Lektion 6

$\boxed{P7}$

1 Taylorpolynomet till $y=f(x)$ i $x=x_0$ av ordning n är

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

I vårt fall $y = x^{\frac{1}{2}}$, $x_0=4$, $n=3$.

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)''' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow$$

$$P_3(x) = 4^{1/2} + \frac{\frac{1}{2}\cdot 4^{-1/2}}{1!}(x-4) + \frac{-\frac{1}{4}\cdot 4^{-3/2}}{2!}(x-4)^2 + \frac{\frac{3}{8}\cdot 4^{-5/2}}{3!}(x-4)^3 =$$

$$= 2 + \frac{1}{4}(x-4) + \frac{-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}}{2}(x-4)^2 + \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{32}}{2\cancel{6}}(x-4)^3 =$$

$$= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$$

2 För denna uppgift kan vi använda färdiga Maclaurin-utvecklingar - se boken s 360.

a) Vi vet att

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5)$$

$$\Rightarrow e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5).$$

c) Vi vet att

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)$$

$$\Rightarrow x \arctan x = x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6)$$

d) Använder sats 8.3 e):

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + \binom{-1}{2}x^2 + \binom{-1}{3}x^3 + $$

$$+ \binom{-1}{4}x^4 + O(x^5) \Rightarrow$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{(-1)(-1-1)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(\overset{-2}{-1-1})(\overset{-3}{-1-2})}{3!}x^3$$

$$+ \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)(-1-3)}{4!}x^4 + O(x^5) \Rightarrow$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + O(x^5)$$

b) Vi vet att $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) \Rightarrow$

$\sin 2x = 2x - \frac{8x^3}{6} + O(x^5)$ eller

$\sin 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + O(x^5)$

e) Vi vet att

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6) \Rightarrow$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4!} + O(x^{12}) \Rightarrow$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)$$

f) Vi vet att

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^5) \Rightarrow$$

$$\ln(1+(-x^2)) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)$$

$\boxed{B8}$ $\underline{\underline{3}}$

a) Taylorutvecklingen av ordning 3 av $f(x) = x^5$:

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + O((x-1)^4)$$

$$= \left[(x^5)' = 5x^4,\ (x^5)'' = 20x^3,\ (x^5)''' = 60x^2 \right] =$$

$$= 1 + 5(x-1) + \frac{20}{2!}(x-1)^2 + \frac{60}{3!}(x-1)^3 + O((x-1)^4)$$

$$= 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + O((x-1)^4)$$

Om vi sätter $x = 1+t$ i a) $\Rightarrow$

$$(1+t)^5 = 1+5t+10t^2+10t^3+O(t^4)$$

medan uträckningen ger

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$$(1+t^5) = 1+5t+10t^2+10t^3+\underbrace{5t^4+t^5}$$

Inga konstigheter, eftersom $5t^4+t^5 = O(t^4)$.

b) $$f(x) = f(-2) + \frac{f'(-2)}{1!}(x+2) + \frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{f'''(-2)}{3!}(x+2)^3 + O((x+2)^4) =$$

$$= \left[f'(x) = -e^{-x},\ f''(x) = e^{-x},\ f'''(x) = -e^{-x} \right] =$$

$$= e^2 - e^2(x+2) + \frac{e^2}{2}(x+2)^2 - \frac{e^2}{6}(x+2)^3 + O((x+2)^4).$$

Alternativt kan man skriva $e^{-x} = e^{2-(x+2)} = e^2 e^{-(x+2)}$.

Eftersom för x nära -2 $(x+2)$ ligger nära 0, kan vi använda den standarta Maclaurin utveckling $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)$:

$$e^{-x} = e^2\left(1 - (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2} - \frac{(x+2)^3}{6} + O((x+2)^4)\right)$$

för x nära -2.

6 a) Metod 1 : använd Maclaurinutvecklingens definition. Högre ordningens derivator blir mer och mer komplicerade!

Metod 2 : Vi vet Maclaurinutvecklingar för $\sin x$ och $\cos x$. Vi söker nu a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 sådana att

$$\underbrace{\tan x}_{\frac{\sin x}{\cos x} =} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + O(x^5),$$

dvs

$$\underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)}_{=\sin x} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + O(x^5)) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5)\right)}_{=\cos x} \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 - \frac{a_0 x^2}{2} - \frac{a_1}{2} x^3 - \frac{a_2}{2} x^4 + \frac{a_0}{24} x^4 + O(x^5).$$

Vi jämför koefficienterna i VL och HL!

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 - \frac{a_0}{2} &= 0 \\ a_3 - \frac{a_1}{2} &= -\frac{1}{6} \\ a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\ a_4 &= \frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{24} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan x = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5), \quad x \text{ nära } 0$$

5

B) $f(x) = \arcsin x$.

Att derivera $\arcsin x$ 4 ggr kan vara ganska jobbigt.

Istället kan man notera att $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

så vi kan först utveckla $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ i Maclaurin-serie och sedan integrera den för att få Maclaurinutvecklingen för $\arcsin x$.

För x nära 0 gäller:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2 + O(x^3) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}x^2 + O(x^3) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + O(x^3) \Longrightarrow$$

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + O(x^6) \quad \text{eller}$$

$$(\arcsin x)' = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + O(x^6) \Rightarrow$$

$$\arcsin x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5} + O(x^7) + C,$$

där $C = 0$ så att $\arcsin 0 = 0$.

Alltså, $\arcsin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$