Lektion 8

$\boxed{P7}$

6 Eftersom alla standarta Maclaurinutvecklingar gäller för x nära 0, gör variabelbyte $y = \frac{1}{x}$, där $y \to 0^+$ då $x \to \infty$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to \infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2+2x-3}\right) =$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{y^3}+\frac{3}{y^2}} - \sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y}-3}\right) =$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y}\left(\sqrt[3]{\frac{1+3y}{y^3}} - \sqrt{\frac{1+2y-3y^2}{y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}\sqrt[3]{1+3y} - \frac{1}{y}\sqrt{1+2y-3y^2}\right) =$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+3y} - \sqrt{1+2y-3y^2}}{y^2} = \otimes$$

Nämnaren har grad 2 $\Rightarrow$ utvecklar täljaren t o m grad 2.

Eftersom $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \binom{\frac{1}{3}}{2}x^2 + O(x^3) =$

$$= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)x^2}{2} + O(x^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + O(x^3)$$

så $\sqrt[3]{1+3y} = 1 + y - y^2 + O(y^3)$.

Eftersom $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2 + O(x^3) =$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} x^2 + O(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3),$$

så $\sqrt{1+2y-3y^2} = 1 + \frac{1}{2}(2y-3y^2) - \frac{1}{8}(2y-3y^2)^2 +$

$$+ O\left((2y-3y^2)^3\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} O\left((2y-3y^2)^3\right) = O\left(y^3(2-3y)^3\right) = \\ = y^3 \cdot \underbrace{(2-3y)^3 \underbrace{f(x)}_{\text{begr.}}}_{\text{begr. då } y \text{ nära } 0} = O(y^3) \end{array}\right]$$

$$= 1 + y - \frac{3}{2}y^2 - \frac{4y^2 \overbrace{-12y^3+9y^4}^{=O(y^3)}}{8} + O(y^3)$$

$$= 1 + y - \frac{3}{2}y^2 - \frac{4y^2}{8} + O(y^3) =$$

$$= 1 + y - 2y^2 + O(y^3).$$

$$\otimes = \lim_{y \to 0^+} \frac{\cancel{1} + \cancel{y} - y^2 + O(y^3) - \cancel{1} - \cancel{y} + 2y^2 + O(y^3)}{y^2}$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{y^2 + O(y^3)}{y^2} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\cancel{y^2}\left(1 + \overbrace{O(y)}^{\to 0}\right)}{\cancel{y^2}} = 1.$$

Svar: gränsvärdet existerar och är lika med 1.

B8 |

13 Vi Maclaurin-utvecklar $f(x)$ nära 0:

$$f(x) = 2\cos x + (\arctan x)^2 =$$

$$= 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right) +$$

$$+ \left(x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right) =$$

$$= 2 - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{12} + O(x^6)$$

$$+ \cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{3} + O(x^6) =$$

$$= 2 + x^4\left(\frac{1}{12} - \frac{2}{3}\right) + O(x^6) =$$

$$= 2 + x^4\,\frac{1-8}{12} + O(x^6) =$$

$$= 2 - \frac{7}{12}x^4 + O(x^6).$$

Observera att $f(0) = 2\cos 0 + (\arctan 0)^2 = 2.$
När x är nära 0 så vi vet att

$$f(x) = 2 - \frac{7}{12}x^4 + x^6 \cdot B(x),$$ där $B(x)$ är begränsad, d v s $-M \leq B(x) \leq M$ för något tal M.

$$\Rightarrow f(x) = 2 - \frac{7}{12}x^4 + x^6 \cdot B(x) \leq$$

$$\leq 2 - \frac{7}{12}x^4 + Mx^6 =$$

$$= 2 - x^4\underbrace{\left(\frac{7}{12} - Mx^6\right)}_{>0 \text{ om } x \text{ är liten}} \leq 2$$ om x är liten, t ex $|x| < \sqrt[6]{\frac{7}{\ldots}}$ [illegible]

Eftersom för alla x nära 0

$f(x) \leq 2 = f(0) \Rightarrow$

$x=0$ är ett lokalt maximum.

14

a) $e^{\sin x} = \left[\begin{array}{l} \text{när } x \text{ är nära } 0 \\ \Rightarrow \sin x \text{ är nära } 0 \end{array} \right] =$

$$= 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3!} + O((\sin x)^4) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) = x + O(x^3) = O(x) \\ (\sin x)^4 = O(x^4) \end{array} \right] =$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) + \frac{1}{2}\left(x + O(x^3)\right)\left(x + O(x^3)\right) +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(x + O(x^3)\right)\left(x + O(x^3)\right)\left(x + O(x^3)\right) + O(x^4) =$$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + O(x^5) + \frac{1}{2}\left(x^2 + O(x^4)\right)$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\cancel{x^3} + O(x^5)\right) + O(x^4) =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4).$$

b) $e^{\cos x} = \left[\begin{array}{l} \text{OBS! när } x \text{ är nära } 0 \Rightarrow \\ \cos x \text{ är nära } 1\text{. Kan inte tillämpa} \\ \text{utvecklingen för } e^t \text{ direkt} \end{array} \right] =$

$$= e^{1 + (\cos x - 1)} = e \cdot e^{\cos x - 1} = \left[\cos x - 1 \text{ är nära } 0 \right] =$$

$$= e\left(1 + (\cos x - 1) + \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3!} + O\left((\cos x - 1)^4\right)\right) =$$

$$= \left[\cos x - 1 \doteq -\frac{x^2}{2} + O(x^4) = O(x^2) \right] =$$

$$= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) + O(x^4) + O(x^6) + O(x^8)\right) =$$

$$= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) = e - \frac{ex^2}{2} + O(x^4).$$

25 d) $$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\cos x} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left[\overbrace{1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)}^{=t}\right]}{x}} =$$

$$= \left[\ln(1+t) = t + O(t^2), \quad \underbrace{t = -\frac{x^2}{2} + O(x^4)}_{\text{nära } 0} \Rightarrow t^2 = O(x^4)! \right] =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\overbrace{-\frac{x^2}{2} + O(x^4)}^{t} + \overbrace{O(x^4)}^{O(t^2)}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \left(-\overbrace{\frac{x}{2}}^{\to 0} + \overbrace{O(x^3)}^{\to 0}\right)} = e^0 = \underline{\underline{1}}.$$

Extra

$\boxed{P7}$

13 a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2 - (\ln x)^2}{x - \sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left[\begin{matrix} t = x-1 \\ t \to 0 \end{matrix}\right] =$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln (t+1)^2 - (\ln(t+1))^2}{t+1-\sqrt{t+1}} = \otimes$$

"Utvecklar täljaren och nämnaren, med dominanta termer i focus:

Täljaren:

$$2\underbrace{\ln(t+1)}_{O(t)} - \underbrace{(\ln(t+1))^2}_{O(t^2)} = 2(t+O(t^2)) - O(t^2) =$$

$$= 2t + O(t^2)$$

Nämnaren:

$$t+1-\sqrt{t+1} = t + \cancel{1} - \left(\cancel{1} + \frac{1}{2}t + O(t^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}t + O(t^2) \Rightarrow$$

$$\otimes = \lim_{t\to 0} \frac{2t+O(t^2)}{\frac{1}{2}t + O(t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}(2+\overbrace{O(t)}^{\to 0})}{\cancel{t}(\frac{1}{2} + \underbrace{O(t)}_{\to 0})} =$$

$$= \frac{2}{1/2} = 4.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3 \ln\frac{x+2}{x-2} - 4x^2\right) = \left[\begin{matrix} t = \frac{1}{x} \\ t \to 0 \end{matrix}\right] =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{1}{t^3}\ln\frac{\frac{1}{t}+2}{\frac{1}{t}-2} - \frac{4}{t^2}\right] =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{1}{t^3}\ln\frac{1+2t}{1-2t} - \frac{4}{t^2}\right] =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln\frac{1+2t}{1-2t} - 4t}{t^3} =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+2t)-\ln(1-2t)-4t}{t^3} = \left[\begin{matrix}\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \\ + \frac{x^3}{3} + O(x^4)\end{matrix}\right]$

$= \lim\limits_{t\to 0}\frac{\cancel{2t} - \cancel{\frac{(2t)^2}{2}} + \frac{(2t)^3}{3} + O(t^4) - \left(\cancel{-2t} - \cancel{\frac{(2t)^2}{2}} - \frac{(2t)^3}{3} + O(t^4)\right) \cancel{-4t}}{t^3}$

$= \lim\limits_{t\to 0}\frac{2\cdot\frac{(2t)^3}{3} + O(t^4)}{t^3} =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{16t^3}{3} + O(t^4)}{t^3} = \lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{16}{3} + O(t)\right) =$

$= \frac{16}{3}.$