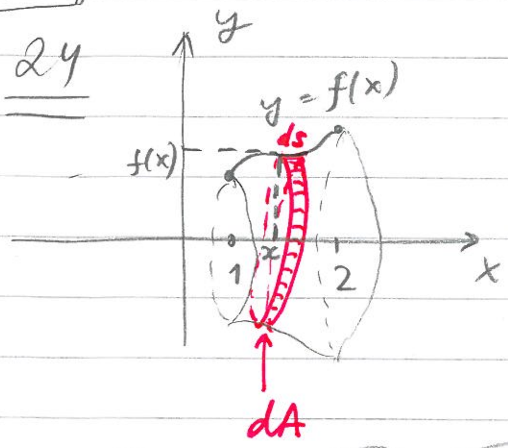
Lektion 4

B7

24



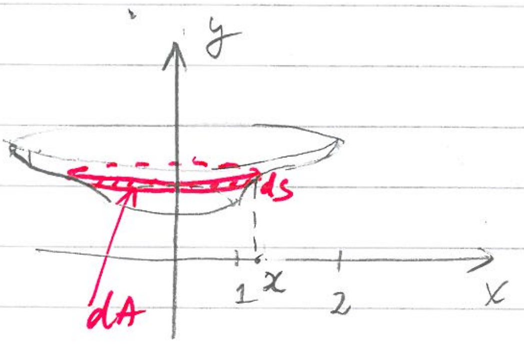
Här $f(x)$ = avståndet till rotationsaxeln!

a) kring x-axeln:

dA – area av ett band med breden ds (längden av en "liten bit" av kurvan $y = f(x)$) och längden $2\pi f(x)$. Eftersom $ds = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$,

$$dA = 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$\Rightarrow A = 2\pi\int_1^2 f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

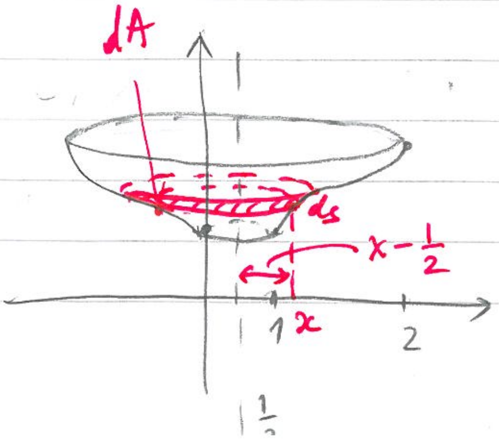


b) kring y-axeln:

dA – area av ett band med breden ds och längden $2\pi x$ (då avst. till rotationsaxeln är x).

$$dA = 2\pi x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

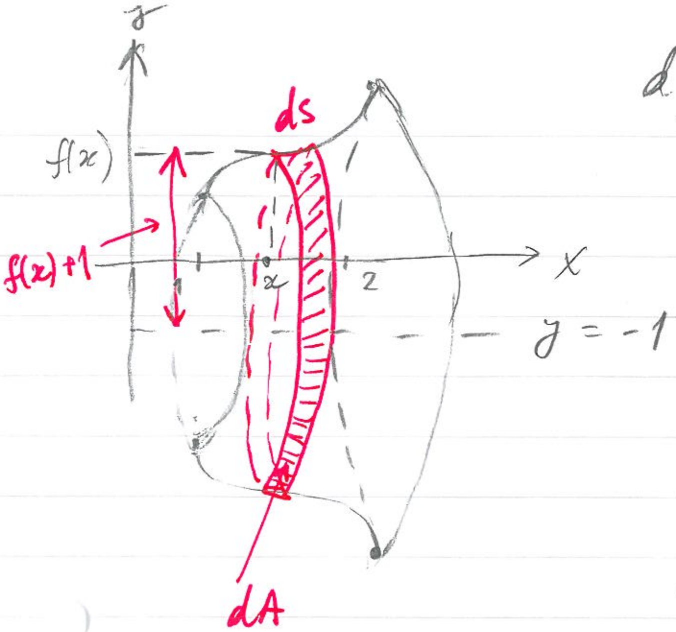
$$\Rightarrow A = 2\pi\int_1^2 x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$



c) kring $x = \frac{1}{2}$:

dA – area av ett band med breden ds och längden $2\pi(x - \frac{1}{2})$ (då avst. till rotationsaxeln är $x - \frac{1}{2}$) $\Rightarrow dA = 2\pi(x-\frac{1}{2})\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

$$A = 2\pi\int_1^2 (x - \tfrac{1}{2})\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$



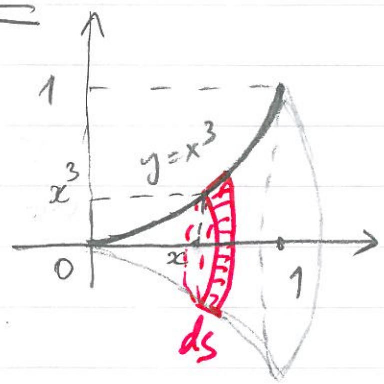
d) kring $y=-1$:

dA - area av ett band med breden ds och längden $2\pi(f(x)+1)$ då avståndet till rotationsaxeln är $f(x)+1$.

$$dA = 2\pi(f(x)+1)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$\Rightarrow A = 2\pi\int_1^2 (f(x)+1)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

25



dA - area av ett band med breden $ds=\sqrt{1+((x^3)')^2}\,dx$ och längden $2\pi x^3$, då x^3 är avståndet till rotationsaxeln $\Rightarrow$

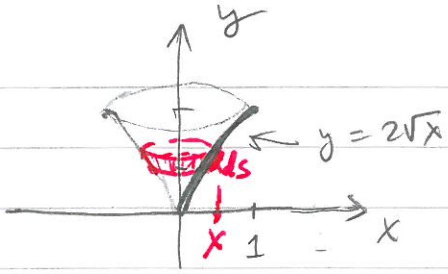
$$dA = 2\pi x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx,$$

$$A = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = \begin{bmatrix} 1+9x^4=t \\ 36x^3dx=dt \\ 1\le t\le 10\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2\pi}{36}\int_1^{10}\sqrt{t}\,dt = \frac{2\pi}{\cancel{36}\,9}\left[\frac{2t^{3/2}}{3}\right]_1^{10} =$$

$$= \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

26



dA – area av ett band med breden $ds = \sqrt{1+\left((2\sqrt{x})'\right)^2}\,dx$ och längden $2\pi x$ $\Rightarrow$

$$dA = 2\pi x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx, \qquad 0 \le x \le 1 \Rightarrow$$

$$A = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x^2+x}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{\left(x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}}\,dx =$$

$$= \frac{2\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1}\,dx =$$

$$= \pi \int_0^1 \sqrt{(2x+1)^2 - 1}\,dx = \left[\begin{array}{c} 2x+1 = t \\ 2dx = dt \\ 1 \le t \le 3 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^3 \sqrt{t^2-1} \cdot 1\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[t\sqrt{t^2-1}\right]_1^3 - \frac{\pi}{2}\int_1^3 \frac{t^2-1+1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\int_1^3 \left(\sqrt{t^2-1} + \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right) dt \Rightarrow$$

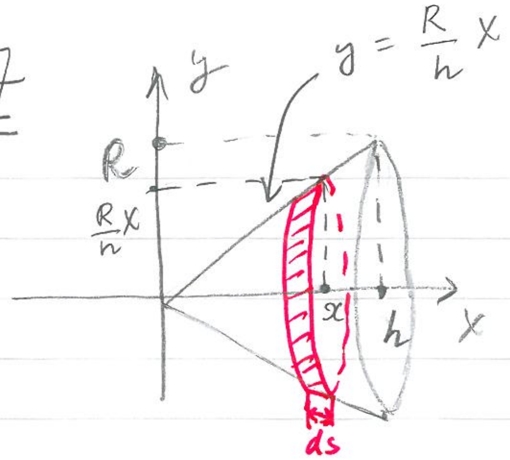
$$= \pi \cdot 3\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\int_1^3 \sqrt{t^2-1} - \frac{\pi}{2}\left[\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|\right]_1^3 =$$

$$= \pi \cdot 3\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\int_1^3 \sqrt{t^2-1} - \frac{\pi}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow \pi \int_1^3 \sqrt{t^2-1}\,dt = \pi \cdot 3\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) \Rightarrow$$

$$A = \frac{\pi}{2}\int_1^3 \sqrt{t^2-1}\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot 3\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

27



Man får konen genom att rotera en linje $y = \frac{R}{h}x$, $0 \le x \le h$ runt x-axeln.

dA – arean av bandet
bredden är $ds = \sqrt{1 + \left(\left(\frac{R}{h}x\right)'\right)^2}\,dx$
längden är $2\pi \cdot \frac{R}{h}x$.

$$dA = 2\pi \cdot \frac{R}{h}x\sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}}\,dx \Rightarrow$$

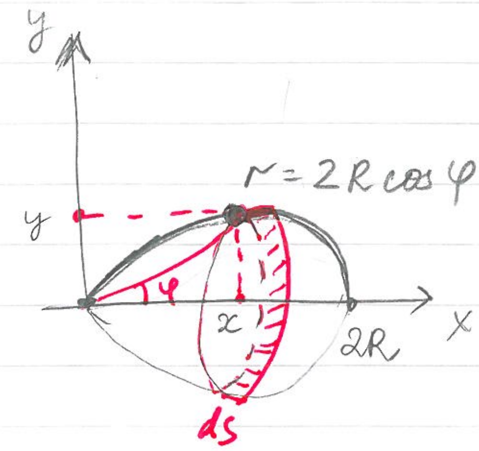
$$A = \int_0^h 2\pi\frac{R}{h}\cdot x\sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}}\,dx =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{R}{h}\sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h =$$

$$= \cancel{2}\pi \cdot \frac{R}{\cancel{h}}\sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}} \cdot \frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}$$

$$= \pi R\sqrt{h^2 + R^2}.$$

29



$\varphi = 0 \Rightarrow r(\varphi) = 2R$
$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r(\varphi) = 0$

Guldins regel:

$dA = \langle \text{tyngdp. väg} \rangle \cdot ds$

Tyngdpunkten antas att ha koordinater $(x, y) = (2R\cos\varphi \cdot \cos\varphi,\ 2R\cos\varphi\sin\varphi)$

I polära koordinater $ds = \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi \Rightarrow$

$dA = 2\pi \cdot 2R\cos\varphi\sin\varphi \cdot \sqrt{4R^2\cos^2\varphi + 4R^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$

$$= 4\pi R\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{4R^2}\,d\varphi = 8\pi R^2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= 4\pi R^2\sin 2\varphi\,d\varphi \Rightarrow$$

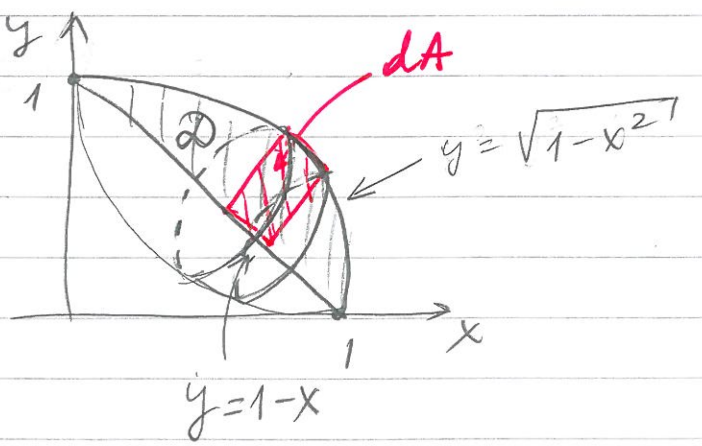
$$A = \int_0^{\pi/2} 4\pi R^2\sin 2\varphi\,d\varphi = -\cancel{4}^{\,2}\pi R^2\left[\frac{\cos 2\varphi}{\cancel{2}}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\pi R^2 + 2\pi R^2 = \underline{4\pi R^2}.$$

Man kan använda formeln på s 333 istället!

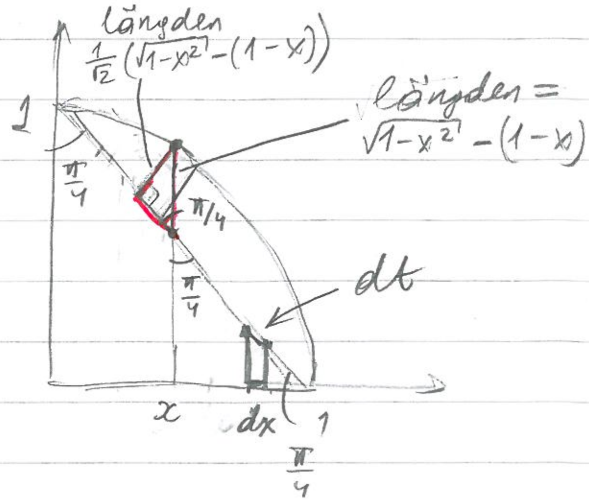
Extra ($\boxed{B7}$ $\underline{28}$ – se Lektion 3)

$\boxed{B7}$ $\underline{22}$

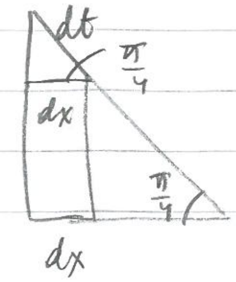


Använder Guldins regel!

$$dV = \left(\substack{\text{tyngdp.}\\ \text{väg}}\right)\cdot dA$$



Vi antar att rotationsaxeln är uppdelad i lika stora små interval $dt \Rightarrow$ vi har sambandet $dt = \sqrt{2}\,dx$.



Vi antar att dA är arean av en liten rektangel baserad på $dt \Rightarrow$ sidans längd är $\dfrac{\sqrt{1-x^2}-(1-x)}{\sqrt{2}}$, och tyngdpunktens avstånd till rotationsaxeln är $\sqrt{1-x^2}-(1-x) \Rightarrow$

$$dV = \cancel{2}\pi \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - (1-x)}{\cancel{2}\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-(1-x)}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cdot x$$

$$= \frac{\pi\left(\sqrt{1-x^2} - (1-x)\right)^2}{\sqrt{2}}$$

$$V = \int_0^1 \frac{\pi\left(\sqrt{1-x^2} - (1-x)\right)^2}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left((1-x^2) - 2(1-x)\sqrt{1-x^2} + (1-x)^2\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left[1 - \cancel{x^2} - 2\sqrt{1-x^2} + 2x\sqrt{1-x^2} + 1 - 2x + \cancel{x^2}\right] dx$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[2x - x^2\right]_0^1 - \pi\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 =$$

area av $\frac{1}{4}$ cirkel av $r=1$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}(2-1) - \pi\sqrt{2} \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{3} = \frac{5\pi\sqrt{2}}{6} - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}$$