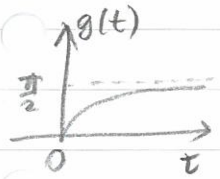
Lektion 13

4.4

a) $f(x,y) = \arctan(x^2+2y^2) \to \max/\min$
på $D = \mathbb{R}^2$ (ej kompakt!)

Vi inför ett variabelbyte $x^2+2y^2 = t \geq 0$
och studerar $g(t) = \arctan t$ för $t \geq 0$.



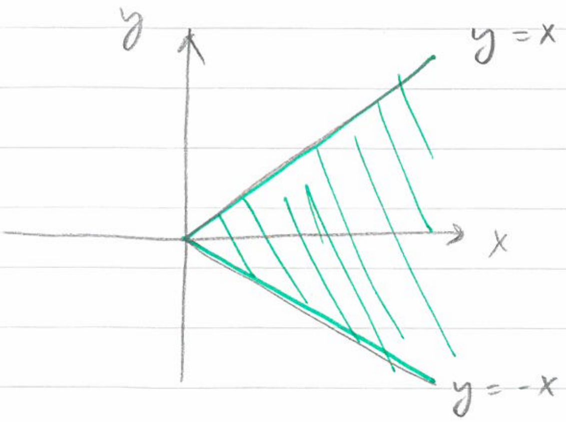
$g(t)$ är en strängt växande funktion
som har sitt minsta värde 0 i $t=0$,
och saknar sitt största värde.

Detta innebär att $f(x,y) = \arctan(x^2+2y^2)$
har sitt minsta värde då $x^2+2y^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ men saknar sitt största
värdet.

Svar $f_{min} = 0 = f(0,0)$
f_{max} saknas

c) $f(x,y) = \dfrac{e^{y^2-x^2}}{1+y^2} \to \max/\min$ på

$D = \{|y| \leq x\} \Leftrightarrow D = \{x \geq 0;\ -x \leq y \leq x\}$



Eftersom $|y| \leq x$ i $D \Rightarrow y^2 \leq x^2$ i $D \Leftrightarrow$
$y^2 - x^2 \leq 0$ i D,

så $e^{y^2-x^2} \leq e^0 = 1$ och vi kan uppskatta

$$f(x,y) \leq \frac{1}{1+\underbrace{y^2}_{\geq 0}} \leq \frac{1}{1} \leq 1.$$

Vi ser att $f(x,y) \leq 1$ i D och
$f(x,y) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 \\ y^2 = 0 \end{cases}$ dvs när $(x,y) = (0,0)$.

Funktionens största värdet är alltså 1 i origo.

$$f(x,y) = \frac{e^{y^2-x^2}}{1+y^2} > 0 \quad \text{för alla } (x,y)$$

och $f(x,y) \to 0$ längs visa kurvor t ex

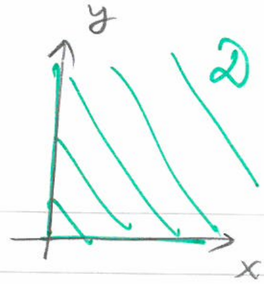
$$\lim_{\substack{y=0 \\ x\to\infty}} \frac{e^{y^2-x^2}}{1+y^2} = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Samtidigt är $f(x,y) = \dfrac{e^{y^2-x^2}}{1+y^2}$ aldrig lika med noll då $e^{y^2-x^2} > 0$ alltid.

Detta innebär att det minsta värdet saknas.

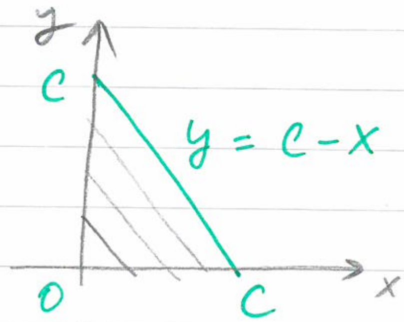
d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{4+(x+y)^3} \rightarrow$ max/min

då $(x,y) \in \mathcal{D} = \{x \geq 0,\ y \geq 0\}$



Vi ska lösa problemet på så sätt:

Vi studerar $f(x,y)$ längs en linje $y = c - x \quad 0 \leq x \leq c$ och hittar det största/minsta värdet. Det kan i princip bero på c. Vi går sedan genom alla möjliga positiva c och finner funktionens största/minsta värdet.



Dessa linjer $y = c - x$ spänner området $\mathcal{D}$ då c varierar mellan 0 och $+\infty$.

Längs linjen $y = c - x \quad 0 \leq x \leq c$ kan $f(x,y)$ skrivas som

$$g(x) = f(x, c-x) = \frac{x(c-x)}{4+c^3} = \frac{-x^2 + cx}{4+c^3}, \qquad 0 \leq x \leq c$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x + c}{4+c^3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{c}{2} \in (0, c)$$

då $c > 0$

"Intressanta värden" är alltså

$g(0) = f(0,c) = 0, \quad g(c) = f(c,0) = 0$

och $g\left(\frac{c}{2}\right) = f\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right) = \dfrac{c^2}{4c^3+16}$

Då ser vi att för varje linje $y = c - x$, $0 \le x \le c$ är funktionens minsta värde 0 och det antas i $(c, 0)$ och $(0, c)$.

I så fall $f_{min} = 0 = f(x, 0) = f(0, y)$ för alla $x \ge 0$ och $y \ge 0$.

Dessutom är funktionens största värde längs linjen $y = c - x$ $\quad 0 \le x \le c$ lika med

$$f\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right) = \frac{c^2}{4c^3 + 16}.$$

Vi vill veta för vilket c det är störst.

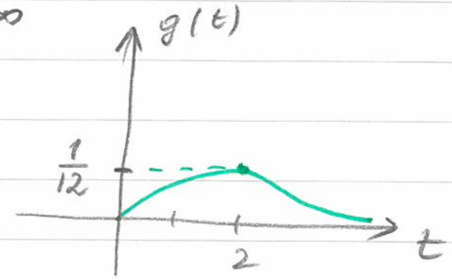
Betrakta $g(t) = \dfrac{t^2}{4t^3 + 16}$. I så fall

$$g'(t) = \frac{2t(4t^3+16) - 12t^4}{(4t^3+16)^2} = \frac{32t - 4t^4}{(4t^3+16)^2} =$$

$$= \frac{4t(8 - t^3)}{(16 + 4t^3)^2} = \begin{cases} > 0 & \text{då } 0 < t < 2, \; g\uparrow \\ = 0 & \text{då } t = 2 - \text{max punkt} \\ < 0 & \text{då } t > 2, \; g\downarrow \end{cases}$$

Eftersom $g(0) = 0$ och $\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$ är

$$g_{max} = g(2) = \frac{4}{16 + 32} = \frac{1}{12}.$$



Detta motsvarar

$$\frac{1}{12} = g(2) \overset{c=2}{=} f\left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) = f(1, 1).$$

Så $f_{max} = \frac{1}{12} = f(1,1)$.

Svar $f_{min} = 0 = f(x,0) = f(0,y)$ för alla $x \geq 0$ och $y \geq 0$

$f_{max} = \frac{1}{12} = f(1,1)$.

e) $f(x,y,z) = (x-y+z)e^{-x^2-y^2-z^2} \to$ max/min i $\mathbb{R}^3$.

Vi observerar först att

$$\left| \frac{x-y+z}{e^{x^2+y^2+z^2}} \right| = \begin{bmatrix} R^2 = x^2+y^2+z^2 & \Rightarrow |x|<R, |y|<R \\ R - \text{avs. till origo.} & |z|<R \end{bmatrix}$$

$$= \frac{|x-y+z|}{e^{R^2}} \leq \frac{|x|+|y|+|z|}{e^{R^2}} = \frac{3R}{e^{R^2}} \to 0$$

då $R \to \infty$ enligt hastighetstabelen.

Detta innebär att

$$\boxed{\lim_{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty} f(x,y,z) = 0.}$$

Nu söker vi funktionens stationära punkter.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x^2-y^2-z^2} - 2x(x-y+z)e^{-x^2-y^2-z^2} = 0 \\ -e^{-x^2-y^2-z^2} - 2y(x-y+z)e^{-x^2-y^2-z^2} = 0 \\ e^{-x^2-y^2-z^2} - 2z(x-y+z)e^{-x^2-y^2-z^2} = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1-2x(x-y+z)=0 \\ 1+2y(x-y+z)=0 \\ 1-2z(x-y+z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}(2)-(1)\\(1)-(3)\\(1)\end{matrix}\begin{cases}(y+x)(x-y+z)=0\\(z-x)(x-y+z)=0\\1-2x(x-y+z)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x-y+z\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=x \\ 1-\underbrace{2x(x+x+x)}_{=6x^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\mp\frac{1}{\sqrt{6}} \\ z=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

Vi har två stationära punkter där funktionens värde är

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{3}{\sqrt{6}}e^{-\frac{3}{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,e^{-1/2} = \sqrt{\frac{3}{2e}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{6}}e^{-\frac{3}{6}} = -\sqrt{\frac{3}{2e}}.$$

Vi kommer ihåg att $f(x,y,z)\to 0$ då $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty$.

I så fall finns det en ball av radie R sådan att $|f(x,y,z)|<10^{-6}$ utanför denna ball. Den här ballen innehåller punkterna $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ och $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ som är funktionens enda stationära punkter. På randen är $|f(x,y,z)|\leq 10^{-6}$.

Funktionens största värde i ballen är alltså

$$\max\left\{\underbrace{f\left(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)}_{=\sqrt{\frac{3}{2e}}},\ \underbrace{f\left(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right)}_{=-\sqrt{\frac{3}{2e}}},\ \underbrace{\left[\begin{matrix}\text{värdet}\\ \text{på randen}\end{matrix}\right]}_{\leq 10^{-6}}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2e}}=f\left(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)$$

På samma sätt är funktionens minsta värde i ballen

$$-\sqrt{\frac{3}{2e}}=f\left(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right).$$

Eftersom $|f(x,y,z)|<10^{-6}$ utanför ballen är dessa två värden funktionens största/minsta värdet.

Svar: $f_{max}=\sqrt{\frac{3}{2e}}=f\left(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)$

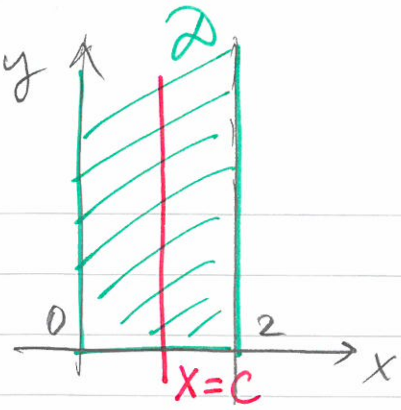
$f_{min}=-\sqrt{\frac{3}{2e}}=f\left(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right).$

Extra

4.4

b) $f(x,y)=x^2ye^{-xy}\longrightarrow \max/\min$

då $(x,y)\in D=\{0\leq x\leq 2,\ y\geq 0\}$



Vi ska först undersöka funktionen längs varje linje $x = C$ $\quad 0 \le C \le 2$.

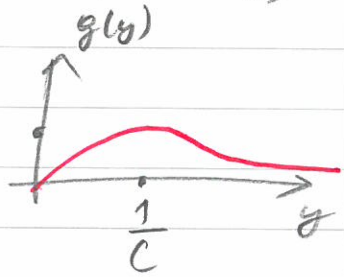
När $C = 0 \Rightarrow f(0, y) = 0$ för alla y.

Låt $C \neq 0$. Längs $x = C$ kan $f(x,y)$ skrivas som

$$g(y) = C^2 y e^{-Cy}, \qquad y \ge 0.$$

$$g'(y) = C^2 e^{-Cy} - C^3 y e^{-Cy} = C^2 e^{-Cy}(1 - Cy)$$

$$\Rightarrow g'(y) \text{ är } \begin{cases} >0 & \text{när } 0 \le y < \frac{1}{C} \\ =0 & \text{när } y = \frac{1}{C} \\ <0 & \text{när } y > \frac{1}{C} \end{cases}$$



$$g(0) = 0, \quad \lim_{y \to \infty} g(y) = 0 \Rightarrow$$

g har ett lokalt max i $y = \frac{1}{C}$,

$$g_{max} = Ce^{-1} = g\left(\frac{1}{C}\right) = f\left(C, \frac{1}{C}\right)$$

är funktionens största värdet längs linjen $x = C$.

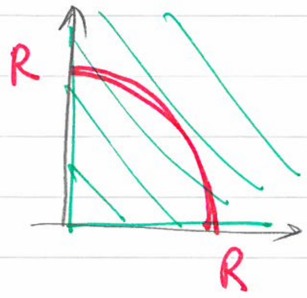
När $0 \le C \le 2$ är Ce^{-1} störst då $C = 2$.

Slutsatsen är att $f_{max} = 2e^{-1} = f\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Det är också klart att $f_{min} = 0 = f(x, 0) = f(0, y)$ då $0 \le x \le 2$ och $y \ge 0$.

f) $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2} \to \max / \min$

då $x \geq 0,\ y \geq 0$



Vi studerar först $f(x,y)$ längs kurvan

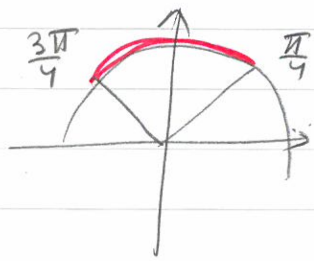
$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Här kan f skrivas som $g(t) = f(R\cos t, R\sin t) \Rightarrow$

$$g(t) = R(\cos t + \sin t)\, e^{-R^2} \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$g(t) = \sqrt{2}R\Big(\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{=\sin\frac{\pi}{4}}\cos t + \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{=\cos\frac{\pi}{4}}\sin t\Big)e^{-R^2} =$$

$$= \sqrt{2}R\,\underbrace{\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}_{\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\,1\right]} e^{-R^2}$$

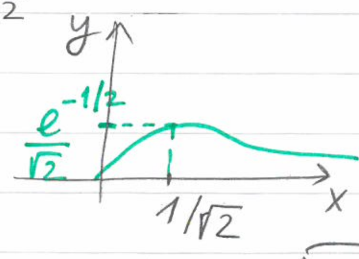


$$\Rightarrow g_{max} = \sqrt{2}\cdot R\cdot e^{-R^2} = g\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

För vilken $R > 0$ är $\sqrt{2}Re^{-R^2}$ störst?

Betrakta $h(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow h'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$

$$\Rightarrow h'(x) \text{ är } \begin{cases} > 0 & \text{då } 0 < x < 1/\sqrt{2} \\ = 0 & \text{då } x = 1/\sqrt{2} \\ < 0 & \text{då } x > 1/\sqrt{2} \end{cases}$$



$h(0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} h(x) = 0 \Rightarrow$

$$h_{max} = h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}$$

Vi ser att $\sqrt{2}Re^{-R^2}$ är störst då $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$f_{max} = f(R\cos t, R\sin t) = \begin{bmatrix} R = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ t = \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} =$$

$$= f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{-1/2}$$

Att $f_{min} = 0 = f(0,0)$ är uppenbart.

Svar: $f_{max} = e^{-1/2} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$f_{min} = 0 = f(0,0)$.