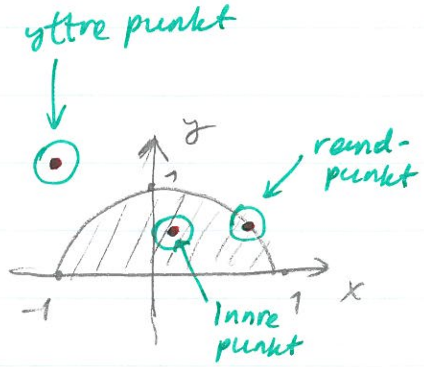
Lektion 1

1.1

skiva
en cirkel med radie 1

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ \underbrace{y \geq 0}_{\text{det övre halvplanet}}\}$

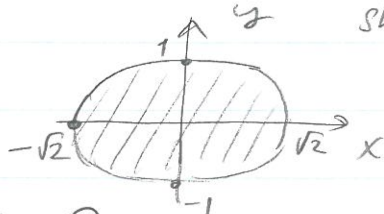


Innre punkter: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1,\ y > 0\}$

Yttre punkter: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1,\ y > 0\} \cup$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$

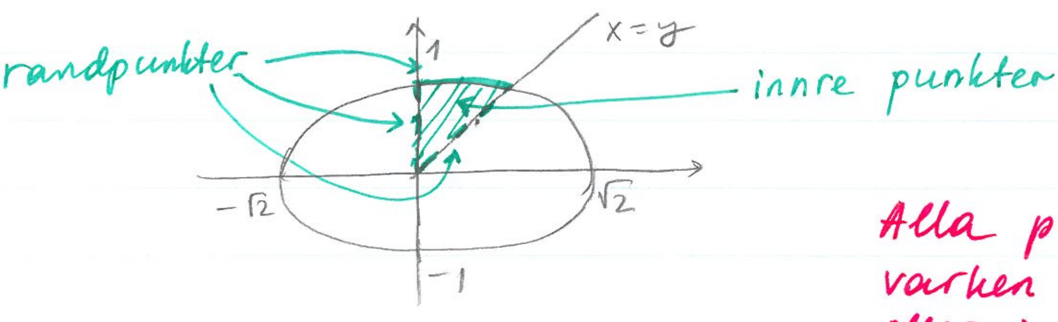
Randpunkter: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1,\ y \geq 0\} \cup$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ -1 \leq y \leq 1\}$

b) $x^2+2y^2 \leq 2 \iff \dfrac{x^2}{2} + y^2 \leq 1$ beskriver en ellips-skiva



medan $0 < x < y$ ger $x > 0$ och $x < y$

Skärningen av dessa två områden är

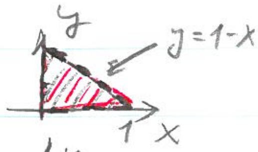


Alla punkter som är varken randpunkter eller innre punkter är yttre punkter

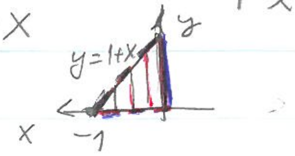
1.2

a) Vi har fyra fall att undersöka!

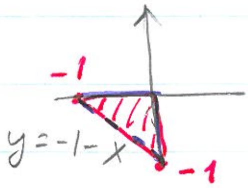
I $x > 0,\ y > 0 \iff x + y < 1 \Rightarrow y < 1 - x$



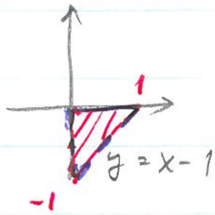
II $x \le 0,\ y > 0 \iff -x + y < 1 \Rightarrow y < 1 + x$



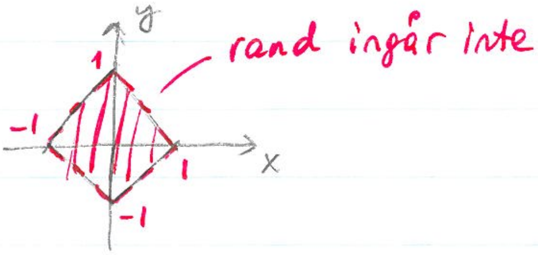
III $x \le 0,\ y \le 0 \iff -x - y < 1 \Rightarrow y > -1 - x$



IV $x > 0,\ y \le 0 \iff x - y < 1 \Rightarrow y > x - 1$



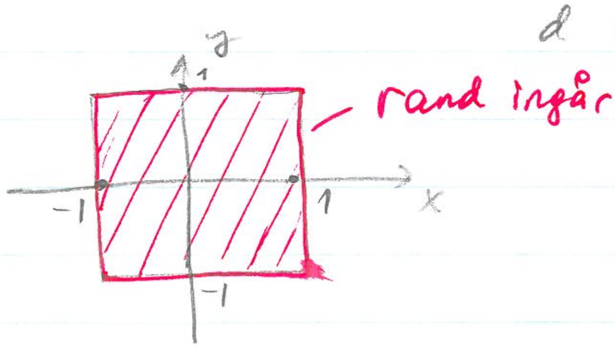
Lägger vi ihop alla dessa fall får vi



b) $\max(|x|, |y|) \le 1 \iff |x| \le 1$ och $|y| \le 1 \Rightarrow$

$-1 \le x \le 1$ och $-1 \le y \le 1$

d v s

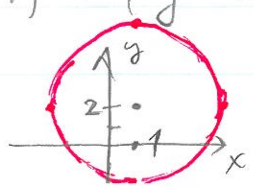


1.3

a) Kvadratkompletering ger

$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 4) - 4 = 11$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$ – en cirkel med centrum i $(1, 2)$ och radien 4

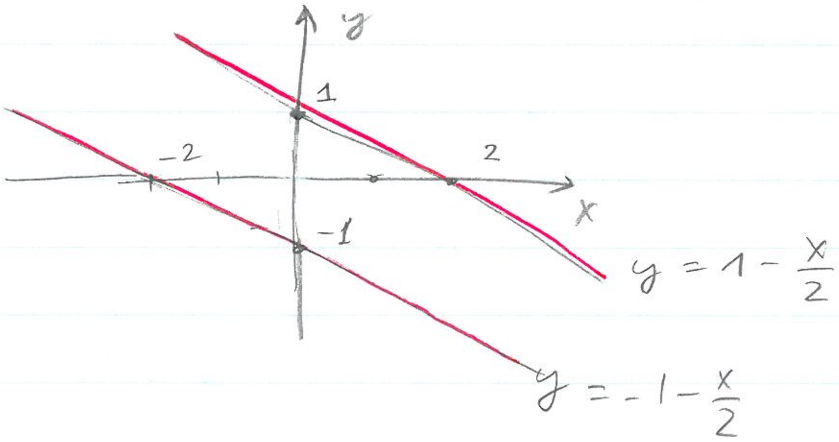


Det finns inga inre punkter, och alla punkter i mängden är randpunkter.

b) $|x+2y| = 2 \iff x+2y=2$ eller $x+2y=-2$

$\iff y = 1-\frac{x}{2}$ eller $y=-1-\frac{x}{2}$

$\Rightarrow$ mängden består av två linjer



Inga inre punkter, alla punkter i mängden är randpunkter.

1.4

1.1 a): sluten (innehåller sina randpunkter), ej öppen, begränsad.

1.1. b) varken öppen eller sluten (en del randpunkter tillhör mängden, en del gör det inte), begränsad.

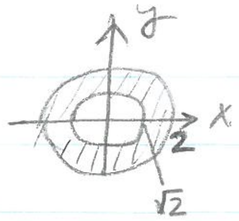
1.2 a) Öppen, ej sluten, begränsad

1.2 b) Sluten, ej öppen, begränsad

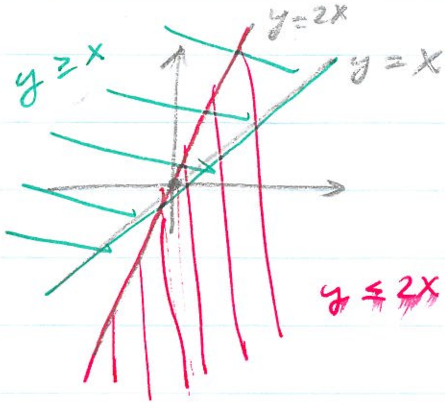
1.3 a) ej öppen, men sluten, begränsad

1.3 b) Ej öppen, men sluten, ej begr.

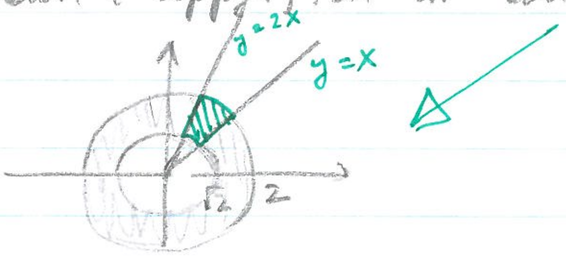
1.7 a) $2 \le x^2 + y^2 \le 4$ är en mängd mellan två cirklar (en ring) med centrum i origo och radierna $\sqrt{2}$ och 2.



$x \le y \le 2x$ är en mängd mellan linjerna $y = 2x$ och $y = x$ i den första kvadranten. Linjerna ingår

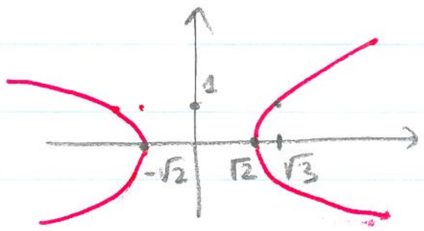


Mängden i uppgiften är alltså



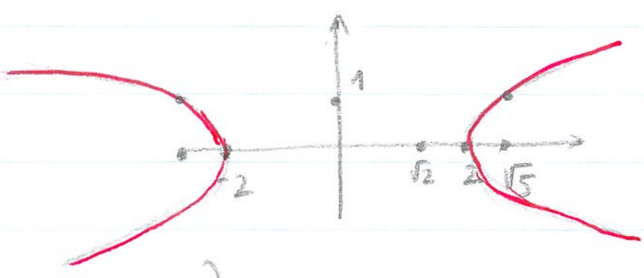
Randen ingår.

b) 1) $x^2 - y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 - 2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 2}$



(OBS! definierad endast för $x^2 - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge 2 \Leftrightarrow x \ge \sqrt{2}$ och $x \le -\sqrt{2}$)

2) $x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = x^2 - 4 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$, definierad för $x \in (-\infty; 2] \cup [2, +\infty)$

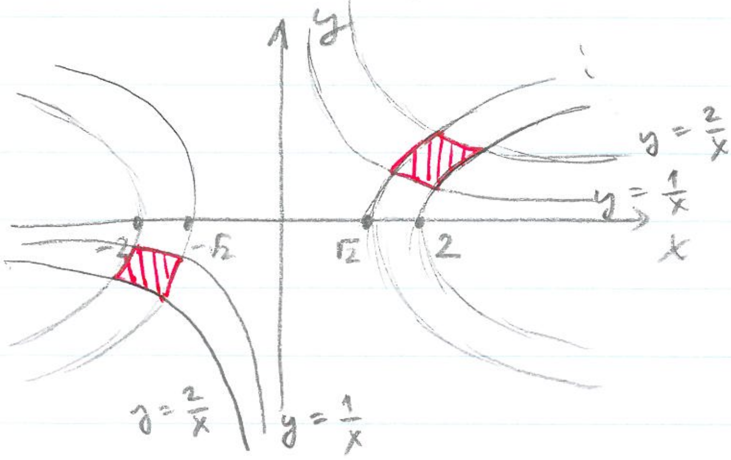


OBS! kurvorna 1) och 2) skär aldrig varandra

3) $xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$

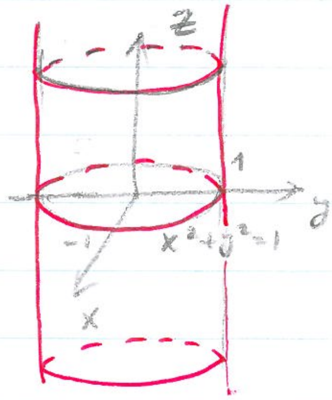
4) $xy = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{x}$

Den sökta mängden är alltså



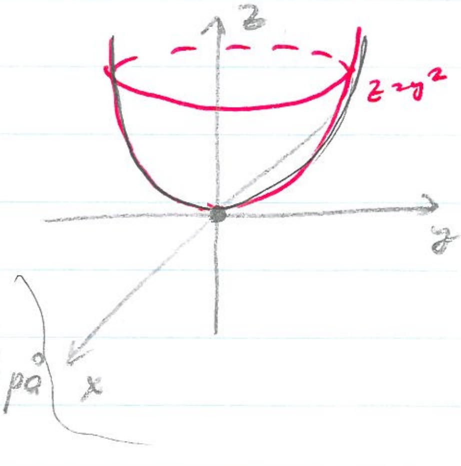
1.8

a) $x^2+y^2=1$ ($\Rightarrow$ z - vilken som helst)
är en cylinder



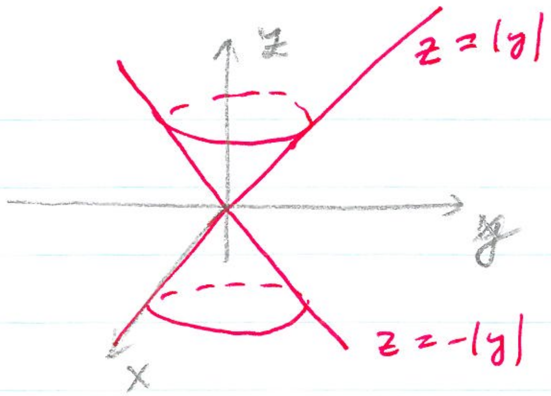
b) $z = x^2+y^2 \geq 0$

Om $x=0 \Rightarrow z = y^2$



OBS! För punkten (x,y)
är x^2+y^2 lika med
avstånd till z-axeln $\Rightarrow$
alla punkter (x,y) i planet $\{z=0\}$ på
samma avstånd till z-axeln
ger samma värde på z $\Rightarrow$ Mängden är rotations-symmetrisk! Roterar vi parabeln $z=y^2$
kring z-axeln får vi mängden (paraboloid)

c) $z^2 = x^2+y^2 \Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$
Mängden är igen rotationssymmetrisk. Vi ritar
grafen då $x=0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{y^2} \Leftrightarrow z = \pm|y|$
och sedan roterar kring z-axeln.



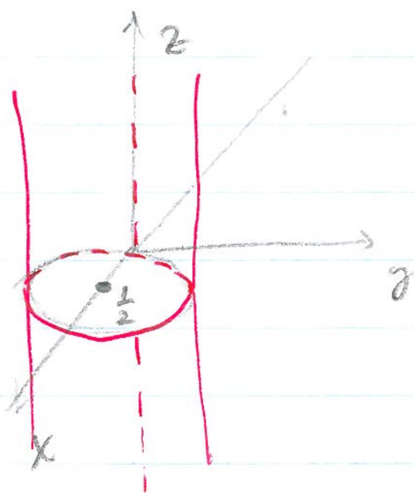
dubbelkon

d) $x^2+y^2=x \Leftrightarrow x^2-x+y^2=0 \Leftrightarrow$

$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ – i (x,y) planet

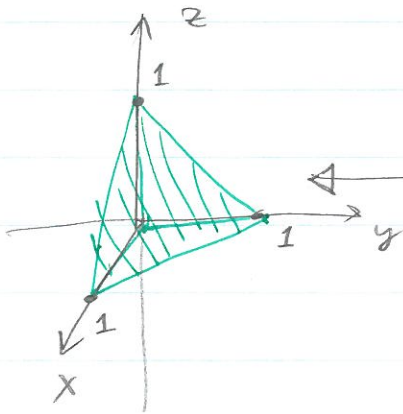
beskriver cirkel med centrum i $\left(\frac{1}{2},0\right)$ och radien $\frac{1}{2}$, och z kan vara vilken som helst!



Mängden är alltså en cylinder med radien $\frac{1}{2}$ som tangerar z-axeln.

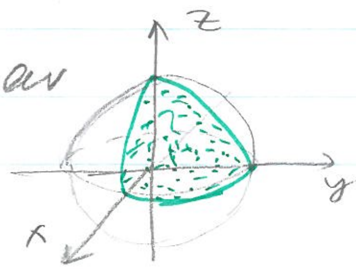
1.9

a) $x+y+z \leq 1$ är alla punkter som ligger under planet $x+y+z=1$. Måste kombineras med $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$



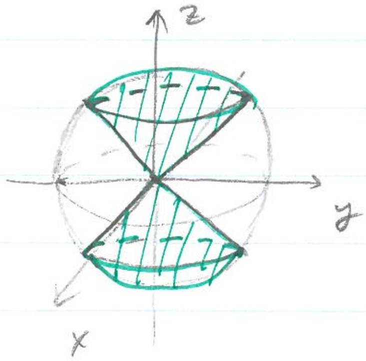
$\Rightarrow$ mängden i uppgiften är den här pyramiden.

b) Mängden är en åttonde del av en sfär $x^2+y^2+z^2=1$!

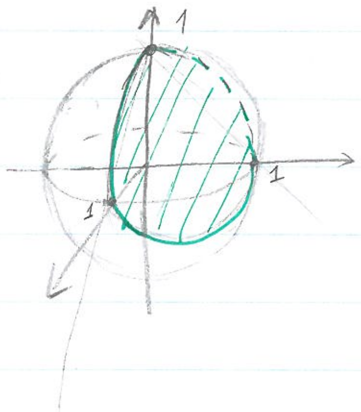


c) $x^2+y^2=z^2$ är konen från <u>1.8 c</u> $\Rightarrow$
$x^2+y^2 \le z^2$ är alla punkter som ligger inne i konen.

$x^2+y^2+z^2 \le 1 \Leftrightarrow z^2 \le 1-x^2-y^2$ är ett klot med radien 1.



d) Mängden är den del av planet $x+y+z=1$ som ligger i klotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$



d v s en cirkelskiva som går genom punkterna $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$.

<u>1.11</u> Den första mängden är

$x^2+y^2+z^2-2x-2z \le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 \le 2$

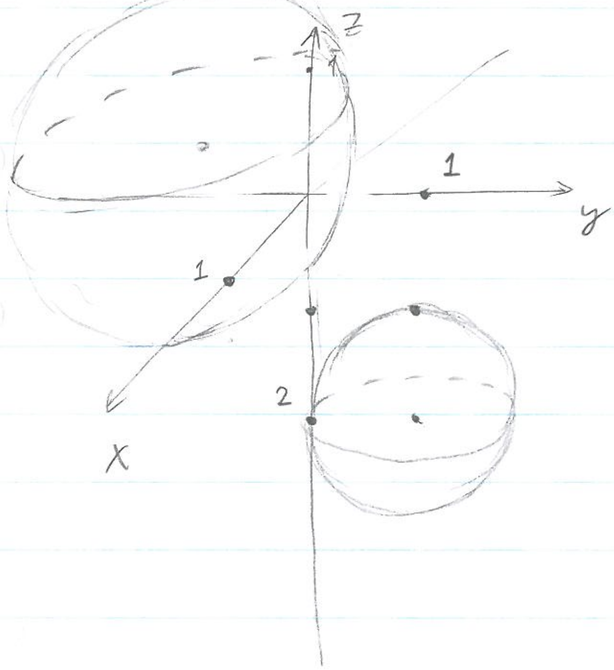
och den andra är

$x^2+y^2+z^2-2y+4z+4 \le 0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2+(z+2)^2 \le 1$

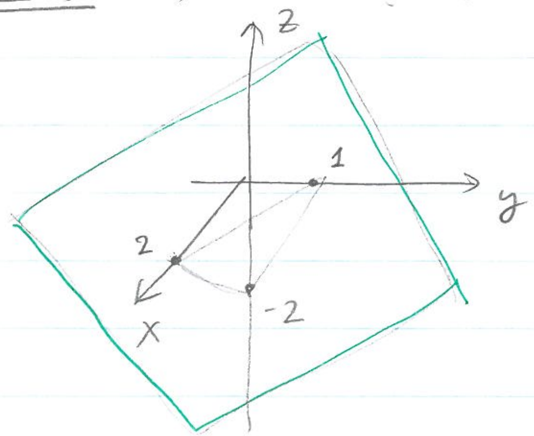
Båda är klot. Observera att den första har centrum i $(1,0,1)$ och radien $\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ z kan inte anta värden mindre än $1-\sqrt{2}$ för den första mängden.

Det andra klotet har centrum i $(0, 1, -2)$ och radien $1 \Rightarrow z$ kan inte anta värden större än $-2+1=-1$.

Eftersom $-1 < 1-\sqrt{2} \Rightarrow$ mängderna har inga gemensama punkter.

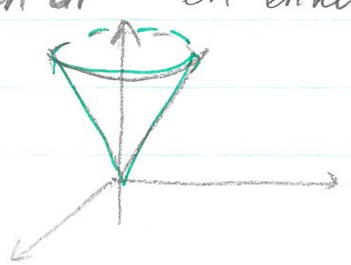


<u>1.12</u> a) $z = x + 2y - 2 \Leftrightarrow x + 2y - z = 2$ är ett plan



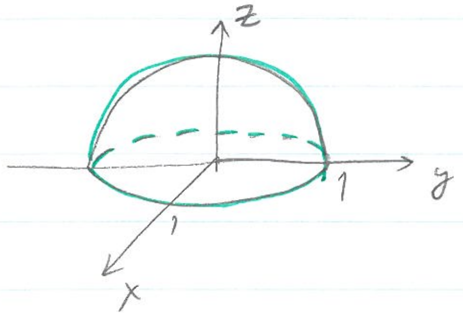
(som går genom punkterna $(2,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,-2)$).

b) $z = \sqrt{x^2+y^2}$ satisfierar $z \geq 0 \Rightarrow$ (se <u>1.8 c</u>) den är en enkel kon.



c) $z = x^2 + y^2$ är paraboloiden från <u>1.8 b</u>

d) $z = \sqrt{1-x^2-y^2} \iff \begin{cases} z^2 = 1 - x^2 - y^2 \\ z \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$

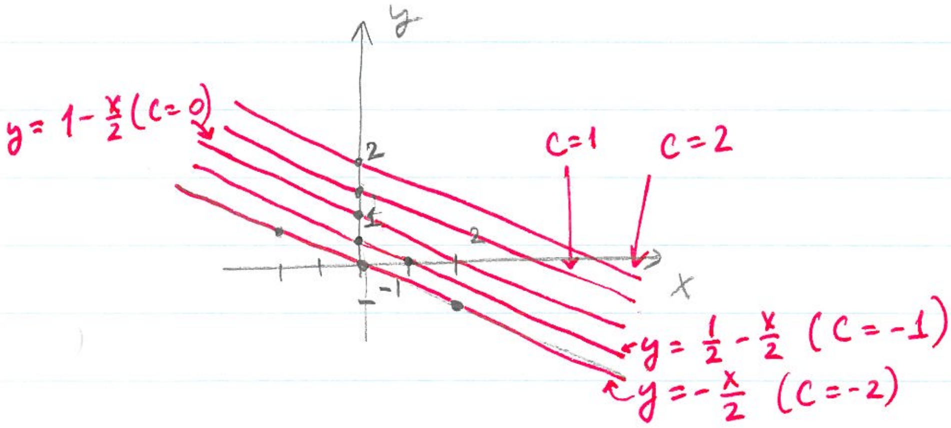


Övre ha

<u>1.13</u>

a) Nivåkurvorna till $z = x + 2y - 2$ har ekvationen

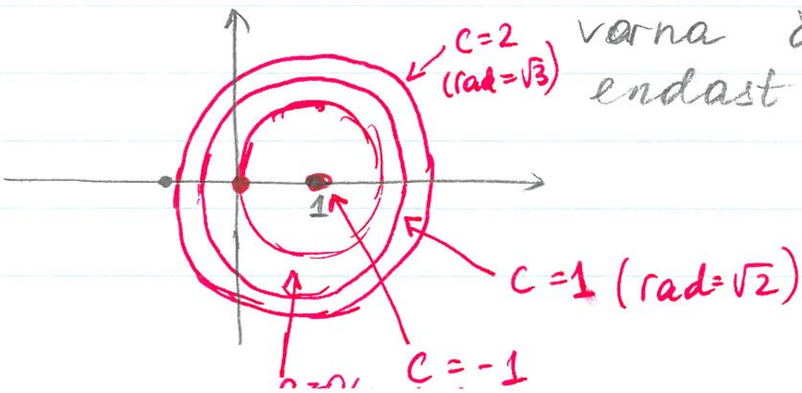
$C = x + 2y - 2 \iff y = \frac{C+2}{2} - \frac{x}{2}$ (de är räta linjer)



Ytan är ett plan.

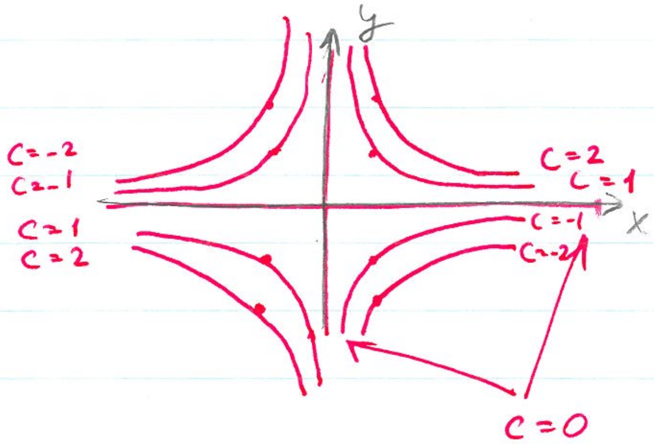
b) Nivåkurvorna beskrivs av $x^2 + y^2 - 2x = C \iff$

$(x-1)^2 + y^2 = C + 1$ (de är cirklar med centrum i $(1,0)$, radien växer när $C \uparrow$). OBS! Nivåkurvorna är definierade endast för $C \geq -1$.

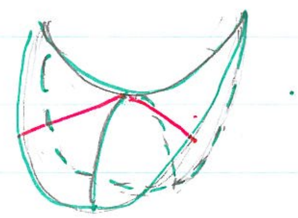


Ytan är en paraboloid med vertex i $(1, 0, -1)$.

c) Nivåkurvorna $xy = C$:



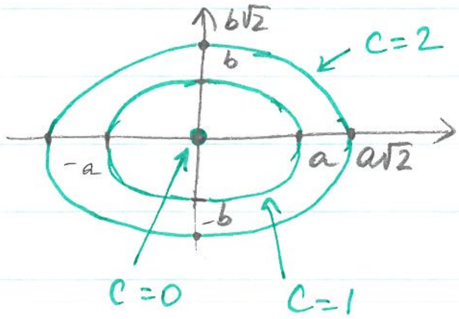
Ytan är en hyperboloisk paraboloid



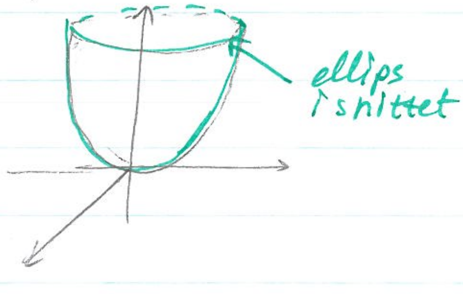
"Saddelyta"
innehåller två räta linjer!

d) $C = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ är ellipser med centrum i origo då $C > 0$. "Radien" växer då $C \uparrow$.

$C = -2$, $C = -1$ ger alltså ingen nivåkurva och $C = 0$ ger endast en punkt $(0,0)$.



Ytan är en elliptisk paraboloid



Extra

1.5 a)

Innre punkter $(0;1)$
randpunkter $\{0\}$ och $\{1\}$

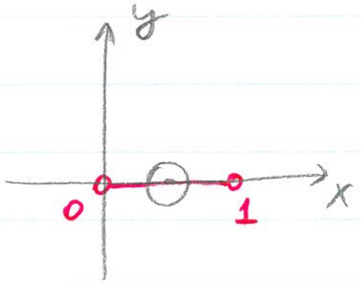
b) $x^2 \geq 0$ för alla x
$\Rightarrow M = \mathbb{R}$.
Alla punkter är inre punkter.
Inga randpunkter.

c) $2x > x^2+1 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 0$ – aldrig sant $\Rightarrow$
$M = \emptyset$. Inga randpunkter, inga inre punkter.

d)

Innre punkter – alla punkter i M.
Randpunkter: linjer $x=0$ och $x=1$.

e)



Inga innre punkter.
Randpunkter:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ y=0\}$.

1.6 Öppna mängder är b), c), d).

OBS! Tom mängd är både öppen och sluten.

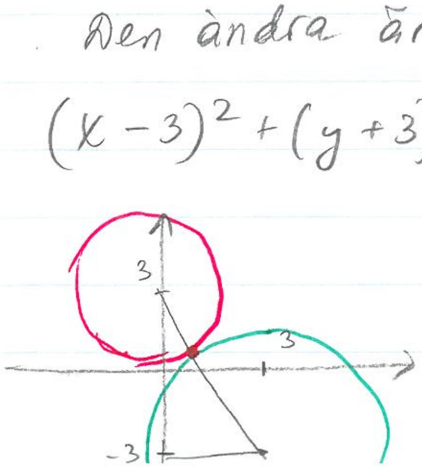
Slutna mängder är b), c).

Begränsade mängder är a), c), e).

1.10 Den första mängden är $x^2+y^2-6y+4 \le 0 \Leftrightarrow$
$x^2+(y-3)^2 \le 5$ – en cirkelskiva med centrum i $(0,3)$ och radien $\sqrt{5}$

Den andra är $x^2+y^2-6x+6y-2 \le 0 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y+3)^2 \le \underbrace{2+9+9}_{=20}$ – en cirkelskiva med centrum i $(3,-3)$ och radien $2\sqrt{5}$



OBS! avståndet mellan centrum är $\sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ är exakt $\sqrt{5}+2\sqrt{5} \Rightarrow$

dessa cirklar tangerar varandra.

Deras enda skärningspunkt ligger på linjen från (0, 3) till (−3, 3) d vs linjen $y = 3 - 2x$

$\Rightarrow$ den kan fås från ekvations-system $\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 5 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + (-2x)^2 = 5 \\ y = 3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x^2 = 5 \\ y = 3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

(vi ser att $x > 0$)

<u>Svar</u> (1, 1).