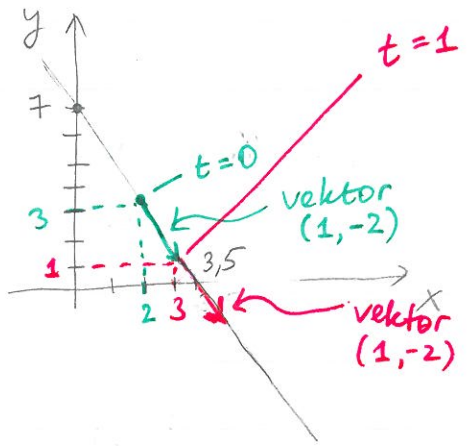
Lektion 7

3.1ac

a) $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} t = x-2 \\ y = 3-2(x-2) \end{cases}$ $\Rightarrow y = -2x+7$, $x \in \mathbb{R}$

d vs kurvan är en rätt linje.



Om $t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

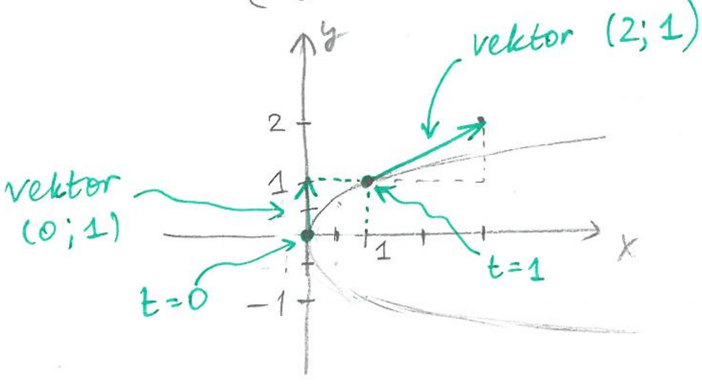
och tangentvektorn i denna punkt är $(x'(0), y'(0))$.

Men $\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$

d vs tangentvektorn i $t=0$ är $(1,-2)$.

Om $t=1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$. Tangentvektorn i denna punkt är ju samma, $(1,-2)$.

c) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $x = y^2$, $y \in \mathbb{R}$ – parabel.



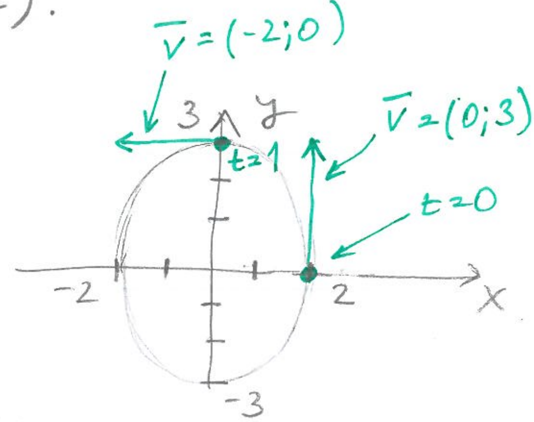
Tangentvektorer i olika punkter beskrivs av ekvationen

$\begin{cases} x'(t) = 2t \\ y'(t) = 1 \end{cases}$

Om $t=0 \Rightarrow$ tangentvektor i $(0,0)$ är $(x'(0), y'(0)) = (0,1)$

Om $t=1 \Rightarrow$ tangentvektorn i $(1,1)$ är
$$(x'(1), y'(1)) = (2, 1).$$

3.2 ac



a) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

Eftersom $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$
och $0 \le t \le 2\pi$ är kurvan en ellips genomlöpt moturs.

Ekvationen för tangentvektorn är
$(x'(t), y'(t)) = (-2\sin t, 3\cos t)$.

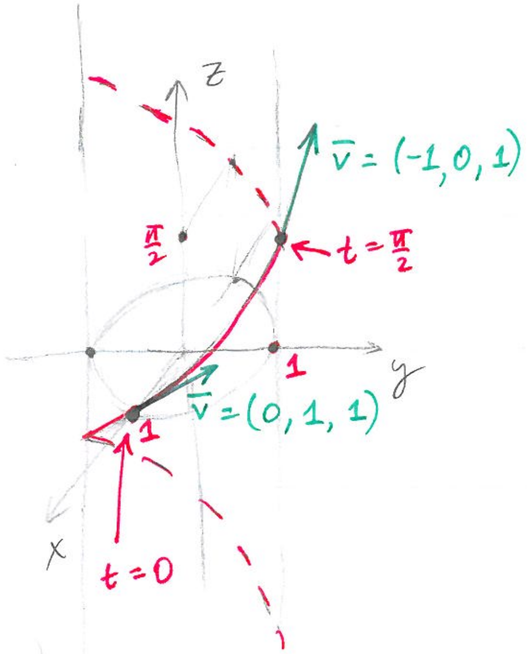
När $t=0 \Rightarrow (x(0), y(0)) = (2,0)$ och
$(x'(0), y'(0)) = (0,3)$.

När $t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0,3)$
$\left(x'\left(\frac{\pi}{2}\right), y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-2,0)$

c) Eftersom $x^2+y^2=1$ ligger kurvan
$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{R}$ på cylindern $x^2+y^2=1$.

Medan $(x,y) = (\cos t, \sin t)$ genomlöper enhetscirkeln $x^2+y^2=1$, växer z när $t \uparrow$.

Kurvan är alltså en spiral.
$(x'(t), y'(t), z'(t)) = (-\sin t, \cos t, 1)$ – tangentvektor



$t = 0$ ger punkten $(1, 0, 0)$ och tangentvektorn $(0, 1, 1)$.

$t = \frac{\pi}{2}$ ger punkten $(0, 1, \frac{\pi}{2})$ och tangentvektorn $(-1, 0, 1)$.

2.43 Gradienten är en vektor som består av funktionens första ordningens partiella derivator.

a) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z \Rightarrow$

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (1, 2, 3)$$

b) $f(x, y) = (xy^2 e^{-xy}) \Rightarrow \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, där

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y^2 e^{-xy} - xy^3 e^{-xy} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2xy\, e^{-xy} - x^2 y^2 e^{-xy} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\nabla f(x, y) = \left((y^2 - xy^3) e^{-xy}, (2xy - x^2 y^2) e^{-xy}\right)$$

2.44 $\underbrace{x^3 + xy + y^3}_{= f(x, y)} = 5$ är en nivåkurva $\Rightarrow \nabla f(x, y)$ är dess normalvektor i (x, y).

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (3x^2 + y, 3y^2 + x)$$

Normalvektor till kurvan i $(2;-1)$ är alltså

$\nabla f(2;-1) = (3\cdot 4 - 1;\ 3\cdot 1 + 2) = (11, 5)$.

Då kan vi skriva ekvationen för tangenten i $(2;-1)$

$$11(x-2) + 5(y-(-1)) = 0 \iff \underline{11x + 5y = 17}$$

(se t.ex. boken s. 83 eller Linjär Algebra)

Nu ska vi skriva normalens ekvation i $(2;-1)$

<u>Metod 1</u> $(11,5)$ är normalens riktningsvektor $\Rightarrow$

$\Rightarrow (5;-11)$ är vinkelrätt mot normalen.

Normalens ekvation är alltså

$$5\cdot(x-2) - 11(y-(-1)) = 0 \iff \underline{5x - 11y = 21}$$

<u>Metod 2</u> $(11,5)$ är normalens riktningsvektor $\Rightarrow$

normalensekvation i parameterform är

$$\begin{cases} x = 2 + 11t \\ y = -1 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = \dfrac{y+1}{5} & \text{(från 2a ekv.)} \\ x = 2 + \dfrac{11(y+1)}{5} & \text{(insättning av } t \text{ i den 1a)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5x = 10 + 11y + 11$$

$$\iff \underline{5x - 11y = 21}$$

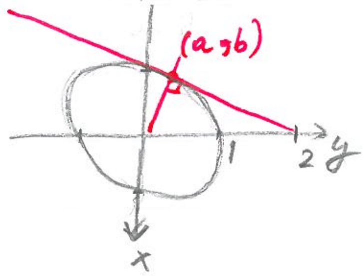
<u>Svar!</u> tangenten är $11x - 5y = 21$

normalen är $5x - 11y = 21$

2.45 Ellipsens ekvation är $x^2+xy+y^2=1 \Rightarrow$ normalvektorn i punkten (a,b) är

$$\nabla f(a,b) = (2x+y,\ 2y+x)\Big|_{(a,b)} = (2a+b,\ 2b+a)$$

a) Vi söker en linje som tangerar ellipsen (~~⇔ har normalvektorn = (2a+b, 2b+a)~~) och går genom punkten $(0,2)$ som inte tillhör ellipsen. Antag att tangeringspunkt har koordinater $(a,b) \Rightarrow$ linjens normalvektor i (a,b) är $(2a+b,\ 2b+a)$ vilket ger oss ekvationen



$$(2a+b)(x-0) + (2b+a)(y-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2a+b)x + (2b+a)y = 4b+2a \quad (*)$$

där (a,b) satisfierar $a^2+ab+b^2=1$. (1)

Eftersom linjen går genom (a,b), $(*)$ ger

$$(2a+b)a + (2b+a)b = 4b+2a \Leftrightarrow$$

$$2a^2+2ab+2b^2 = 4b+2a \Leftrightarrow a^2+ab+b^2 = 2b+a \quad (2)$$

Vi betraktar ekvationssystem (1)-(2):

$$\begin{cases} a^2+ab+b^2=1 \\ a^2+ab+b^2=2b+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b+a=1 \\ a^2+ab+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-2b \\ (1-2b)^2+b(1-2b)+b^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1-2b \\ \cancel{1}-4b+4b^2+b-2b^2+b^2=\cancel{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-2b \\ \cancel{3}b^2-\cancel{3}b=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1-2b \\ b=0 \text{ eller } b=1 \end{cases}$$

vilket ger lösningarna $a=1,\ b=0$ och $a=-1,\ b=1$

Insättning i (*) visar att det finns två tangentlinjer till ellipsen som går genom (0, 2), nämnligen

$2x + y = 2$ och $-x + y = 2$
$(a=1,\ b=0)$ $(a=-1,\ b=1)$

Svar: $2x+y=2$ och $-x+y=2$

b) Vi resonerar som i a). Låt tangeringspunkt vara (a,b) $\Rightarrow$ normalvektorn är $(2a+b,\ 2b+a)$. Eftersom linjen går genom $(0,0)$ ekvationen blir

$$(2a+b)(x-0) + (2b+a)(y-0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2a+b)x + (2b+a)y = 0, \quad (*)$$

där (a,b) satsfierar $a^2+ab+b^2=1$ (1)

Eftersom linjen (*) går genom (a,b), (*) ger

$$(2a+b)a + (2b+a)b = 0 \Leftrightarrow 2a^2+2ab+2b^2=0 \Leftrightarrow$$
$$a^2+ab+b^2=0 \quad (2)$$

Det är klart att systemet (1)-(2) saknar lösningar $\Rightarrow$ det finns ingen linje som tangerar ellipsen och går genom $(0,0)$.

Svar: Linjen finns inte.

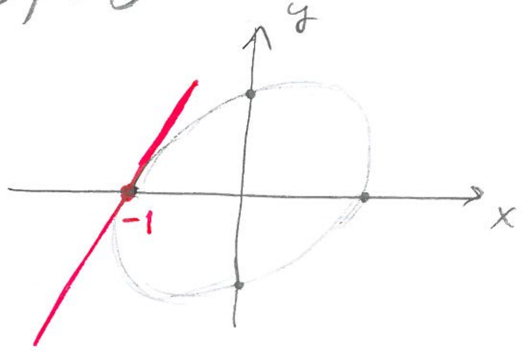
c) I detta fall ligger punkten $(-1,0)$ på ellipsen, vilket underlättar problemet.

Normalvektorn till ellipsen i $(-1,0)$ är $(2\cdot(-1)+0,\ 2\cdot 0+(-1)) = (-2;-1) \Rightarrow$ tangentens ekvation är

$$-2\cdot(x-(-1)) - 1(y-0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2(x+1) - y = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2x - y = 2$$



Svar: $2x+y=-2$.

2.46 Skärningspunkterna är lösningarna till systemet

$$\begin{cases} \overbrace{x^2-y^2}^{=f(x,y)}=3 \\ \underbrace{xy}_{=g(x,y)}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ x^2-\frac{4}{x^2}=3 \quad |\cdot x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ x^4-3x^2-4=0 \end{cases}.$$

Låt $x^2=t$ i den andra ekvationen $\Rightarrow$

$$\begin{cases} t^2-3t-4=0 \\ t\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \text{ och } t=4 \\ t\geq 0 \end{cases} \Rightarrow t=4$$

Vi ser att $x=\pm 2$, vilket ger oss punkterna $(2,1)$ och $(-2;-1)$.

Betrakta punkt $(2;1) \Rightarrow$

den första linjens normalvektor är

$$\nabla f(2;1) = (2x, -2y)\Big|_{\substack{x=2\\y=1}} = (4, -2)$$

och andra linjens normalvektor är

$$\nabla g(2;1) = (y, x)\Big|_{\substack{x=2\\y=1}} = (1, 2).$$

Dessa två vektorer är ortogonala: $4\cdot 1 - 2\cdot 2 = 0$.
Normalerna är ortogonala $\Rightarrow$ tangenterna är ortogonala $\Rightarrow$ vinkeln mellan kurvorna är $\frac{\pi}{2}$

Betrakta $(-2;-1)$ $\Rightarrow$

$\nabla f(-2;-1) = (-4, 2)$ och $\nabla g(-2;-1) = (-1, -2)$

är ortogonala: $-4\cdot(-1) - 2\cdot 2 = 0 \Rightarrow$ vinkeln är igen $\frac{\pi}{2}$.

Svar: skärningspunkterna är $(2,1)$ och $(-2;-1)$, vinkeln är $\frac{\pi}{2}$ i båda fall.

2.48 Normalvektorn till kurvan $\underbrace{xy^2}_{=f(x,y)} = 2$

i punkt (a,b) som tillhör kurvan är

$$\nabla f(a,b) = (y^2, 2xy)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} = (b^2, 2ab).$$

Normalens ekvation i (a,b) kan då skrivas på parameterform som

$$\begin{cases} x = a + b^2\cdot t \\ y = b + 2ab\cdot t \end{cases}$$

Om denna linje ska gå genom origo då måste

$$\begin{cases} 0 = a + b^2 \cdot t_0 \\ 0 = b + 2ab \cdot t_0 \end{cases} \qquad (*)$$

vara sant för någon t_0.

Om $b \neq 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{a}{b^2}$ från den första ekvationen. Insättning i den andra ekvationen ger

$$0 = b + 2a\cancel{b}\left(-\frac{a}{b^{\cancel{2}}}\right) \Leftrightarrow 0 = b^2 - 2a^2 \Rightarrow b^2 = 2a^2$$

Men (a, b) tillhör kurvan $\Rightarrow ab^2 = 2$, vilket ger oss systemet

$$\begin{cases} b^2 = 2a^2 \\ ab^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{b^2} & \text{från 2a ekv.} \\ b^2 = 2 \cdot \frac{2}{b^2} & \text{insättning i den 1a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{b^2} \\ b^4 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b^2 = 2 \end{cases}$$, vilket ger oss punkter $(1, \sqrt{2})$ och $(1, -\sqrt{2})$.

Om $b = 0 \Rightarrow$ 1a ekvationen i $(*)$ innebär $a = 0$. Men $(0, 0)$ tillhör inte kurvan $xy^2 = 2 \Rightarrow$ ingen lösning i detta fall.

Svar: $(1, \sqrt{2})$ och $(1, -\sqrt{2})$.

3.4 Låt $\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$,

d vs $\bar{r}(s,t) = (se^t - 1, \sin st, 2s + \arcsin t)$

$$\bar{r}'_s = (e^t, t\cos st, 2)$$
$$\bar{r}'_t = \left(se^t, s\cos st, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

dessa två är tangentvektorer till ytan i (s,t).

Om $(s,t) = (1,0)$ får vi två tangentvektorer!

$$\bar{r}'_s(\underset{s}{1}, \underset{t}{0}) = (e^0, 0, 2) = (1, 0, 2) \text{ och}$$

$$\bar{r}'_t(\underset{s}{1}, \underset{t}{0}) = (e^0, 1 \cdot \cos 0, 1) = (1, 1, 1).$$

Vi kan då skriva tangentplanet i $(s,t) = (1,0) \Leftrightarrow (x,y,z) = (\underbrace{1 \cdot e^0 - 1}_{=0}, \underbrace{\sin 0}_{=0}, \underbrace{2 + 0}_{=2})$ på parameterform som

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \cdot u + 1v \\ y = 0 + 0 \cdot u + 1 \cdot v \\ z = 2 + 2 \cdot u + 1 \cdot v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u + v \\ y = v \\ z = 2 + 2u + v. \end{cases}$$

$(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Om vi inte vill använda parameterform, kan vi beräkna planets normalvektor

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -2i + j + k = (-2, 1, 1).$$

Den sökta tangentplanets ekvation är då

$$-2(x-0)+1\cdot(y-0)+1(z-2)=0$$

$$-2x+y+z-2=0 \Leftrightarrow$$

$$-2x+y+z=2$$

<u>Svar:</u> <u>Parameterform:</u>

$$(x,y,z)=(0,0,2)+(1,0,2)u+(1,1,1)v$$
$$(u,v)\in\mathbb{R}^2$$

<u>Parameterfriform:</u> $2x-y-z+2=0$

<u>2.49</u> a) Ytan ges av $\underbrace{x^2+2y^2+3z^2}_{=f(x,y,z)}=20$

$\Rightarrow \nabla f=(2x,4y,6z) \Rightarrow \nabla f(3,-2,-1)=(6,-8,-6)$

Tangentplanet i $(3,-2,-1)$ har alltså ekvationen

$$6(x-3)-8(y+2)-6(z+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$6x-8y-6z-18-16-6=0$$

$$6x-8y-6z=40$$

$$\underline{3x-4y-3z=20}$$

b) Ytan ges av $z=yx^2 \Rightarrow \underbrace{z-yx^2}_{=g(x,y,z)}=0$

$$\nabla g=(-2xy,-x^2,1).$$

I punkten $(-2, 1, 4)$ blir detta

$$\nabla g(-2, 1, 4) = (-2\cdot(-2)\cdot 1, -(-2)^2, 1) =$$
$$= (4, -4, 1)$$

Tangentplanets ekvation är alltså

$$4\cdot(x-(-2)) - 4(y-1) + 1(z-4) = 0 \iff$$
$$4x + 8 - 4y + \cancel{4} + z - \cancel{4} = 0 \iff$$
$$4x - 4y + z = -8$$

2.11 c) Ytans ekvation är $\underbrace{y - \arcsin xz}_{= f(x,y,z)} = 0$

$$\nabla f = \left(-\frac{z}{\sqrt{1-x^2z^2}}, 1, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2z^2}}\right).$$

$$(\nabla f)\left(1, \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}, 1, \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\right) =$$
$$= \left(-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, 1, -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Tangentplanetsekvation är

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) + \left(y - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff$$
$$-\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + y - \frac{\pi}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}z + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \iff$$
$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}z + \frac{\pi}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Extra

3.3

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \\ z = \arctan t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = +\cos t \\ y'(t) = -\sin t \\ z'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow$$

tangentvektor i $t=0$ är $\left(\cos 0, -\sin 0, \frac{1}{1+0^2}\right)$ d v s $(1, 0, 1)$.

Tangentlinjen i $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 1, 0)$ är

$$\begin{aligned} x &= 0 + 1\cdot s \\ y &= 1 + 0\cdot s \\ z &= 0 + 1\cdot s \end{aligned} \iff \begin{cases} x = s \\ y = 1 \\ z = s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

(parameterform)

På parameterfri form kan detta skrivas som skärning mellan två plan

$$x = s \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = x \end{cases}$$

Svar

Parameterform:

$(x, y, z) = (0, 1, 0) + s\,(1, 0, 1)$

Parameterfri form:

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = x \end{cases}$$

2.47

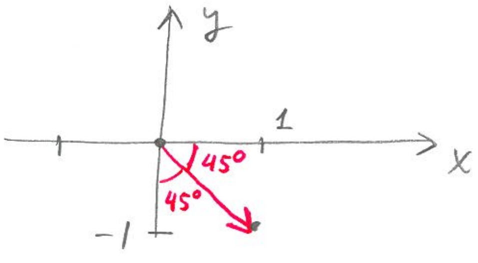
Skärningspunkterna mellan
$x^3+y^3=y-x$ och $x=0$
ges av ekvationssystem

$$\begin{cases} x^3+y^3=y-x \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3=y \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y^2-1)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

Vi får $(0,0)$, $(0,1)$ och $(0,-1)$.

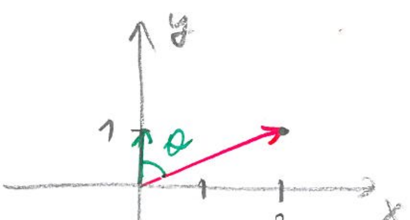
Kurvan $x^3+y^3=y-x$ kan skrivas som nivåkurvan $\underbrace{x^3+y^3-y-x}_{f(x,y)}=0$
med normalvektor $\nabla f=(3x^2-1,\ 3y^2-1)$.

1) Betrakta $(0,0)$. Kurvans normalvektor är $(-1,-1)$ $\Rightarrow$ tangentens riktning beskrivs av vektorn $(1,-1)$,



vilken utgör vinkeln $=\frac{\pi}{4}$ med y-axeln.

2) Betrakta $(0,1)$ $\Rightarrow$ kurvans normalvektor är $(-1,2)$ $\Rightarrow$ tangentens riktning beskrivs av vektorn $(2,1)$.



Eftersom y-axeln beskrivs av vektorn $(0,1)$, kan vektorn θ mellan kurvan och y-axeln beräknas
från sambandet $\cos\theta=\frac{(2,1)\cdot(0,1)}{|(2,1)||(0,1)|}=\frac{1}{\sqrt{4+1}\cdot 1}\Rightarrow$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$

3) I $(0;-1)$ är beräkningarna exakt samma $\Rightarrow$

$\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$

Svar: $\frac{\pi}{4}$ i $(0,0)$ och $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$ i $(0;\pm 1)$