Lektion 10

Dagens teori:

Sats (se boken s.111)

Antag att $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ och att (a,b) är en stationär punkt d v s $\nabla f(a,b) = (0,0)$. Låt

$$A = f''_{xx}(a,b), \quad B = f''_{xy}(a,b), \quad C = f''_{yy}(a,b),$$

och betrakta $Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$.

I så fall gäller:

(a) Q positivt definit $\Rightarrow$ f har strängt lok. max i (a,b).

(b) Q negativt definit $\Rightarrow$ f har strängt lok. min i (a,b)

(c) Q indefinit $\Rightarrow$ f har varken max eller min i (a,b).

OBS! 1) Om Q är positivt/negativt semidefinit ger satsen inget svar.

2) Q kan undersökas via kvadratkomplettering eller genom att bestämma egenvärdena hos den tillhörande matrisen.

3) En liknande sats för tre variabler: låt
$A = f''_{xx}(a,b,c)$, $B = f''_{yy}(a,b,c)$, $C = f''_{zz}(a,b,c)$
$D = f''_{xy}(a,b,c)$, $E = f''_{xz}(a,b,c)$, $F = f''_{yz}(a,b,c)$
och undersök $Q(h,k,l) = Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ehl + 2Fkl$

2.69

a) $f(x,y) = x^4 - x^3y + x^2 - 2xy + 2y^2 - 1$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 4x^3 - 3x^2y + 2x - 2y \\ f'_y &= -x^3 - 2x + 4y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$$

d v s origo är en stationär punkt – OK!

$$\left.\begin{aligned} f''_{xx} &= 12x^2 - 6xy + 2 \\ f''_{xy} &= -3x^2 - 2 \\ f''_{yy} &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= f''_{xx}(0,0) = 2 \\ B &= f''_{xy}(0,0) = -2 \\ C &= f''_{yy}(0,0) = 4 \end{aligned}$$

Vi undersöker $Q(h,k) = \underbrace{2h^2 - 4hk + 4k^2}_{= Ah^2 + 2Bhk + Ck^2}$.

Kvadratkompletering ger

$Q(h,k) = 2h^2 - 4hk + 2k^2 + 2k^2 = 2(h-k)^2 + 2k^2 \geq 0$

och $Q(h,k) = 0$ om och endast om

$$\begin{cases} h-k=0 \\ k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h=0 \\ k=0 \end{cases} \Rightarrow Q(h,k) > 0 \text{ för } (h,k) \neq (0,0).$$

Vi ser att $Q(h,k)$ är positivt definit $\Rightarrow$

$(0,0)$ är <u>lok. min</u>.

b) $\underline{f(x,y) = x^2 + x^3 - 2xy + y^2}$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x + 3x^2 - 2y \\ f'_y &= -2x + 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0) - \text{ok!}$$

$$\left.\begin{aligned} f''_{xx} &= 2 + 6x \\ f''_{xy} &= -2 \\ f''_{yy} &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= f''_{xx}(0,0) = 2 \\ B &= f''_{xy}(0,0) = -2 \\ C &= f''_{yy}(0,0) = 2 \end{aligned}$$

Betrakta $Q(h,k) = \underbrace{2h^2 - 4hk + 2k^2}_{= Ah^2 + 2Bhk + Ck^2}.$

Kvadratkompletering ger

$$Q(h,k) = 2k^2 - 4hk + 2h^2 = 2(h-k)^2 \geq 0$$

men $Q(k,k) = 0$ för alla k! ~~D~~ vs $Q(h,k) > 0$ för alla $(h,k) \neq 0$ inte är uppfylld och $Q(h,k)$ är alltså positivt semidefinit. Satsen ger oss inget svar i detta fall.

Vi kan istället undersöka funktionens beteende nära origo. Observera att

$$f(x,y) = (x-y)^2 + x^3 \quad \text{och} \quad f(0,0) = 0.$$

Eftersom $f(y,y) = \begin{cases} y^3 > 0 & \text{då } y > 0 \\ y^3 < 0 & \text{då } y < 0 \end{cases}$

är varken $f(x,y) > f(0,0)$ eller $f(x,y) < f(0,0)$ uppfylld för alla (x,y) nära $(0,0)$.

<u>Slutsatsen!</u> f har varken max eller min i origo.

c) <u>$f(x,y,z) = 2\cos(x+y+z) + e^{xy} + e^{yz} + e^{zx}$</u>

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= -2\sin(x+y+z) + ye^{xy} + ze^{zx} \\ f'_y &= -2\sin(x+y+z) + xe^{xy} + ze^{yz} \\ f'_z &= -2\sin(x+y+z) + ye^{yz} + xe^{zx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla f(0,0,0) = (0,0,0) \text{- OK!}$$

$$f''_{xx} = -2\cos(x+y+z) + y^2e^{xy} + z^2e^{xy}$$

$$f''_{xy} = -2\cos(x+y+z) + e^{xy} + xye^{xy}$$

$$f''_{xz} = -2\cos(x+y+z) + e^{zx} + xze^{xz}$$

$$f''_{yy} = -2\cos(x+y+z) + x^2e^{xy} + z^2e^{yz}$$

$$f''_{yz} = -2\cos(x+y+z) + e^{yz} + yze^{yz}$$

$$f''_{zz} = -2\cos(x+y+z) + y^2e^{yz} + x^2e^{xz}$$

Låt

$A = f''_{xx}(0,0,0) = -2$ $\quad$ $D = f''_{xy}(0,0,0) = -2+1 = -1$

$B = f''_{yy}(0,0,0) = -2$ $\quad$ $E = f''_{xz}(0,0,0) = -2+1 = -1$

$C = f''_{zz}(0,0,0) = -2$ $\quad$ $F = f''_{yz}(0,0,0) = -2+1 = -1.$

Vi undersöker den kvadratiska formen

$$Q(h,k,\ell) = Ah^2 + Bk^2 + C\ell^2 + 2Dhk + 2Eh\ell + 2Fk\ell$$

$$= -2h^2 - 2k^2 - 2\ell^2 - 2hk - 2h\ell - 2k\ell =$$

$$= -h^2 - 2hk - k^2 - h^2 - 2h\ell - \ell^2 - k^2 - 2k\ell - \ell^2 =$$

$$= -(h+k)^2 - (h+\ell)^2 - (k+\ell)^2 \leq 0$$

för alla (h,k,ℓ), och

$$Q(h,k,\ell) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h+k=0 \\ h+\ell=0 \\ k+\ell=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell+\ell=0 \\ h=-\ell \\ k=\ell \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell=0 \\ h=-\ell=0 \\ k=\ell=0 \end{cases}$$

d v s $Q(h,k,\ell) < 0$ för $(h,k,\ell) \neq (0,0,0)$

Q är negativt definit $\Rightarrow$ origo är ett max punkt.

__2.70__ $f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

a) Alla stationära punkter fås från ekvationen $\nabla f(x,y) = (0,0)$ (d vs systemet
$\begin{cases} f'_x(0,0) = 0 \\ f'_y(0,0) = 0 \end{cases}$). Eftersom

$$f'_x = 8xe^y - 8x^3, \quad f'_y = 4x^2e^y - 4e^{4y}$$

måste vi lösa systemet

$$\begin{cases} 8xe^y - 8x^3 = 0 & (1) \\ 4x^2e^y - 4e^{4y} = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) blir $8x(e^y - x^2) = 0 \Rightarrow$
antingen $x = 0$ eller $e^y = x^2 \Leftrightarrow y = \ln x^2$

Om $x = 0 \Rightarrow$ (2) blir $-4e^{4y} = 0 \Rightarrow$ inga lösningar.

Om $y = \ln x^2 \Rightarrow$ (2) blir

$$4x^2e^{\ln x^2} - 4e^{4\ln x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^4 - x^8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^4(1 - x^4) = 0$$ och vi har sett att x kan inte vara noll.

$\Rightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, så $y = \ln 1 = 0$.

__Slutsatsen:__ $(\pm 1, 0)$ är funktionens enda stationära punkter.

b) <u>Undersöker (1,0).</u>

$$f''_{xx} = 8e^y - 24x^2$$

$$f''_{xy} = 8xe^y$$

$$f''_{yy} = 4x^2e^y - 16e^{4y}$$

Låt $A = f''_{xx}(1,0) = -16$, $B = f''_{xy}(1,0) = 8$

$C = f''_{yy}(1,0) = -12$

och betrakta $Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 =$

$= -16h^2 + 16hk - 12k^2$.

Kvadratkompletering ger

$$Q(h,k) = -\underbrace{16}_{4^2}h^2 + 2\cdot 4h\cdot 2k - \underbrace{4k^2}_{(2k)^2} - 8k^2 =$$

$$= -(4h - 2k)^2 - 8k^2 \leq 0 \text{ för alla } (h,k)$$

och $Q(h,k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4h = 2k \\ k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 0 \\ k = 0 \end{cases}$

dvs $Q(h,k) < 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$

Vi ser att <u>(1,0) är lok. max.</u>

<u>Undersöker (-1,0).</u> Här är

$A = f''_{xx}(-1,0) = -16$, $B = f''_{xy}(-1,0) = -8$,

$C = f''_{yy}(-1,0) = -12 \Rightarrow$

$$Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = -16h^2 - 16hk - 12k^2 =$$

$$= -16h^2 - 16hk - 4k^2 - 8k^2 =$$

$$= -(4h+2k)^2 - 8k^2 \leq 0$$

för alla (h,k)

och $Q(h,k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4h+2k = 0 \\ k^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 0 \\ k = 0 \end{cases}$.

Vi ser att $Q(h,k) < 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$, vilket betyder att $(-1,0)$ är lok. max

c) $g(x) = f(x,0) = 4x^2 - 2x^4 - 1$ ska undersökas.

att söka rötter inte är obligatoriskt! Derivatan ger tillräckligt med information

Ekvationen $4x^2 - 2x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

Kvadratkompletering ger

$4x^4 - 4x^2 + 1 - 2x^4 = 0 \Leftrightarrow$

$(2x^2 - 1)^2 - (\sqrt{2}x^2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(2x^2 - 1 - \sqrt{2}x^2)(2x^2 - 1 + \sqrt{2}x^2) = 0$

$((2-\sqrt{2})x^2 - 1)((2+\sqrt{2})x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$

Vi har fyra rötter $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}}}$ och $x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{2}}}$

$$g'(x) = 8x - 8x^3 = 8x(1-x^2) = 8x(1-x)(1+x)$$

$\Rightarrow$ $\uparrow$ $+$ (-1) $\downarrow$ $-$ (0) $\uparrow$ $+$ (1) $\downarrow$ $-$ $\quad g'(x)$

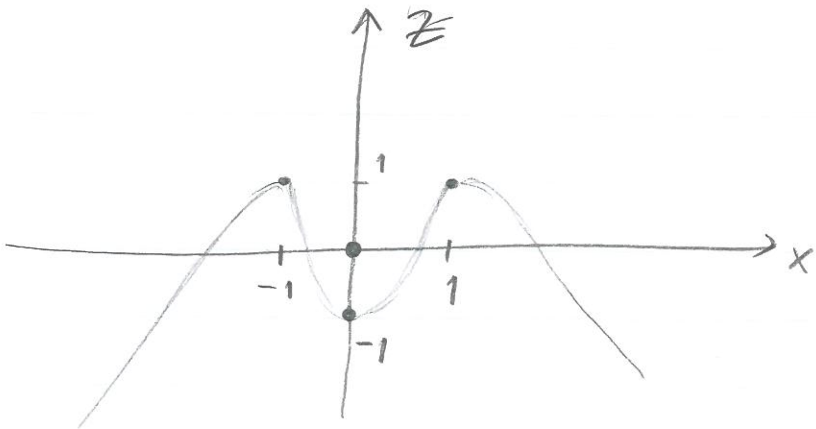
$\Rightarrow$ $x = 0$ är en lok. min
$x = \pm 1$ är max punkter

När $x \to \pm\infty$ $\quad g(x) = -2x^4\left(1 - \underbrace{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2x^4}}_{\to 0}\right) \to -\infty$

Vi kan skissera grafen!

$g(0) = -1$

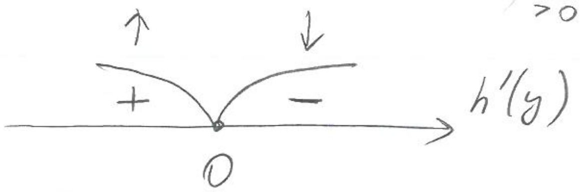
$g(\pm 1) = 1$



d) $h(y) = f(\pm 1, y) = 4e^y - 2 - e^{4y}$ ska undersökas

$$h'(y) = 4e^y - 4e^{4y} = 4e^y(1 - e^{3y})$$

$$\Rightarrow h'(y) = 0 \iff \underbrace{4e^y}_{>0}(1 - e^{3y}) = 0 \iff y = 0$$

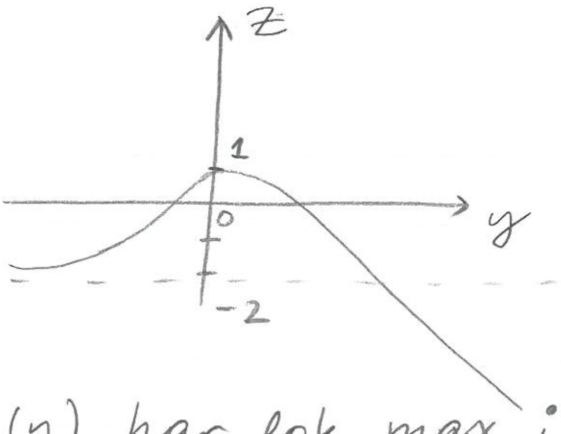


$\Rightarrow$ $\boxed{y = 0 \text{ är en lok max. punkt}}$

$$\lim_{y\to\infty} h(y) = \lim_{y\to\infty} -e^{4y}\left(1 - \underbrace{4e^{-3y} - 2e^{-4y}}_{\to 0}\right) = -\infty$$

$$\lim_{y\to-\infty} h(y) = \lim_{y\to-\infty}\left(\underbrace{4e^y - e^{4y}}_{\to 0} - 2\right) = -2$$

$h(0) = 1$



e) $h(y)$ har lok. max i $y = 0$ och $g(x)$ har lok. max i $x = \pm 1$.

f) $g(x) = f(x,0)$ beskriver endast f:s beteende längs linjen $y=0$ men förklarar inte hur $f(x,y)$ ser ut för y nära 0.

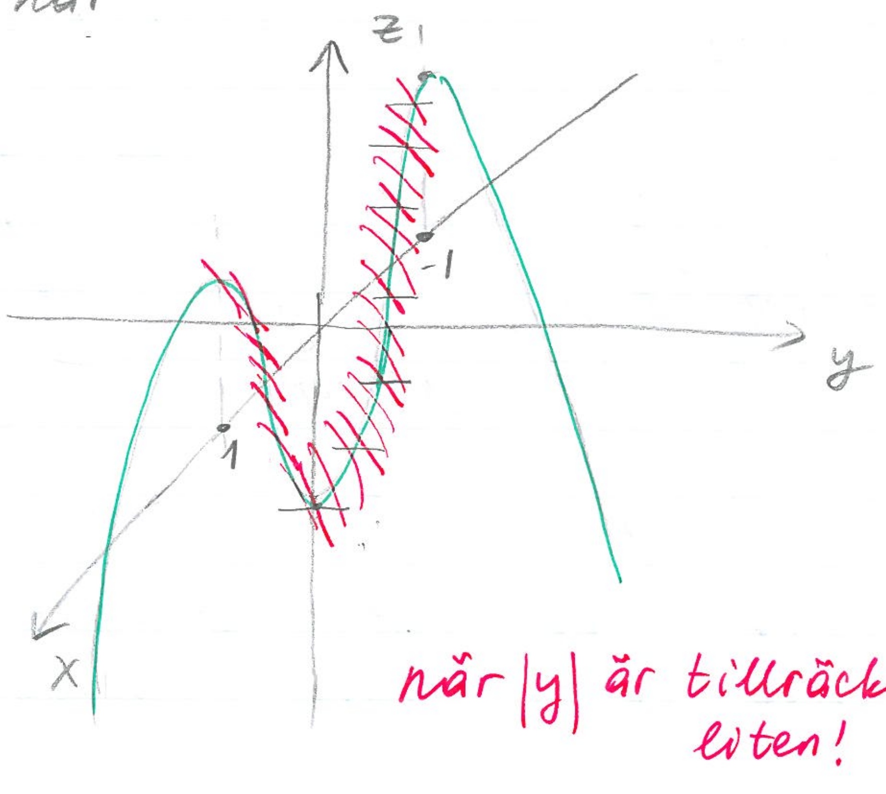
$$f'_y(x,y) = 4x^2 e^y - 4e^{4y}.$$

När $|x|<1$ (dvs mellan topparna $x=1$ och $x=-1$) och när $y=0$ får vi

$$f'_y(x,0) = 4\underbrace{x^2}_{<1} - 4 < 4-4 < 0$$

Det betyder att f avtar när vi befinner oss i närheten av linjen $y=0$ och går längs linjen $x = \text{konst}$

Så vägen mellan topparna ser ut ungefär så här



när $|y|$ är tillräckligt liten!

2.72

a) $f(x,y) = 3 + 4x - 4y - x^2 - 2y^2$

Söker stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2x = 0 \\ -4 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Kontrollerar om detta är en lok. max/min:

$f''_{xx} = -2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = -4$

Den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 =$$
$$= -2h^2 - 4k^2$$

är negativt definit (som vanligt, $A = f''_{xx}(2,-1)$, $B = f''_{xy}(2,-1)$, $C = f''_{yy}(2,-1)$).

$\Rightarrow$ $(2,-1)$ är lok. maximipunkt.

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$.

Stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \\ 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - y + 1 = 0 \\ x = 2y \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$$

Undersöker om detta är lok. max/min.

Vi ser att

$A = f''_{xx}(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1) = 2$ $\quad D = f''_{xy}(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1) = -1$

$B = f''_{yy}(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1) = 2$ $\quad E = f''_{xz}(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1) = 0$

$C = f''_{zz}(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1) = 2$ $\quad F = f''_{yz}(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1) = 0$

och den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ehl + 2Fkl$$

$$= 2h^2 + 2k^2 + 2l^2 - 2hk =$$

$$= 2\left(h^2 - hk + \frac{k^2}{4}\right) + 2k^2 + 2l^2 - \frac{k^2}{2} =$$

$$= 2\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{2} + 2l^2 \geq 0$$

och $Q(h,k,l) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{k}{2} \\ k = 0 \\ l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (h,k,l) = (0,0,0)$

d v s $Q(h,k,l) > 0$ om $(h,k,l) \neq (0,0,0)$.

d v s Q är positivt definit $\Rightarrow$ $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1)$ är lok. minimipunkt.

c) $f(x,y) = xe^{-2x^2-y^2}$.

$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-2x^2-y^2} - 4x^2 e^{-2x^2-y^2} = 0 \\ -2yxe^{-2x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-4x^2=0 \\ -2yx=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{1}{2} & \text{(från den 1a)} \\ y=0 & \text{(från den 2a)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $(\pm\frac{1}{2};0)$ är stationära punkter.

$$f''_{xx} = -4xe^{-2x^2-y^2} - 8xe^{-2x^2-y^2} + 16x^3e^{-2x^2-y^2} =$$
$$= (-12x+16x^3)e^{-2x^2-y^2}$$

$$f''_{xy} = -2ye^{-2x^2-y^2} + 8x^2y\,e^{-2x^2-y^2} =$$
$$= (-2y+8x^2y)e^{-2x^2-y^2}$$

$$f''_{yy} = -2xe^{-2x^2-y^2} + 4y^2xe^{-2x^2-y^2}$$
$$= (-2x+4y^2x)e^{-2x^2-y^2}$$

Undersöker $(\frac{1}{2};0)$:

$A=f''_{xx}(\frac{1}{2};0) = (-6+2)e^{-\frac{1}{2}} = -4e^{-\frac{1}{2}} < 0$

$B=f''_{xy}(\frac{1}{2};0) = 0$

$C=f''_{yy}(\frac{1}{2};0) = -e^{-\frac{1}{2}} < 0$

I så fall $Q(h,k) = (-4e^{-\frac{1}{2}})h^2 + (-e^{-\frac{1}{2}})k^2$ är negativt definit $\Rightarrow$ $(\frac{1}{2};0)$ är ett lokalt maximipunkt.

Undersöker $(-\frac{1}{2};0)$:

$$A = f''_{xx}(-\tfrac{1}{2};0) = (6-2)e^{-\frac{1}{2}} = 4e^{-\frac{1}{2}} > 0$$

$$B = f''_{xy}(-\tfrac{1}{2};0) = 0$$

$$C = f''_{yy}(-\tfrac{1}{2};0) = e^{-\frac{1}{2}} > 0$$

I så fall $Q(h,k) = (4e^{-\frac{1}{2}})h^2 + e^{-\frac{1}{2}}k^2$ är positivt definit $\Rightarrow$

$(-\frac{1}{2};0)$ är ett lokalt minimipunkt

d) $f(x,y) = x + y - 3\ln(2+xy)$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{3y}{2+xy} = 0 \\ 1 - \dfrac{3x}{2+xy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2+xy-3y}{\cancel{2+xy}} = 0 \\ \dfrac{2+xy-3x}{\cancel{2+xy}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2+xy = 3y \\ 2+xy = 3x \end{cases}$$

($2+xy>0$ så att $\ln(2+xy)$ är definierad)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{3}x = \cancel{3}y \\ 2+xy = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2+y^2 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-3y+2 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)(y-2) = 0 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \boxed{(1,1) \text{ och } (2,2) \text{ är stationära punkter.}}$$

$$f''_{xx} = \frac{3y^2}{(2+xy)^2}$$

$$f''_{xy} = \frac{-3(2+xy) - x(-3y)}{(2+xy)^2} = \frac{-6}{(2+xy)^2}$$

$$f''_{yy} = \frac{3x^2}{(2+xy)^2}.$$

Undersöker $(1,1)$:

$$\left.\begin{aligned} A &= f''_{xx}(1,1) = \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3} \\ B &= f''_{xy}(1,1) = -\frac{6}{3^2} = -\frac{2}{3} \\ C &= f''_{yy}(1,1) = \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3} \end{aligned}\right] \Rightarrow Q(h,k) =$$

$$= \frac{1}{3}h^2 - \frac{4}{3}hk + \frac{1}{3}k^2$$

$$= \frac{1}{3}(h-2k)^2 + \frac{1}{3}k^2 - \frac{4}{3}k^2$$

$$= \frac{1}{3}(h-2k)^2 - k^2$$

är icke-definit!

$\Rightarrow (1,1)$ är varken max eller min!

Undersöker $(2,2)$:

$$\left.\begin{aligned} A &= f''_{xx}(2,2) = \frac{12}{6^2} = \frac{1}{3} \\ B &= f''_{xy}(2,2) = -\frac{6}{6^2} = -\frac{1}{6} \\ C &= f''_{yy}(2,2) = \frac{12}{6^2} = \frac{1}{3} \end{aligned}\right] \Rightarrow Q(h,k) =$$

$$= \frac{1}{3}h^2 - \frac{1}{3}hk + \frac{1}{3}k^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(h^2 - hk + \frac{k^2}{4} + \frac{3k^2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}k^2 \geq 0$$

$$Q(h,k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{k}{2} \\ k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (h,k) = (0,0) \Rightarrow$$

$Q(h,k) > 0$ för $(h,k) \neq (0,0)$.

g) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{x} \quad (x \neq 0) \\ \frac{4}{x^2} + x^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ (x^2-1)(x^2-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = 0 \end{cases}$$

Stat. punkter är alltså: $\boxed{(1,2), (-1,-2), (2,1), (-2,-1).}$

$$\begin{cases} f''_{xx} = 6x \\ f''_{xy} = 6y \\ f''_{yy} = 6x \end{cases}$$

Undersöker $(1,2)$:

$A = f''_{xx}(1,2) = 6, \quad B = f''_{xy}(1,2) = 12, \quad C = f''_{yy}(1,2) = 6$

$Q(h,k) = 6h^2 + 24hk + 6k^2 = 6(h^2 + 4hk + 4k^2 - 3k^2) =$

$= 6(h+2k)^2 - 18k^2$ - indefinit $\Rightarrow$

$(1,2)$ är varken max eller min

Undersöker $(-1;-2)$:

$A = f''_{xx}(-1;-2) = -6$, $B = f''_{xy}(-1;-2) = -12$
$C = f''_{yy}(-1;-2) = -6$

$Q(h,k) = -6h^2 - 24hk - 6k^2 =$
$= -6(h^2 + 4hk + 4k^2 - 3k^2) =$
$= -6(h+2k)^2 + 18k^2$ - indefinit

$\Rightarrow$ $(-1;-2)$ är varken max eller min.

Undersöker $(2;1)$:

$A = f''_{xx}(2;1) = 12$, $B = f''_{xy}(2,1) = 6$

$C = f''_{yy}(2;1) = 12$ $\Rightarrow$

$Q(h,k) = 12h^2 + 12hk + 12k^2 =$
$= 12\left(h^2 + hk + \frac{k^2}{4} + \frac{3k^2}{4}\right) = 12\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + 9k^2$

är positivt definit

$\Rightarrow$ $(2;1)$ är lok. min.

Undersöker $(-2;-1)$:

$A = f''_{xx}(-2;-1) = -12$, $B = f''_{xy}(-2,-1) = -6$

$C = f''_{yy}(-2;-1) = -12$ $\Rightarrow$

$$Q(h,k) = -12h^2 - 12hk - 12k^2 = -12\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 - 9k^2$$

är negativt definit $\Rightarrow$

$(-2; -1)$ är lok. max.

i) $f(x,y) = 4x^2 + 4xy^2 + y^4 + y^5$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y^2 = 0 \\ 8xy + 4y^3 + 5y^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y^2 \\ \cancel{-4y^3} + \cancel{4y^3} + 5y^4 = 0 \end{cases}$$

ger en stationär punkt $(0,0)$.

$$f''_{xx} = 8, \quad f''_{xy} = 8y, \quad f''_{yy} = 8x + 12y^2 + 20y^3$$

$A = f''_{xx}(0,0) = 8$, $B = f''_{xy}(0,0) = 0$,
$C = f''_{yy}(0,0) = 0$.

$Q(h,k) = 8h^2$ är positivt semidefinit eftersom $Q(h,k) \geq 0$, men $Q(0,k) = 0$ för alla $k \in \mathbb{R}$.

Vi tittar på $f(x,y)$ för (x,y) nära $(0,0)$ och jämför med $f(0,0) = 0$

$f(x,y) = (2x + y^2)^2 + y^5 \Rightarrow \left| \text{låt } x = -\frac{y^2}{5} \right|$

$$f\left(-\frac{y^2}{2}, y\right) = y^5 = \begin{cases} >0 & \text{då } y>0 \\ <0 & \text{då } y<0 \end{cases}$$

Vi ser att $f(x,y) > f(0,0)$ längs kurvan $x = -\frac{y^2}{5}$, $y>0$ och $f(x,y) < f(0,0)$ längs kurvan $x = -\frac{y^2}{5}$, $y<0$.

Det betyder att <u>(0,0) är varken max eller min punkt.</u>

Extra

<u>2.72</u>

h) <u>$f(x,y) = (x^2+y^2-4)e^{-x-y}$</u>

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xe^{-x-y} - (x^2+y^2-4)e^{-x-y} = 0 \\ 2ye^{-x-y} - (x^2+y^2-4)e^{-x-y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x^2+y^2-4 \\ 2y = x^2+y^2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{2}x = \cancel{2}y \\ 2x = x^2+y^2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

vilket ger stationära punkter $(-1,-1)$ och $(2,2)$.

$$f''_{xx} = \left((2x - x^2 - y^2 + 4)e^{-x-y}\right)'_x = (2-2x)e^{-x-y} -$$
$$-(2x - x^2 - y^2 + 4)e^{-x-y} = (-2 - 4x + x^2 + y^2)e^{-x-y}$$

$$f''_{xy} = \left(\left(2x-x^2-y^2+4\right)e^{-x-y}\right)'_y =$$

$$= -2y\,e^{-x-y} - (2x-x^2-y^2+4)e^{-x-y} =$$

$$= -(2x+2y-x^2-y^2+4)e^{-x-y}$$

$$f''_{yy} = \left(\left(2y-x^2-y^2+4\right)e^{-x-y}\right)'_y =$$

$$= (2-2y)e^{-x-y} - (2y-x^2-y^2+4)e^{-x-y} =$$

$$= (-2-4y+x^2+y^2)e^{-x-y}$$

<u>Undersöker $(-1,-1)$:</u>

$$A = f''_{xx}(-1,-1) = (-2+4+1+1)e^2 = 4e^2$$

$$B = f''_{xy}(-1,-1) = -(-2-2-1-1+4)e^2 = 2e^2$$

$$C = f''_{yy}(-1,-1) = (-2+4+1+1)e^2 = 4e^2$$

$$\Rightarrow Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = 4e^2h^2 + 4e^2hk + 4e^2k^2 =$$

$$= 4e^2\left(h^2 + hk + \frac{k^2}{4} + \frac{3k^2}{4}\right) =$$

$$= 4e^2\left(h+\frac{k}{2}\right)^2 + 3e^2k^2 \geq 0$$

och $Q(h,k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ h+\frac{k}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow (h,k)=(0,0) \Rightarrow$

Q är positivt definit, <u>$(-1,-1)$ är lok. min.</u>

<u>Undersöker $(2,2)$:</u>

$$A = f''_{xx}(2,2) = (-2-8+4+4)e^{-4} = -2e^{-4}$$

$$B = f''_{xy}(2,2) = -4e^{-4} - \cancel{(4-4-4+4)}e^{-4} = -4e^{-4}$$

$$C = f''_{yy}(2,2) = (-2 - \cancel{8} + \cancel{4} + \cancel{4})e^{-4} = -2e^{-4}$$

$$\Rightarrow Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = -2e^{-4}h^2 - 8e^{-4}hk - 2e^{-4}k^2 =$$

$$= -2e^{-4}(h^2 + 4hk + 4k^2 - 3k^2) =$$

$$= -2e^{-4}(h+2k)^2 + 6e^{-4}k^2.$$

$Q(h,k)$ är indefinit eftersom

$Q(-2k,k) = 6e^{-4}k^2 > 0$ för alla $k \neq 0$

medan

$Q(h,0) = -2e^{-4}h^2 < 0$ för alla $h \neq 0$,

vilket betyder att (2, 2) är varken lok. max eller lok min.

j) $f(x,y,z) = 4x + \frac{y^2}{x} + \frac{4z^2}{y} + \frac{8}{z}$.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \frac{y^2}{x^2} = 0 \\ \frac{2y}{x} - \frac{4z^2}{y^2} = 0 \\ \frac{8z}{y} - \frac{8}{z^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = y^2 & (1) \\ 2y^3 = 4z^2x & (2) \\ \cancel{8}z^3 = \cancel{8}y & (3) \end{cases}$$

$z^3 = y \rightsquigarrow (2)$ ger $2z^9 = 4z^2 \cdot x \Rightarrow x = \frac{1}{2}z^7$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2}z^7 \\ y = z^3 \end{cases} \rightsquigarrow (1)$ ger $z^{14} = z^6 \Leftrightarrow z^8 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ y = \pm 1 \end{cases}$ Vi har alltså 2 stat. punkter $(\frac{1}{2}, 1, 1)$ och $(-\frac{1}{2}, -1, -1)$.

$$f''_{xx} = +\frac{2y^2}{x^3}, \quad f''_{xy} = -\frac{2y}{x^2}, \quad f''_{xz} = 0$$

$$f''_{yy} = \frac{2}{x} + \frac{8z^2}{y^3}, \quad f''_{yz} = -\frac{8z}{y^2},$$

$$f''_{zz} = \frac{8}{y} + \frac{16}{z^3}.$$

Undersöker $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$:

$$A = f''_{xx}\left(\tfrac{1}{2}, 1, 1\right) = 16,$$

$$B = f''_{yy}\left(\tfrac{1}{2}, 1, 1\right) = 4 + 8 = 12$$

$$C = f''_{zz}\left(\tfrac{1}{2}, 1, 1\right) = 8 + 16 = 24$$

$$D = f''_{xy}\left(\tfrac{1}{2}, 1, 1\right) = -8$$

$$E = f''_{xz}\left(\tfrac{1}{2}, 1, 1\right) = 0$$

$$F = f''_{yz}\left(\tfrac{1}{2}, 1, 1\right) = -8$$

$$Q(h,k,l) = 16h^2 + 12k^2 + 24l^2 - 16hk - 16kl =$$

$$= 16\left(h^2 - hk + \frac{k^2}{4}\right) + 12k^2 - 4k^2 + 24l^2 - 16kl =$$

$$= 16\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + 8k^2 - 16kl + 8l^2 + 16l^2 =$$

$$= 16\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + 8(k-l)^2 + 16l^2 \geq 0$$

och $Q(h,k,l) = 0 \iff \begin{cases} h = \frac{k}{2} \\ k = l \\ l = 0 \end{cases} \iff (h,k,l) = (0,0,0),$

så Q är positivt definit och $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ är lok. min

Undersöker $(-\frac{1}{2}, -1, -1)$:

$A = -16$, $B = -12$, $C = -24$, $D = 8$, $E = 0$,
$F = 8$, så

$$Q(h,k,\ell) = -16h^2 - 12k^2 - 24\ell^2 + 16hk + 16k\ell =$$

$$= -16\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 - 8(k-\ell)^2 - 16\ell^2$$

är negativt definit $\Rightarrow$ $(-\frac{1}{2}, -1, -1)$ är lok max.

2.73

Det är uppenbart att $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

har strikt lok. min i origo eftersom $f(0,0) = 0 \Rightarrow$

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} > 0 = f(0,0) \text{ för alla } (x,y) \neq (0,0).$$

I alla $(x,y) \neq (0,0)$ är f i klass C^k för alla k (när vi deriverar $f(x,y)$ k ggr är nämnaren av derivatan $(x^2+y^2)^k \neq 0$ och täljaren är en kontinuerlig funktion, så alla derivator är kontinuerliga funktioner), så lok. max/min punkter kan sökas mha derivering. Vi ser att

$$f'_x = \frac{4x^3(x^2+y^2) - 2x(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^5 + 4x^3y^2 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y = \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^5 + 4y^3x^2 - 2yx^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^5+4x^3y^2-2xy^4=0 \\ 2y^5+4y^3x^2-2yx^4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+2x^2y^2-y^4=0 \\ y^4+2x^2y^2-x^4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2y^2=0 & \text{(har adderat ekvationerna)} \\ 2x^4-2y^4=0 & \text{(1a minus 2a)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4=y^4 \Leftrightarrow x^2=y^2 \\ \cancel{4}x^2y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2 \\ x^4=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(0,0),$$

vilket betyder att det finns inga stationära punkter i $\mathbb{R}^2 \setminus (0;0)$.

Svar: $(0,0)$ är lok min.

2.74 Det kan hända att
$A = f''_{xx}(a,b) > 0$, $B = f''_{xy}(a,b) > 0$,
$C = f''_{yy}(a,b) > 0$ men

$$Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$

är indefinit i vilket fall (a,b) är inte lok. minimipunkt. Detta kan även hända om $Q(h,k)$ är semidefinit.

För att ge en motexempel, vi kan modifiera 2.69 b och studera $f(x,y) = x^2 + x^3 + 2xy + y^2$ i origo.

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 3x^2 + 2y \\ f'_y = 2x + 2y \end{cases} \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0) \text{ – ok!}$$

Vi ser att

$$\begin{cases} f''_{xx} = 2 + 6x \\ f''_{xy} = 2 \\ f''_{yy} = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= f''_{xx}(0,0) = 2 \\ B &= f''_{xy}(0,0) = 2 \\ C &= f''_{yy}(0,0) = 2 \end{aligned}$$

I detta fall är $Q(h,k) = 2h^2 + 4hk + k^2 =$
$= 2(h+k)^2$
positivt semidefinit.

Men vi ser att

$f(x,y) = (x+y)^2 + x^3$ satisfierar $f(0,0) = 0$ och

$$f(x,-x) = \begin{cases} x^3 > 0 & \text{då } x > 0 \\ x^3 < 0 & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

Vilket innebär att $(0,0)$ kan inte vara en minimipunkt trots att alla andra ordningens partiella derivator är positiva i origo.

Se även 2.72 g, punkt $(1,2)$!