Lektion 9

$\boxed{P7}$

8 Vi skriver Maclaurins utveckling!

$$f(x) = x\cos x^2 = \left[\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + O(t^{2n+2})\right]$$

$$= x\left(1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!} + O(x^{4n+4})\right) =$$

$$= x - \frac{x^5}{2} + \frac{x^9}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n)!} + O(x^{4n+5}).$$

Å andra sidan, vi vet att

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(20)}(0)}{20!}x^{20} +$$

$$+ \frac{f^{(21)}(0)}{21!}x^{21} + O(x^{22})$$

Vi kan jämföra koefficienter i dessa två utvecklingar. T. ex

$$x^{20}: \quad \underbrace{0}_{\text{finns inte med i den första utv.}} = \underbrace{\frac{f^{(20)}(0)}{20!}}_{\text{koeff. av } x^{20} \text{ i den andra}} \Rightarrow \boxed{f^{(20)}(0) = 0}$$

$$x^{21}: \quad /\text{sätt } n=5/ \quad \frac{(-1)^5}{10!} = \frac{f^{(21)}(0)}{21!} \Rightarrow$$

$$\boxed{f^{(21)}(0) = -\frac{21!}{10!}}$$

$\boxed{B8}$

15 a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{\sin x\cdot \ln(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\cancel{x}-\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right)-\left(\cancel{x}+O(x^3)\right)}{\left(x+O(x^3)\right)\left(x+O(x^2)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+O(x^3)}{x^2+\underbrace{O(x^3)}_{\to 0}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\left(-\frac{1}{2}+O(x)\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\underbrace{O(x)}_{\to 0}\right)}=-\frac{1}{2}.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)=\left[\begin{matrix}t=\frac{1}{x}\\ t\to 0\end{matrix}\right]=$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^2}}-\frac{1}{t}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\sqrt[3]{\frac{1+t}{t^3}}-\frac{1}{t}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+t}-1}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{1}+\frac{1}{3}t+O(t^2)-\cancel{1}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{3}+\underbrace{O(t)}_{\to 0}\right)=\frac{1}{3}.$$

16 Eftersom

$$x^3\left(\ln(x+1)-\ln x\right) = x^3 \cdot \ln\frac{x+1}{x} =$$

$$= x^3 \ln\Big(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{nära 0 då } x\to\infty}\Big) = \left[\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4)\right] =$$

$$= x^3 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) =$$

$$= \underbrace{x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}}_{\text{polynom av grad 2}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{x}\right)}_{= \frac{1}{x}\cdot \underbrace{f(x)}_{\text{begr.}} \to 0 \text{ då } x\to\infty},$$

ser vi att

$$x^3\left(\ln(x+1)-\ln x\right) - \left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right) \to 0.$$

då $x \to \infty$

② vs $\underline{p(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}}$.

28 a) Skriver Maclaurinutvecklingen:

$$f(x) = \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - \sin x,$$

där $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$,

$$\ln\left(1+\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\right) = \left[\begin{array}{l}\ln(1+t) = \\ = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + O(t^5)\end{array}\right] =$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^4$$

$$+ O\left(\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^5\right)$$

3

skriver upp till $O(x^5)$

$$\overset{!}{=} x + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{2}\left(\cancel{x^2} + x^3 + \frac{x^4}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + \frac{3}{2}x^4 + O(x^5)\right)$$

$$- \frac{1}{4}\left(x^4 + O(x^5)\right) + O(x^5) =$$

$$= x + x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + x^4\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + O(x^5) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{8}x^4 + O(x^5).$$

Vi ser att

$$f(x) = \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - \sin x =$$

$$= \cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{x^4}{8} + O(x^5) - \left(\cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{6}} + O(x^5)\right)$$

$$= \frac{x^4}{8} + O(x^5)$$

Observera att $f(0) = \ln 1 - \sin 0 = 0$, och

$$f(x) = \frac{x^4}{8} + O(x^5) = \frac{x^4}{8} + x^5 \cdot \underbrace{b(x)}_{\text{begr.}} = \left[\begin{array}{l} b(x) \text{ begr.} \Rightarrow \\ -M \le b(x) \le M \end{array}\right]$$

$$\geq \underbrace{x^4}_{>0}\left(\frac{1}{8} - \underbrace{|x| \cdot M}_{\text{liten}}\right) \geq 0 = f(0)$$ då x är tillräckligt liten, t.ex. $|x| \le \frac{1}{8M}$.

Det betyder att $f(x)$ har ett lokalt minimum i $x = 0$.

b) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{x^2+3}{2}\right) - \ln x$ ska undersökas i punkt $x = 1$. Vi gör ett variabelbyte $x = t+1$ så att

$$g(t) = f(t+1) = \sin\left(2(t+1) - \frac{(t+1)^2+3}{2}\right) - \ln(t+1)$$

ska undersökas i $t=0$ istället, där man kan använda färdiga Maclaurinutvecklingar:

$$g(t) = \sin\left(2t+\cancel{2} - \frac{t^2+2t+\cancel{4}}{2}\right) - \ln(t+1) =$$

$$= \sin\left(t - \frac{t^2}{2}\right) - \ln(t+1) =$$

$$= \left[\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right] =$$

$$= t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{6}\left(t - \frac{t^2}{2}\right)^3 + O(t^5)$$

$$- \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4)\right) = \left[\begin{array}{c}\text{skriver fram}\\ \text{till } O(t^4)\end{array}\right] =$$

$$= \cancel{t} - \cancel{\frac{t^2}{2}} - \frac{1}{6}t^3 + O(t^4) - \cancel{t} + \cancel{\frac{t^2}{2}} - \frac{t^3}{3} + O(t^4)$$

$$= -\frac{t^3}{2} + O(t^4).$$

Observera att $g(0) = \sin(\overbrace{2 - \tfrac{4}{2}}^{=0}) - \ln 1 = 0$.

$$g(t) = -\frac{t^3}{2} + t^4 \cdot \underbrace{B(t)}_{\text{Begr.}} = t^3\left(-\frac{1}{2} + t\underbrace{B(t)}_{\text{begr.}}\right)$$

har inte något bestämt tecken då t är liten. Vi kan se att $-\frac{1}{2} + t \cdot B(t) < -\frac{1}{2} + |t| \cdot M < 0$ då t är liten, t ex $|t| < \frac{1}{2M}$, men $t^3 > 0$ då $t > 0$ och $t^3 < 0$ då $t < 0$

Det betyder att $g(t) > 0$ då $t > 0$ är liten och
$g(t) < 0$ då $t < 0$ är liten.

Dvs vi har varken lok max eller lok min i $t = 0$.

Extra

$\boxed{P7}$

11 a) $\tan x$ är en udd funktion!

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$\Rightarrow$ endast udda potenser i utvecklingen. (se s. 360 i boken).

b) $\cos x \tan x = \sin x \Rightarrow$

$$\overbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8)\right)}^{=\cos x} \cdot \overbrace{\left(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + O(x^7)\right)}^{=\tan x}$$

$$= \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)}_{\sin x} \Rightarrow$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7) =$$

$$= a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 - \frac{a_1}{2} x^3 - \frac{a_3}{2} x^5 + \frac{a_1 x^5}{4!} + O(x^7)$$

$$\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{6} = \frac{1 - 5}{5!} + \frac{1}{6} = \frac{-4}{120} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{5 - 1}{30} = 2/15$$

Jämför koefficienterna!

$a_1 = 1$

$a_3 - \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow$

$a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{5!} = \frac{1}{5!}$

$a_1 = 1$

$a_3 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$a_5 = \frac{1}{5!} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4!} = \frac{2}{15}$.

Vi ser att $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7).$

c) Sätter $t = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7)$ i

$$\tan t = a_1 t + a_3 t^3 + a_5 t^5 + O(t^7) =$$

$$= a_1\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7)\right) +$$
$$+ a_3\left(x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right)$$
$$+ a_5\left(x + O(x^3)\right)\left(x + O(x^3)\right)\left(x + O(x^3)\right)\left(x + O(x^3)\right)\left(x + O(x^3)\right)$$
$$+ O(x^7) =$$

$$= a_1\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7)\right)$$
$$+ a_3 \overbrace{\left(x^2 - \frac{2x^4}{3} + O(x^6)\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right)}^{= x^3 - \frac{2x^5}{3} - \frac{x^5}{3} + O(x^7)}$$
$$+ a_5 x^5 + O(x^7) =$$

$$= a_1 x - \frac{a_1 x^3}{3} + \frac{a_1 x^5}{5} + a_3 x^3 - a_3 x^5 + a_5 x^5 + O(x^7)$$
$$= a_1 x + \left(-\frac{a_1}{3} + a_3\right)x^3 + \left(\frac{a_1}{5} - a_3 + a_5\right)x^5 + O(x^7)$$

Vi ser att

$$x = a_1 x + \left(-\frac{a_1}{3} + a_3\right)x^3 + \left(\frac{a_1}{5} - a_3 + a_5\right)x^5 + O(x^7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 - \frac{a_1}{3} = 0 \\ a_5 - a_3 + \frac{a_1}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = \frac{1}{3} \\ a_5 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

$\Rightarrow \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)$ igen...

d) Observera att $\left(\ln(\cos x)\right)' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$,

eller $\left(\ln(\cos x)\right)' = -x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)$.

Vi integrerar denna utveckling:

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{2}{15}\cdot\frac{x^6}{6} + O(x^8) + C,$$

där $C = 0$ eftersom $\ln(\cos 0) = 0$.

Slutligen, $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + O(x^8)$.

$\boxed{B8}$

12 Vi använder utvecklingen $\sin t = t + O(t^3)$ då t är nära 0, och vi får att

$$f(x) = x^2 \sin \underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\text{nära } 0 \\ \text{då } x \to \infty}} = x^2\left(\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) =$$

$$= x + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Det betyder att $f(x) - x = O\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ då $x \to \infty$,

dvs kurvan $y = f(x)$ närmar sig den räta linjen $y = x$ då $x \to \infty$.

Det betyder att $y = x$ är den sneda asymptoten då $x \to \infty$.