1. Reella och komplexa tal

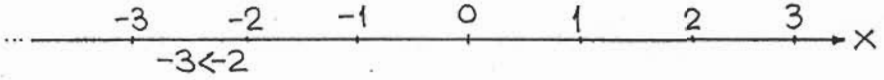
Testövning 1.1 (Sid. 3)

Lösning

(1) $-3<2$: Ett negativt heltal är mindre än ett positivt heltal; giltig olikhet således.

(2) $-3\leq 2$: Detsamma här; giltig olikhet. $(-3\neq 2)$.

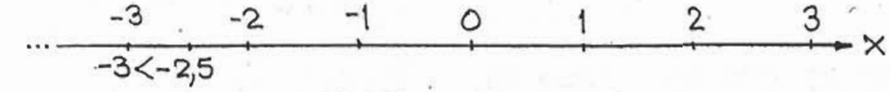
(3) $-3\geq -2$: Olikheten kan skrivas $-2<-3$; med hjälp av talaxeln (tallinjen) fås $-3<-2$, dvs -3 kommer före -2 och inte tvärtom:



Olikheten är icke giltig.

(4) $2\geq 2$: $2\leq 2 \Leftrightarrow 2<2 \vee 2=2$; olikheten (i vid mening) är faktiskt giltig.

(5) $-2{,}5>-3$: Olikheten kan även skrivas $-3<-2{,}5$;



Det är uppenbart att $-2{,}5$ ligger före -3 på tallinjen; giltig även denna olikhet.

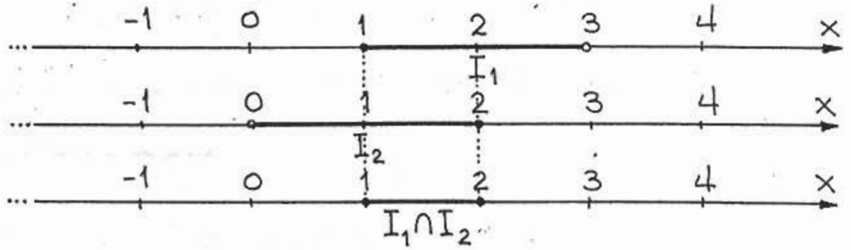
Anm Vid olikheter mellan negativa tal talar man inte om "mindre än" eller "större än". Endast positiva tal kan jämföras på detta sätt.

Testövning 1.2 (Sid. 5)

Lösning

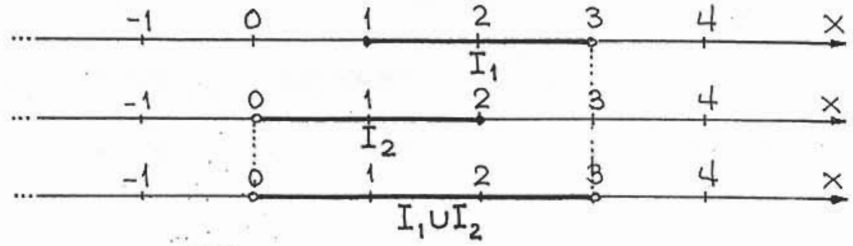
$I_1: 1\leq x<3, \quad I_2: 0<x\leq 2$

a)



De x som ligger i såväl I_1 som I_2, skärningen mellan I_1 och I_2 ($I_1\cap I_2$ i figuren ovan) ges av $1\leq x\leq 2$, dvs av intervallet $[1,2]$.

b)



De x som ligger i I_1 och/eller I_2, föreningen av I_1 och I_2 ($I_1 \cup I_2$ i figuren) ges av $0<x<3$, dvs av intervallet $]0,3[$.

Testövning 1.3 (Sid. 6)

Lösning

I implikationen $P \Rightarrow Q$ kallas P premiss och Q konsekvens. En implikation är falsk om premissen är sann men konsekvensen är falsk.

a) $x \geq 4 \Rightarrow x > 4$; $P: x \geq 4$, $Q: x > 4$.

För $x=4$ är P sann men Q falsk; implikationen är icke-giltig.

b) $x > 4 \Rightarrow x \geq 4$;

Den givna implikation utläses: Om x är större än 4, så är x större än 4 eller x är lika med 4; detta är uppenbarligen sant. Den givna olikheten är således giltig.

En implikation är giltig vid falsk premiss och sann konsekvens.

c) $x \geq 3 \Leftrightarrow 3 \leq x$. $A: x \geq 3$, $B: 3 \leq x$.

Att x ligger till höger om 3 (på tallinjen) är detsamma som att 3 ligger till vänster om x. Detta är uppenbarligen sant för alla x. Påståendet är sant.

d) $x \geq 3 \Leftrightarrow 3 < x$

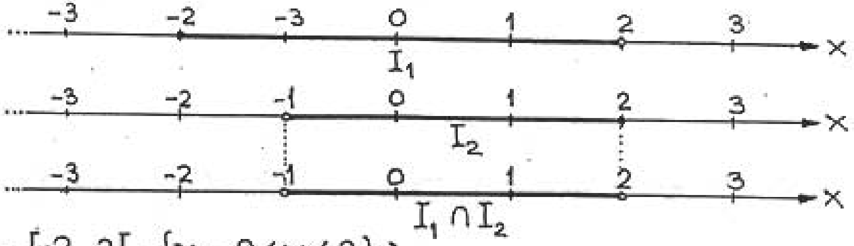
$3<x \Rightarrow 3 \leq x$ men $3 \leq x \not\Rightarrow 3 < x$; (Jfr a) ovan).

Påståendet gäller inte (för $x=3$ t.ex.).

Övning 1.4 (Sid. 6)

Lösning

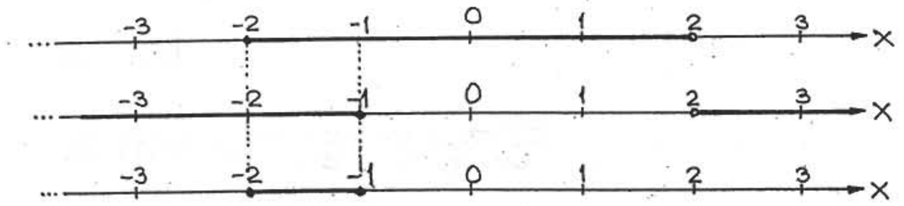
a)



$$\left.\begin{array}{l} I_1 = [-2,2[= \{x : -2 \leq x < 2\} \\ I_2 =]-1,2] = \{x : -1 < x \leq 2\} \end{array}\right\} \Rightarrow I_1 \cap I_2 = \{x : -1 < x < 2\} =]-1,2[.$$

Resultat: $[-2,2[\cap]-1,2] =]-1,2[$.

b) $x\notin\,]-1,2]=\{x: -1<x\le 2\}\Leftrightarrow x\in\{x: x\le -1 \text{ eller } x>2\}$.

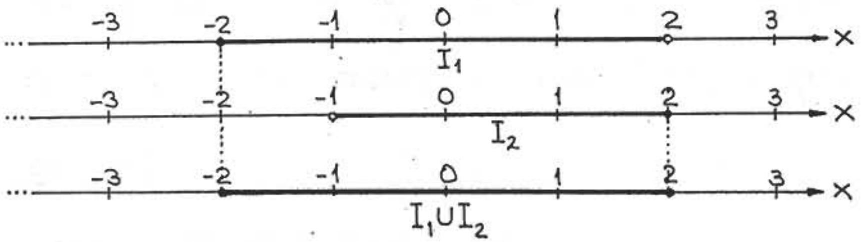


$x\in[-2,2[$ och $x\notin\,]-1,2] \Rightarrow x\in[-2,-1]=\{x:-2\le x\le -1\}$.

Resultat: $[-2,2[\,\setminus\,]-1,2]=[-2,-1]$.

Anm. $I_1\setminus I_2=\{x: x\in I_1 \text{ men } x\notin I_2\}$ (differens).

c)



Resultat: $[-2,2[\,\cup\,]-1,2]=[-2,2]$.

Övning 1.5 (Sid. 6)

Lösning

a) $x\ge 1$ och $x<6 \Rightarrow 1\le x\le 6$

Premissen sammanfattas i $1\le x<6$. Det är uppenbart att alla x som satisfierar $1\le x<6$ satisfierar även $1\le x\le 6$; $x\in[1,6[\,\Rightarrow x\in[1,6]$.

Påståendet är således giltigt.

b) $x\ge 1$ eller $x<6 \Rightarrow 1\le x<6$. (Konsekvensen).

Premissen sammanfattas i $-\infty<x<\infty$ (alla x).

$x=8$ gör premissen sann men konsekvensen falsk; påståendet gäller inte. (Se TO 1.3).

c) $\underbrace{x>1 \text{ eller } x\ge 2}_{P} \Rightarrow \underbrace{x\ge 2}_{Q}$.

Premissen kan sammanfattas i $x>1$.

$x=\frac{3}{2}$ gör premissen sann men konsekvensen falsk; påståendet gäller inte.

Svar: Endast a).

Testövning 1.6 (Sid. 10)

Lösning

a) $\frac{11}{42}-\frac{35}{66}=\frac{11}{2\cdot 21}-\frac{35}{2\cdot 33}=\frac{1}{2}\left(\frac{11}{21}-\frac{35}{33}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{11}{3\cdot 7}-\frac{35}{3\cdot 11}\right)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{11}{7}-\frac{35}{11}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{11^2}{7\cdot 11}-\frac{7\cdot 35}{7\cdot 11}\right)=\frac{1}{6}\,\frac{11^2-7\cdot 35}{7\cdot 11}=$

$=\frac{121-245}{6\cdot 7\cdot 11}=\frac{-124}{462}=-\frac{2\cdot 62}{2\cdot 231}=-\frac{62}{231}$.

Anm. $42=2\cdot 3\cdot 7$; $66=2\cdot 3\cdot 11$; mgm$(42,66)=$

$=2\cdot 3\cdot 7\cdot 11=462 \Leftrightarrow$ mgn $=462$.

$\frac{11}{42}-\frac{35}{66}=\frac{11^2}{42\cdot 11}-\frac{35\cdot 7}{66\cdot 7}=\frac{11^2-5\cdot 7^2}{462}=\frac{121-245}{462}=-\frac{124}{462}=-\frac{62}{231}$.

mgm(,) = minsta gemensamma multipeln.

mgn = minsta gemensamma nämnaren.

b) $\frac{11/42}{35/66}=\frac{11}{42}/\frac{35}{66}=\frac{11}{42}\cdot\frac{66}{35}=\frac{11\cdot 66}{42\cdot 35}=\frac{11\cdot 11\cdot \cancel{6}}{\cancel{6}\cdot 7\cdot 35}=\frac{11^2}{7\cdot 35}=\frac{121}{245}$.

c) $1-\frac{x}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-x}{x+1}=\frac{1}{x+1}$. $(x\neq -1)$.

Testövning 1.7 (Sid. 10)

Lösning

Antag att x är utgångspriset. Efter den första höjningen blir priset $y=(1+\frac{10}{100})x=1{,}1x$ och efter den andra $z=(1+\frac{20}{100})y=1{,}2y=1{,}2\cdot 1{,}1x=$

$=1{,}32x=(1+\frac{32}{100})x$

Svar: Med 32%.

Testövning 1.8 (Sid. 12)

Lösning

a) $2^4=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2\cdot(2\cdot(2\cdot 2))=2\cdot(2\cdot 4)=2\cdot 8=16$.

$4^2=4\cdot 4=16$.

$(-4)^3=(-4)(-4)(-4)=-4\cdot((-4)(-4))=-4\cdot 16=-64$.

$(-3)^4=(-3)^{2\cdot 2}=((-3)^2)^2=9^2=81$.

$1^{1000}=1$.

$1000^1=1000$.

b) $3^{-4}=3^{2\cdot 2\cdot(-1)}=(3^{2\cdot 2})^{-1}=((3^2)^2)^{-1}=(9^2)^{-1}=81^{-1}=\frac{1}{81}$.

$4^{-3}=4^{3(-1)}=(4^3)^{-1}=(4\cdot(4\cdot 4))^{-1}=(4\cdot 16)^{-1}=64^{-1}=\frac{1}{64}$.

$(-3)^{-4}=(-3)^{4\cdot(-1)}=((-3)^4)^{-1}=(81)^{-1}=\frac{1}{81}$.

$(-4)^{-3}=(-4)^{3\cdot(-1)}=((-4)^3)^{-1}=(-64)^{-1}=\frac{1}{-64}=-\frac{1}{64}$.

Testövning 1.9 (Sid. 12)

Lösning

a) $2^2\cdot 3^3\cdot 2^3\cdot 3^2=2^2\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot 3^3=2^5\cdot 3^5=(2\cdot 3)^5=6^5=$

$=6\cdot(6(6\cdot(6\cdot 6)))=6\cdot(6\cdot(6\cdot 36))=6\cdot(6\cdot 216)=6\cdot 1296=$

$=7776$.

Med en miniräknare blir processen kort.

b) $\frac{2^2\cdot 3^3}{2^{-3}\cdot 3^2}=\frac{2^2}{2^{-3}}\cdot\frac{3^3}{3^2}=2^{2-(-3)}\cdot 3^{3-2}=2^{2+3}\cdot 3^1=2^5\cdot 3=32\cdot 3=96$.

Testövning 1.10 (Sid. 12)

Lösning

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=$$
$$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)=$$
$$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=$$
$$=\underline{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}.$$
$$(a-b)^3=(a+(-b))^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3=$$
$$=\underline{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}.$$

Testövning 1.11 (Sid. 12)

Lösning

a) $(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2=\underline{4x^2+12xy+9y^2}.$

b) $(2x+3y)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot(3y)+3\cdot(2x)(3y)^2+(3y)^3=$
$$=8x^3+3\cdot4x^2\cdot3y+3\cdot2x\cdot9y^2+27y^3=$$
$$=\underline{8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3}.$$

Testövning 1.13 (Sid. 12)

Lösning

a) $3abc\cdot a^3bc^2=3a^{1+3}\cdot b^{1+1}\cdot c^{1+2}=\underline{3a^4b^2c^3}.$

b) $\frac{(xy^{-2})^2}{(x^{-1}y)^{-1}}=(xy^{-2})^2\cdot(x^{-1}y)=x^2\cdot(y^{-2})^2\cdot(x^{-1}y)=$
$$=x^2y^{-4}\cdot x^{-1}y=x^2x^{-1}\cdot y^{-4}\cdot y=x^{2-1}y^{-4+1}=\underline{xy^{-3}}.$$

Testövning 1.13 (Sid. 12)

Lösning

a) $4x^2+4x+1=4(x^2+x)+1=4(x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})+1=$
$$=4((x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4})+1=4(x+\tfrac{1}{2})^2-1+1=\underline{4(x+\tfrac{1}{2})^2}.$$

Anm. $4x^2+4x+1=(2x)^2+2\cdot2x\cdot1+1^2=(2x+1)^2.$

b) $4x^2-9=4(x^2-\frac{9}{4})=4(x^2-(\frac{3}{2})^2)=\underline{4(x-\frac{3}{2})(x+\frac{3}{2})}.$

Anm. $4x^2-9=(2x)^2-3^2=(2x-3)(2x+3).$

Övning 1.14 (Sid. 13)

Lösning

a) $\frac{2}{9}\cdot\frac{12}{11}+\frac{13}{12}=\frac{2\cdot12}{9\cdot11}+\frac{13}{12}=\frac{2\cdot4\cdot\cancel{3}}{3\cdot\cancel{3}\cdot11}+\frac{13}{12}=\frac{8}{3\cdot11}+\frac{13}{3\cdot4}=$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{11}+\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{4}=\frac{1}{3}(\frac{8}{11}+\frac{13}{4})=\frac{1}{3}(\frac{8\cdot4}{11\cdot4}+\frac{13\cdot11}{4\cdot11})=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{8\cdot4+13\cdot11}{4\cdot11}=\frac{1}{3}\cdot\frac{32+143}{44}=\frac{175}{3\cdot44}=\frac{175}{132}.$$

b) $-\frac{x+1}{x-1}-1=-(\frac{x+1}{x-1}+1)=-(\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x-1})=-\frac{x+1+x-1}{x-1}=-\frac{2x}{x-1}.$

c) $\frac{\frac{x+1}{x-1}-1}{1+\frac{1}{x-1}}=\frac{(x-1)(\frac{x+1}{x-1}-1)}{(x-1)(1+\frac{1}{x-1})}=\frac{(\cancel{x-1})\frac{x+1}{\cancel{x-1}}-(x-1)}{(x-1)+(\cancel{x-1})\frac{1}{\cancel{x-1}}}=\frac{x+1-x+1}{x-1+1}=\frac{2}{x}.$

Anm. Ovanstående räkningar är formella; de blir meningsfulla så länge $x\neq1$ och $x\neq0$.

Övning 1.15 (Sid. 13)

Lösning

a)

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{1{,}4\overline{230769}23\cdots} & \\
\hline
37 & \underline{26} \\
(-)\underline{26} & \\
\quad 110 & \\
(-)\underline{104} & \\
\quad\quad 60 & \\
\quad (-)\underline{52} & \\
\quad\quad\quad 80 & \\
\quad\quad (-)\underline{78} & \\
\quad\quad\quad 200 & \\
\quad\quad (-)\underline{182} & \\
\quad\quad\quad\quad 180 & \\
\quad\quad\quad (-)\underline{156} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad 240 & \\
\quad\quad\quad\quad (-)\underline{234} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 60 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad (-)\underline{52} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 80 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad (-)\underline{78} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2\cdots &
\end{array}$$

Perioden är 230769, enligt ovanstående division. Med vanlig miniräknare går det inte.

b) $x=0{,}1\overline{234} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}10000x=1234\\ 10000000x=1234234\end{array}\right\} \Rightarrow 10^7x-$

$-10^4x=1234234-1234 \Leftrightarrow 9990000x=1233000$

$\Leftrightarrow 9990x=1233 \Leftrightarrow x=\frac{1233}{9990}=\frac{3\cdot411}{3\cdot3330}=\frac{411}{3330}=$

$=\frac{3\cdot137}{3\cdot1110}=\frac{137}{1110}.$

Övning 1.16 (Sid. 13)

Lösning

a) $2^5=2\cdot(2\cdot(2\cdot(2\cdot2)))=2\cdot(2\cdot(2\cdot4))=2\cdot(2\cdot8)=2\cdot16=\underline{\underline{32}}.$

$5^2=5\cdot5=\underline{\underline{25}}.$

b) $(-1)^0=1;\quad 0^{-1}\overset{!}{=}\frac{1}{0}$, <u>ej definierat</u>.

c) $2^{-2}\cdot3^{-2}\cdot2^3\cdot3^2=2^{-2}\cdot2^3\cdot3^{-2}\cdot3^2=2^{-2+3}\cdot3^{-2+2}=2^1\cdot3^0=2.$

Övning 1.17 (Sid. 13)

Lösning

a) $\left.\begin{array}{l}VL=2^3+2^4=8+16=24\\ HL=2^{3+4}=2^7=128\end{array}\right\}\Rightarrow VL\neq HL.$ Ej sant.

b) $\left.\begin{array}{l}VL=2^3\cdot2^4=2^{3+4}=128\\ HL=2^{3\cdot4}=2^{12}=4096\end{array}\right\}\Rightarrow VL\neq HL.$ Ej sant.

c) $2^3\cdot2^4=2^{3+4}=2^7=128.$ Påståendet är sant.

Resultat: a) Nej; b) Nej; c) Ja.

En vanlig miniräknare gör processen kort.

Övning 1.18 (Sid. 13)

Lösning

a) $(a+b+c)^2=(a+(b+c))^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2=$

$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2=$

$=\underline{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}.$

b) $(a+b)^4=(a+b)(a+b)^3=(a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=$

$=a(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+b(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=$

$=a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4=$

$=\underline{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}.$

Kubregeln behandlas i testövningen 1.10.

c) $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x(x^2+xy+y^2)-y(x^2+xy+y^2)=$

$=x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2-y^3=\underline{x^3-y^3}.$

Övning 1.19 (Sid. 13)

Lösning

a) $(3x^2y^3z)^4=3^4\cdot(x^2)^4(y^3)^4(z)^4=\underline{81x^8y^{12}z^4}.$

b) $(abc)^2\cdot(-a)^3(-b)^2(-c)=(a^2b^2c^2)(-a^3)(b^2)(-c)=\underline{a^5b^4c^3}.$

c) $(a^2b^{-3})^{-1}=(a^2)^{-1}\cdot(b^{-3})^{-1}=a^{2\cdot(-1)}\cdot b^{(-3)(-1)}=\underline{a^{-2}b^3}.$

d) $(3x^2yz^3)^2\cdot(-2xy^2)^3=(3^2\cdot x^{2\cdot 2}y^2z^{3\cdot 2})((-2)^3x^3\cdot y^{2\cdot 3})=$

$=(9x^4y^2z^6)(-8x^3y^6)=9\cdot(-8)\cdot x^{4+3}y^{2+6}z^6=\underline{-72x^7y^8z^6}.$

e) $\frac{3abc}{a^3bc^2}=3\cdot\frac{a}{a^3}\cdot\frac{b}{b}\cdot\frac{c}{c^2}=3\cdot\frac{1}{a^2}\cdot 1\cdot\frac{1}{c}=\underline{\frac{3}{a^2c}}.$

f) $\frac{(abc)^2}{(-a)^3(-b)^2(-c)}=\frac{a^2b^2c^2}{(-a^3)b^2(-c)}=\frac{a^2b^2c^2}{a^3b^2c}=\frac{a^2}{a^3}\cdot\frac{b^2}{b^2}\cdot\frac{c^2}{c}=\frac{1}{a}\cdot 1\cdot\frac{c}{1}=\underline{\frac{c}{a}}.$

Övning 1.20 (Sid. 13)

Lösning

a) $\frac{3x}{x^2-y^2}-\frac{2}{x+y}=\frac{3x}{(x-y)(x+y)}-\frac{2}{x+y}=\frac{3x}{(x-y)(x+y)}-\frac{2(x-y)}{(x-y)(x+y)}=$

$=\frac{3x-2(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{3x-2x+2y}{x^2-y^2}=\underline{\frac{x+2y}{x^2-y^2}}.$

b) $\frac{x^2}{x^3+x^2}+\frac{x^2-1}{x^4-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x^2}{x^2(x+1)}+\frac{x^2-1}{(x^2-1)(x^2+1)}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x+1}+$

$+\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x^2+1}+\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=$

$=\frac{1}{x^2+1}+\frac{x-1-(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2-1)}-\frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)}=$

$=\frac{x^2-1-2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)}=\frac{-x^2-3}{x^4-1}=\underline{\frac{3+x^2}{1-x^4}}.$

c) $\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}=\left(\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}-\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}\right)^{-1}=\left(\frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}\right)^{-1}=$

$=\left(\frac{-4x}{x^2-1}\right)^{-1}=\frac{x^2-1}{-4x}=\underline{\frac{1-x^2}{4x}}.$

d) $(a^{-1}-b^{-1})^{-2}\cdot(a^{-2}-b^{-2})=(a^{-1}-b^{-1})^{-2}\cdot(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1})=$

$=(a^{-1}-b^{-1})^{-1}(a^{-1}+b^{-1})=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{b+a}{ab}\right)=$

$=\frac{\cancel{ab}}{b-a}\cdot\frac{b+a}{\cancel{ab}}=\underline{\frac{b+a}{b-a}}.$

Övning 1.21 (Sid. 14)

Lösning

a) $x^4-16y^4=x^4-(2y)^4=(x^2)^2-((2y)^2)^2=(x^2+4y^2)(x^2-4y^2)=$

$=(x^2+4y^2)(x^2-(2y)^2)=\underline{(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)}.$

b) $x^2+2x+1-y^2=(x+1)^2-y^2=(x+1-y)(x+1+y)=\underline{(x-y+1)(x+y+1)};$

Övning 1.22 (Sid. 14)

Lösning

a) $\underline{\text{Salthalten}}=\frac{10\cdot0{,}03+30\cdot0{,}02}{10+30}=\frac{0{,}3+0{,}6}{40}=\frac{0{,}9}{40}=2{,}25\%.$

b) $\underline{\text{Salthalten}}=\frac{x\cdot\frac{p}{100}+y\cdot\frac{q}{100}}{x+y}=\frac{\frac{px+qy}{100}}{x+y}=\frac{1}{100}\cdot\frac{px+qy}{x+y}=\left(\frac{px+qy}{x+y}\right)\%.$

Övning 1.23 (Sid. 14)

Lösning

$x=0{,}1\,mm \Rightarrow x\xrightarrow{(1)}2x\xrightarrow{(2)}2(2x)=2^2\cdot x\xrightarrow{(3)}2\cdot2^2x=$

$=2^3\cdot x\xrightarrow{(4)}2^4\cdot x\xrightarrow{(5)}\dots\xrightarrow{(10)}2^{10}\cdot x\xrightarrow{(11)}\dots\xrightarrow{(20)}2^{20}\cdot x.$

Efter 10 skärningar/tudelningar är pappersbunten 10 cm (102,4m) tjock och efter 20 nästan 105m (104,8576m).

Övning 1.24 (Sid. 14)

Lösning

a) $1000\xrightarrow{(1)}1000\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)\xrightarrow{(2)}1000\left(1+\frac{10}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)=$

$=1000\left(1+\frac{10}{100}\right)^2\xrightarrow{(3)}1000\left(1+\frac{10}{100}\right)^3\xrightarrow{(4)}1000\left(1+\frac{10}{100}\right)^4\dots$

Efter 2 år är skulden $1000\cdot1{,}1^2=1210$ kr, efter 3 år är den $1000\cdot1{,}1^3=1331$ kr och efter ytterligare 1 år uppgår den till $1000\cdot1{,}1^4=1464{,}10$ kr.

Anm På en bank avrundas det aldrig.

b) $K\xrightarrow{(1)}K\left(1+\frac{p}{100}\right)\xrightarrow{(2)}K\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\xrightarrow{(3)}K\left(1+\frac{p}{100}\right)^3\xrightarrow{(4)}$

$\xrightarrow{(4)}K\left(1+\frac{p}{100}\right)^4\xrightarrow{(5)}\dots\xrightarrow{(n)}K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$

Testövning 1.25 (Sid. 16)

Lösning

a) $2x+3=2-3x\Leftrightarrow 2x+3x=2-3\Leftrightarrow 5x=-1\Leftrightarrow \underline{x=-\frac{1}{5}}.$

b) $\frac{x+4}{2x-1}=3\Leftrightarrow 3(2x-1)=x+4\Leftrightarrow 6x-3=x+4\Leftrightarrow 6x-x=3+4$

$\Leftrightarrow 5x=7\Leftrightarrow \underline{x=\frac{7}{5}}.$

c) $x=x^2-2x\Leftrightarrow x^2-3x=x(x-3)=0\Leftrightarrow x=0 \vee x-3=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x=0} \vee \underline{x=3}.$

d) $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+1} \Leftrightarrow x-1=\frac{x+1}{2} \Leftrightarrow 2(x-1)=x+1 \Leftrightarrow 2x-2=x+1$

$\Leftrightarrow 2x-x=2+1 \Leftrightarrow \underline{x=3}.$

Testövning 1.26 (Sid. 18)

Lösning

a) $\underline{P_0:(0,-2),\ k=3;}$ $\qquad (y-y_0=k(x-x_0))$

$y-(-2)=3(x-0) \Leftrightarrow y+2=3x \Leftrightarrow \underline{y=3x-2}.$

b) $\underline{P_1:(-3,-2),\ P_2:(4,-2);}$ $\qquad (y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)).$

$y-(-2)=\frac{-2-(-2)}{4-(-3)}(x-(-3)) \Leftrightarrow y+2=0 \Leftrightarrow \underline{y=-2}.$

c) $\underline{P_1:(-1,2),\ P_2:(3,-3);}$ $\qquad (y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1))$

$y-2=\frac{-3-2}{3-(-1)}(x-(-1))=\frac{-5}{4}(x+1)=-\frac{5}{4}x-\frac{5}{4} \Leftrightarrow \underline{y=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}}.$

Testövning 1.27 (Sid. 18)

Lösning

$\underline{y=-\frac{1}{4}(5x-3);}$

Skärning med x-axeln: $y=0 \Leftrightarrow x=+\frac{3}{5}.$

Skärning med y-axeln: $x=0 \Leftrightarrow y=+\frac{3}{4}.$

Resultat: $(\frac{3}{5},0)$ resp. $(0,\frac{3}{4}).$

Anm. $x/(3/5)+y/(3/4)=1$ interceptformen.

Testövning 1.28 (Sid. 19)

Lösning

$\underline{L_1: y=2x+4; \quad L_2: y=-3x+3}$

y-koordinaterna sätts lika:

$2x+4=y=-3x+3 \Leftrightarrow 2x+4=-3x+3 \Leftrightarrow 5x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{5};$

$x=-\frac{1}{5}$ sätts nu in i ekvationen $y=2x+4$. Det ger $y=2\cdot(-\frac{1}{5})+4=-\frac{2}{5}+4=\frac{18}{5}.$

Svar: Linjerna skär varandra i punkten $(-\frac{1}{5},\frac{18}{5}).$

Testövning 1.29 (Sid. 19)

Lösning

a) $\begin{cases}3x+2y=0\\2x+3y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y=-3x\\2x+3y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-\frac{3}{2}x\\2x+3(-\frac{3}{2}x)=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-\frac{3}{2}x\\-\frac{5}{2}x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}.$

b) $\begin{cases}3x+2y=1 \ \textcircled{1}\\2x+3y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y=1\\5x+5y=5 \ \textcircled{1/5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y=1\\x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x+2(1-x)=1\\y=1-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2=1\\y=1-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=1-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}.$

Testövning 1.30 (Sid. 20)

Lösning

a) $P_0:(0,-2);\ k=3.$ (Normalens k-värde är k′).

$k \cdot k' = -1 \Leftrightarrow 3k' = -1 \Leftrightarrow k' = -\frac{1}{3}$;

$y-(-2) = -\frac{1}{3}(x-0) \Leftrightarrow y+2 = -\frac{1}{3}x \Leftrightarrow \underline{y = -\frac{1}{3}x-2}.$

b) $P_0:(0,-2),\ k=0.$

$y=-2$ är vågrät; normalen ska vara lodrät och gå genom P_0; dess ekvation är $\underline{x=0}$.

c) $P_0:(0,-2);\ k=-5/4.$

$k \cdot k' = -1 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}k' = -1 \Leftrightarrow k = \frac{4}{5}.$

$y-(-2) = \frac{4}{5}(x-0) \Leftrightarrow y+2 = \frac{4}{5}x \Leftrightarrow \underline{y = \frac{4}{5}x-2}.$

Övning 1.31 (Sid. 20)

Lösning

a) Innan man sätter igång med lösningsarbetet tar man reda på de "förbjudna" x-värdena. I vårt fall är de ±1:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow \underline{x=0}.$$

b) Övning 1.14 c) utnyttjas.

$\frac{2}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$; denna "rot" är dock falsk, enl. anmärkningen i 1.14. Ekvationen saknar rötter.

Övning 1.32 (Sid. 20)

Lösning

a) $ax+3 = 2x+3 \Leftrightarrow ax = 2x \Leftrightarrow ax-2x = (a-2)x = 0$;

$\underline{a=2} \Rightarrow 0 \cdot x = 0 \Leftrightarrow$ alla x duger till rötter

$\underline{a \neq 2} \Leftrightarrow a-2 \neq 0 \Leftrightarrow \underline{x=0}.$

b) $x+a = ax-1 \Leftrightarrow ax-x = a+1 \Leftrightarrow (a-1)x = a+1$; (*)

$\underline{a=1} \overset{(*)}{\Rightarrow} 0 \cdot x = 2$; lösning saknas.

$\underline{a \neq 1} \overset{(*)}{\Rightarrow} \underline{x = \frac{a+1}{a-1}}$

Övning 1.33 (Sid. 21)

Lösning

$P_0:(5,4);\ P_1:(4,-1),\ P_2:(0,5).$

a) $k_{12} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{5-(-1)}{0-4} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$;

Normalens k-värde är $k' = \frac{2}{3}$, ty $k_{12} \cdot k' = -1$.

$y-y_0 = k' \cdot (x-x_0) \Rightarrow y-4 = \frac{2}{3}(x-5) = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3} \Leftrightarrow \underline{y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}}.$

b) Ekvationen för linjen genom P_1 och P_2 är

$y-y_1=k_{12}\cdot(x-x_1) \Rightarrow y-(-1)=-\frac{3}{2}(x-4) \Leftrightarrow y+1=-\frac{3}{2}x+6$

$\Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+5$. Denna kombineras med ekvationen för sin normal. y-koordinaterna lika $\Rightarrow$

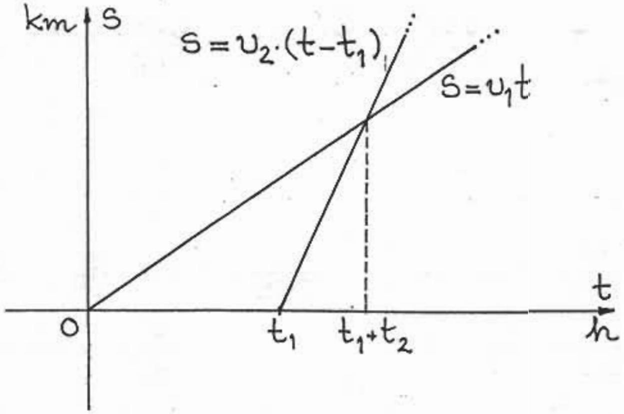
$\Rightarrow \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}=-\frac{3}{2}x+5 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x+\frac{2}{3}x=5-\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{13}{6}x=\frac{13}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2.$

Svar: a) $y=\frac{2}{3}(x+1)$; b) $(2,2)$.

Övning 1.34 (Sid. 21)

Lösning



a) $v_1\cdot(t_1+t_2)=v_2\cdot(t_1+t_2-t_1) \Leftrightarrow v_1\cdot(t_1+t_2)=v_2t_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_1t_1+v_1t_2=v_2\cdot t_2 \Leftrightarrow v_2t_2-v_1t_2=v_1t_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (v_2-v_1)t_2=v_1t_1 \Leftrightarrow t_2=\frac{v_1}{v_2-v_1}t_1$

b) $\underline{v_1=80 km/h,\ v_2=90 km/h,\ t_1=1h.}$

$t_2=\frac{80}{90-80}\cdot 1=8h \Rightarrow t_1+t_2=\underline{9h} \Rightarrow s_2=v_2\cdot(t_1+t_2-t_1)=$

$=v_2t_2=90 km/h\cdot 8h=\underline{720 km.}$

c) $\underline{v_1=80 km,\ t_1=1h,\ t_1+t_2=6h.}$ $(t_2-t_1=5h)$.

$t_2=\frac{v_1t_1}{v_2-v_1} \Rightarrow 5=\frac{80\cdot 1}{v_2-80} \Leftrightarrow 5(v_2-80)=80 \Leftrightarrow 5v_2=$

$=480 \Leftrightarrow \underline{v_2=96\ km/h.}$

Resultat: a) $t_2=\frac{v_1}{v_2-v_1}t_1$; b) 720 km; c) 96 km/h.

Övning 1.35 (Sid. 21)

Lösning

$\underline{L_1: 2x+3y=5;\ \ L_2: 3x-y=0}$

Vi löser ut y i ekvationen till L_2 och sätter in det i ekvationen till L_1:

$3x-y=0 \Leftrightarrow y=3x \overset{!}{\Rightarrow} 2x+3\cdot 3x=5 \Leftrightarrow 11x=5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{5}{11} \Rightarrow y=3\cdot\frac{5}{11}=\frac{15}{11}.$

Resultat: Skärningspunkten är $(\frac{5}{11},\frac{15}{11})$.

Övning 1.36 (Sid. 21)

Lösning

a) $$\begin{cases} 19x+32y=6 \\ 6x-13y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x+32y=6 \\ 13y=6x-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x+32y=6 \\ y=\frac{6}{13}x-\frac{25}{13} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 19x+32\cdot(\frac{6x}{13}-\frac{25}{13})=6 \\ y=\frac{6}{13}x-\frac{25}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x+\frac{192}{13}x-\frac{800}{13}=6 \\ y=\frac{6}{13}x-\frac{25}{13} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (19+\frac{192}{13})x=6+\frac{800}{13} \\ y=\frac{6}{13}x-\frac{25}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{439}{13}x=\frac{878}{13} \\ y=\frac{6}{13}x-\frac{25}{13} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{878}{439}=2 \\ y=\frac{1}{13}(6\cdot\frac{878}{439}-25)=\frac{1}{13}\cdot(-\frac{5707}{439})=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}}$$

b) $$\begin{cases} 3x+y=b \\ ax-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=b \\ y=ax-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+ax-1=b \\ y=ax-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)x=b+1 \\ y=ax-1 \end{cases};$$

(1) $\underline{a\neq 3} \Leftrightarrow a+3\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{b+1}{a+3} \\ y=a\frac{b+1}{a+3}-1=\frac{ab-3}{a+3} \end{cases};$

(2) $\underline{a=-3} \Rightarrow \begin{cases} 0\cdot x=b+1 \text{ om } b+1\neq 0 & (i) \\ 0\cdot x=0 \text{ om } b+1=0 & (ii) \end{cases};$

I fallet (i) saknas lösning(ar).

I fallet (ii) kan x tas godtyckligt, dvs. $3x+y=-1$ (alla lösningar). Med $\underline{x=t}$ fås

$x=t,\ y=1-3t,\ t\in\mathbb{R}.$

Anm. Lösningen till ekvationen $ax=b$ är $x=\frac{b}{a}$, om $a\neq 0$; om $a=0$ och $b\neq 0$ saknar ekvationen lösning(ar); om $a=b=0$, så är alla x lösningar. Hur löser man en ekvation av typen $ax+by=c$ eller $ax+by+cz=d$, där a, b, c och är konstanter? Allt detta och mycket annat studeras i den linjära algebran.

Övning 1.37 (Sid. 21)

Lösning

Antag att x åskådare betalar 40kr för en biljett och y åskådare betalar 20kr för "samma" papperslapp: $40x+20y=14000$ (intäkterna); $x+y+a=412$ (a – antalet gratisåskådare).

$$\begin{cases} 20(2x+y)=20\cdot 700 \\ x+y+a=412 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=700 & (1) \\ x+y=412-a & (2) \end{cases};$$

(1) $y=700-2x \overset{(2)}{\Rightarrow} x+700-2x=412-a \Leftrightarrow -x+700=$

$=412-a \Leftrightarrow x=700-412+a=288+a;$ (3)

(1) $\Rightarrow y=700-2x=700-2(288+a)=124-2a;$

a) $a=26 \Rightarrow x=288+26=314$ och $y=124-52=72$.

b) $a=n \Rightarrow x=288+n$ och $y=124-2n$.

Övning 1.38 (Sid. 21)

Lösning

a) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y-z=4 \\ x-y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6-z \\ x+y=4+z \\ x-y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6-z=4+z \\ x+y-z=4 \\ x-y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-z=4+z \\ x+y-z=4 \\ x-y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ x=5-y \\ x=1+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ x=5-y \\ 5-y=1+y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ x=5-y \\ 2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ x=5-y \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ \underline{z=1} \end{cases}$. (Prövning?)

b) $\begin{cases} 2x+3y-4z=1 & (1) \\ x-2y+3z=0 & (2) \\ 3x+y-z=1 & (3) \end{cases}$

Jag löser ut x ur ekvationen (2) och sätter in det i ekvationerna (1) och (3):

$x-2y+3z=0 \Leftrightarrow x=2y-3z \Rightarrow \begin{cases} 2(2y-3z)+3y-4z=1 \\ 3(2y-3z)+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7y-10z=1 \\ 7y-10z=1 \end{cases} \Leftrightarrow 7y-10z=1 \Leftrightarrow 7y=1+10z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{1+10z}{7} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-3z \\ y=\frac{1+10z}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{7}(1+10z)-3z \\ y=\frac{1}{7}+\frac{10}{7}z \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{7}+\frac{20}{7}z-3z \\ y=\frac{1}{7}+\frac{10}{7}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{7}-\frac{1}{7}z \\ y=\frac{1}{7}+\frac{10}{7}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2/7-t \\ y=1/7+10t \\ z=7t \end{cases}$.

t kallas här (en) <u>parameter</u>.

<u>Prövning</u>

(1) $VL=2x+3y-4z=2(\frac{2}{3}-t)+3(\frac{1}{7}+10t)-4\cdot 7t=1=HL$.

(2) $VL=x-2y+3z=\frac{2}{7}-t-2(\frac{1}{7}+10t)+3\cdot 7t=0=HL$.

(3) $VL=3x+y-z=3(\frac{2}{7}-t)+\frac{1}{7}+10t-7t=1=HL$.

<u>Svar</u>: $x=\frac{2}{7}-t,\ y=\frac{1}{7}+10t,\ z=7t,\ -\infty<t<\infty$.

Systemet har <u>oändligt många lösningar</u>.

Testövning 1.39 (Sid. 22)

Lösning

a) $\sqrt{5\cdot 125}=\sqrt{5\cdot 5^3}=\sqrt{5^4}=(5^4)^{1/2}=5^{4\cdot(1/2)}=5^2=\underline{\underline{25}}$.

b) $\sqrt{\frac{64}{289}}=\sqrt{\frac{8^2}{17^2}}=\sqrt{(\frac{8}{17})^2}=\underline{\underline{\frac{8}{17}}}$.

c) $\sqrt{\frac{484}{11}}=\sqrt{\frac{4\cdot 121}{11}}=\sqrt{\frac{4\cdot 11^2}{11}}=\sqrt{4\cdot 11}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{11}=\underline{\underline{2\sqrt{11}}}$.

<u>Svar</u>: a) 25; b) 8/17; c) $2\sqrt{11}$.

Övning 1.40 (Sid. 22)

Lösning

a) $\frac{x^2}{4} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow x^2 = 4 \cdot \frac{25}{16} = \frac{25}{4} = \frac{5^2}{2^2} = \left(\pm\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \underline{x = \pm\frac{5}{2}}.$

b) $x^2+2x+1=10 \Leftrightarrow (x+1)^2=10 \Leftrightarrow x+1=\pm\sqrt{10} \Leftrightarrow \underline{x=-1\pm\sqrt{10}}.$

Testövning 1.41 (Sid. 22)

Lösning

a) $\underline{\sqrt{x^2+1}=2-x}$

VL är positivt, så även HL måste vara det. Detta kräver att $\underline{x<2}$. Eventuella rötter ska uppfylla detta villkor.

$\sqrt{x^2+1}=2-x \Rightarrow \cancel{x^2}+1=(2-x)^2=4-4x+\cancel{x^2} \Leftrightarrow 4x=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x=\frac{3}{4}}$ (rot, ty $\frac{3}{4}<2$).

b) $\underline{\sqrt{x^2+1}=x-2}$

$HL>0 \Leftrightarrow \underline{x>2}$; rot saknas, ty $(2-x)^2=(x-2)^2$.

För dem som inte blir övertygade!

$\sqrt{x^2+1}=x-2 \Rightarrow x^2+1=(x-2)^2=(2-x)^2 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}.$

Prövning visar att $x=\frac{3}{4}$ är ingen rot, ty $HL<0$.

Testövning 1.42 (Sid. 25)

Lösning

a) $x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow x^2+2x=8 \Leftrightarrow x^2+2x+1=8+1=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^2=3^2 \Leftrightarrow (x+1)^2-3^2=(x+1-3)(x+1+3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+4)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \vee x+4=0 \Leftrightarrow \underline{x=2} \vee \underline{x=-4}.$

Anm. Tecknet V utläses "eller".

b) $4x-x^2=4 \Leftrightarrow x^2-4x+4=(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=x_1=x_2=\underline{2}.$

Testövning 1.43 (Sid. 25)

Lösning

a) $\underline{\sqrt{x+30}=x}$

Villkor på x : $\underline{x\geq 0}$. $(VL\geq 0 \Rightarrow HL\geq 0)$.

$x+30=x^2 \Leftrightarrow x^2-x=30 \Leftrightarrow x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=30+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=30\frac{1}{4}=\frac{121}{4}=\left(\pm\frac{11}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=\pm\frac{11}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\overset{+}{(-)}\frac{11}{2} \Leftrightarrow \underline{x=6}.$

b) $\underline{\sqrt{x+30}=-x}$

Villkor på x : $\underline{x\leq 0}$.

$\sqrt{x+30}=-x \Rightarrow x^2=x+30 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\underset{-}{(+)}\frac{11}{2} \Leftrightarrow \underline{x=-5}.$

Testövning 1.44 (Sid. 27)

Lösning

a) $\underline{P_1:(-1,2),\ P_2:(3,-2).}$

$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(3+1)^2+(-2-2)^2}=$

$=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{2\cdot16}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{16}=\underline{4\sqrt{2}}.$

b) $\underline{P_1:(-3,-2),\ P_2:(4,-2).}$

$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4+3)^2+(-2+2)^2}=\sqrt{7^2}=7.$

Testövning 1.45 (Sid. 27)

Lösning

$\underline{M:(-2,3),\ r=3;\ P:(x,y)}$ löpande på cirkeln.

$(1.24)\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=3^2 \Leftrightarrow \underline{x^2+y^2+4x-6y+4=0}.$

Testövning 1.46 (Sid. 27)

Lösning

$2x^2+2y^2+2x-4y=1 \Leftrightarrow 2(x^2+y^2+x-2y)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+x-2y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x^2+x)+(y^2-2y)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+x+\frac{1}{4})+(y^2-2y+1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=(\frac{\sqrt{7}}{2})^2$; $\underline{M:(-\frac{1}{2},1),\ r=\sqrt{7}/2.}$

Testövning 1.47 (Sid. 28)

Lösning

a) $x^3=729=9^3 \Leftrightarrow \underline{x=9}.$

b) $16x^4=625 \Leftrightarrow (2x)^4=5^4 \Leftrightarrow ((2x)^2)^2=(5^2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x)^2=5^2 \Leftrightarrow 2x=\pm5 \Leftrightarrow \underline{x=\pm\frac{5}{2}}.$

c) $27x^5+8x^2=0 \Leftrightarrow x^2(27x^3+8)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \lor$

$\lor\ 27x^3+8=0 \Leftrightarrow x^2=0 \lor 27x^3=-8 \Leftrightarrow x^2=0 \lor$

$\lor\ (3x)^3=(-2)^3 \Leftrightarrow x^2=0 \lor 3x=-2 \Leftrightarrow \underline{x=0 \lor x=-\frac{2}{3}}.$

Övning 1.48 (Sid. 28)

Lösning

$x^3=512=8^3 \Leftrightarrow x=8$ cm (kantlängden).

Den sammanlagda arean är $6\cdot8^2=384$ cm^2.

(Sidoytorna, 6 till antal, är kvadrater).

Testövning 1.49 (Sid. 30)

Lösning

a) $\underline{x^3-3x^2-4x+12=0}$

$x^2(x-3)-4(x-3)=(x^2-4)(x-3)=(x-2)(x+2)(x-3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2=0 \vee x+2=0 \vee x-3=0 \Leftrightarrow \underline{x=2} \vee \underline{x=-2} \vee \underline{x=3}.$

b) $\underline{x^4-2x^3+3x^2-4x+2=0}$

$x^4-2x^3+3x^2-4x=-2 \Leftrightarrow x(x^3-2x^2+3x-4)=-2$; (*)

Låt oss ta reda på om det finns några heltalsrötter. VL i (*) är då ett heltal, dvs x är faktor i HL=−2; eventuella kandidater är ±1 eller ±2. Prövning visar att x=1 är en rot. Enligt faktorsatsen är x−1 en faktor i VL.

$$\begin{array}{rl}
x^3-\ x^2+2x-2 & \\
\hline
x^4-2x^3+3x^2-4x+2 & \boxed{x-1} \\
(-)\ \underline{x^4-\ x^3+0x^2+0x+0} & \\
-x^3+3x^2-4x+2 & \\
(-)\ \underline{-x^3+\ x^2+0x+0} & \\
2x^2-4x+2 & \\
(-)\ \underline{2x^2-2x+0} & \\
-2x+2 & \\
(-)\ \underline{-2x+2} & \\
0 &
\end{array}$$

$VL=(x-1)(x^3-x^2+2x-2)=(x-1)(x^2(x-1)+2(x-1))=$

$=(x-1)(x-1)(x^2+2)=(x-1)^2(x^2+2)$;

$VL=0=HL \Leftrightarrow (x-1)^2\underbrace{(x^2+2)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x=x_1=x_2=1.}$

Testövning 1.50 (Sid. 30)

Lösning

$x=4 \vee x=2 \vee x=x_1=x_2=-3 \Leftrightarrow x-4=0 \vee x=-2 \vee$

$\vee (x+3)^2=0 \Leftrightarrow (x-4)(x-2)(x+3)^2=(x^2-6x+8)(x^2+6x+9)=0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2+6x+9)-6x(x^2+6x+9)+8(x^2+6x+9)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4+6x^3+9x^2-6x^3-36x^2-54x+8x^2+48x+72=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x^4-19x^2-6x+72=0.}$

Anm. $a=4,\ b=2,\ c=d=-3.$

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$, enl. faktorsatsen.

$\Leftrightarrow x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x -$

$-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd=0 \Leftrightarrow \underline{x^4-19x^2-}$

$\underline{-6x+72=0.}$

Övning 1.51 (Sid. 31)

Lösning

a) $\sqrt{2x+4}=x+1 \geq 0 \Rightarrow \underline{x \geq -1}$ (villkor på x).

$2x+4=(x+1)^2=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

$x=\sqrt{3}$ är den enda roten, ty $x \geq -1$; $x=-\sqrt{3}$ är en "falsk" rot och förkastas därför.

b) $\underline{\sqrt{4x+1}=x+2}$

$4x+1=(x+2)^2=x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2+4=1 \Leftrightarrow x^2=-3$;

reella rötter saknas.

Övning 1.52 (Sid. 31)

Lösning

a) $\underline{4x^2+15x-4=0}$

$4(x^2+\frac{15}{4}x-1)=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{15}{4}x-1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{15}{8}\pm\frac{17}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x=-4 \vee x=\frac{1}{4}}.$

b) $\underline{21x-14-9x^2=0}$

$9x^2-21x+14=0 \Leftrightarrow (3x)^2-7\cdot 3x+14=0 \Leftrightarrow (t=3x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2-7t+14=0 \Leftrightarrow t=\frac{7}{2}\pm\frac{\sqrt{-7}}{2}$, icke-reella.

Reella rötter saknas således.

Övning 1.53 (Sid. 31)

Lösning

a) $\underline{x+\sqrt{x}=1}$

Termen $\sqrt{x}$ signalerar om att eventuella rötter ska vara icke-negativa; $x\geq 0$ (villkor).

$t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2 \Rightarrow VL=x+\sqrt{x}=t^2+t=1=HL \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}(\pm)\frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}=\underline{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.$

b) $\underline{x-\sqrt{x}=1}$

$x=t^2 \Rightarrow t^2-t=1 \Leftrightarrow t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{x} \Leftrightarrow \underline{x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$

Övning 1.54 (Sid. 31)

Lösning

a) $\begin{cases} x-3y=1 \\ x^2+9y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+3y \\ (1+3y)^2+9y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+3y \\ 18y^2+6y=24 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+3y \\ y^2+\frac{1}{3}y=\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+3y \\ y=1 \vee y=-\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-\frac{4}{3} \end{cases}$

Anm. Klammer i ett ekvationssystem motsvarar konnektivet $\wedge$ som utläses "och".

b) $\begin{cases} x+y=5 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ \frac{x+y}{xy}=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ y=\frac{4}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{4}{x}=5 \\ y=\frac{4}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4=0 \\ y=4/x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \vee x=4 \\ y=4/x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{(x=1 \wedge y=4)} \vee \underline{(x=4 \wedge y=1)}.$

Övning 1.55 (Sid. 31)

Lösning

Talen kallas x och y.

$$\begin{cases} x+y=10 \\ xy=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=10 \\ y=\frac{20}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{20}{x}=10 \\ y=10-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-10x+20=0 \\ y=10-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5\pm\sqrt{5} \\ y=10-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5\pm\sqrt{5} \\ y=5\mp\sqrt{5} \end{cases}.$$

Svar: $5+\sqrt{5}$ och $5-\sqrt{5}$.

Övning 1.56 (Sid. 31)

Lösning

$M:(2,4)$, $r=2\sqrt{5}$; $P:(x,y)$ löpande på C.

$$MP=r \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=2\sqrt{5}=\sqrt{20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=20 \Leftrightarrow \underline{C: x^2+y^2-4x-8y=0.}$$

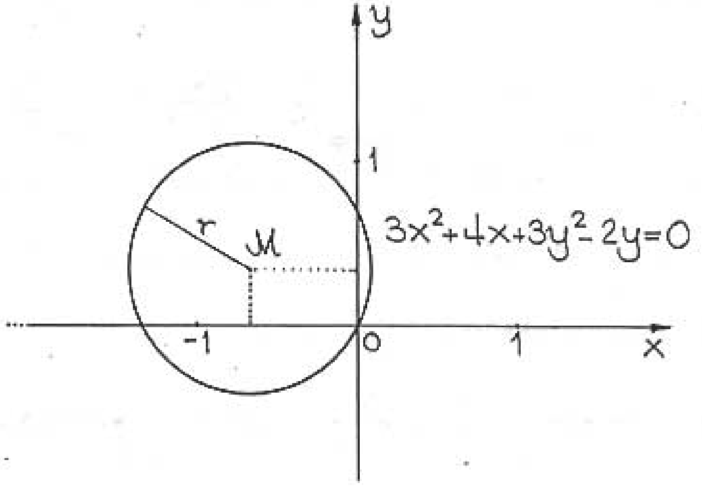
Övning 1.57 (Sid. 31)

Lösning

a) $3x^2+4x+3y^2-2y=0 \Leftrightarrow 3(x^2+y^2+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}y)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}y=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{4}{3}x+(\frac{2}{3})^2+y^2-\frac{2}{3}y+(\frac{1}{3})^2=$

$=(\frac{2}{3})^2+(\frac{1}{3})^2 \Leftrightarrow (x+\frac{2}{3})^2+(y-\frac{1}{3})^2=\frac{5}{9}=(\frac{\sqrt{5}}{3})^2$; cirkel med medelpunkten $M:(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ och radien $r=\frac{\sqrt{5}}{3}$.



b) $x^2+y^2-3x+2y+4=0 \Leftrightarrow x^2-3x+y^2+2y=-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-3x+(\frac{3}{2})^2+y^2+2y+1^2=-4+(\frac{3}{2})^2+1^2=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-\frac{3}{2})^2+(y+1)^2=-\frac{3}{4}$; VL ≥ 0 men HL <0!

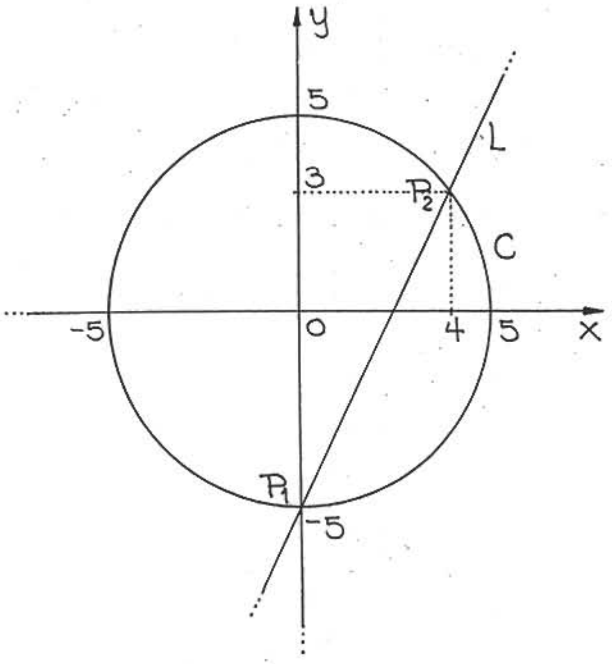
Ekvationen <u>saknar</u> geometrisk tolkning.

Övning 1.58 (Sid. 31)

Lösning

a) $\begin{cases} L: y=2x-5 \\ C: x^2+y^2=25 \end{cases} \Rightarrow L\cap C: \begin{cases} y=2x-5 \\ x^2+(2x-5)^2=25=5^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ 5x^2-20x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ x=0 \vee x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1:(0,-5) \\ P_2:(4,3) \end{cases}.$



b) $\begin{cases} L_1\ x+2y=2 \\ C: x^2+y^2-2x+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow L\cap C: \begin{cases} x=2-2y \\ x^2+y^2-2x+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ 4(1-y)^2+y^2-4(1-y)+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ 5y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases};$

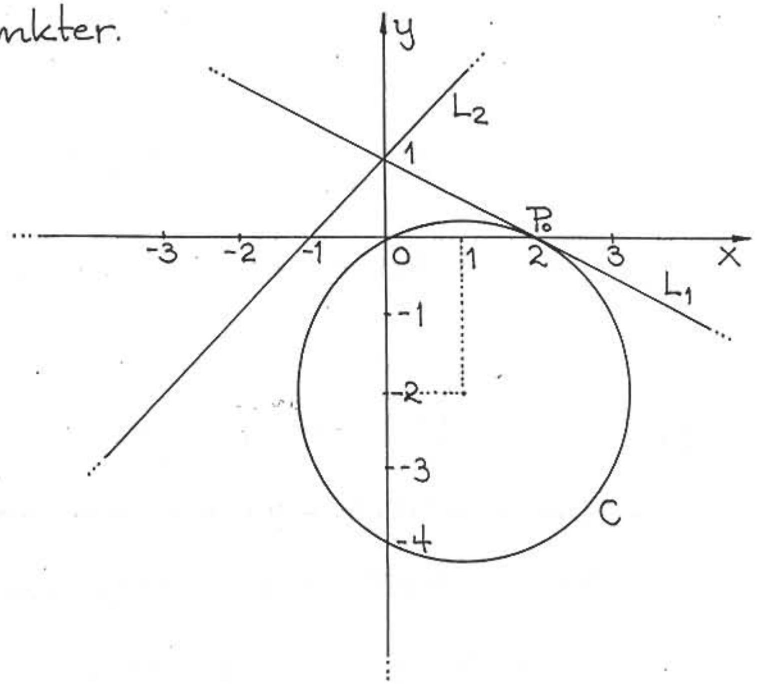
linjen och cirkeln tangerar varandra i punkten $P_0: (2;0)$ (se figur på nästa sida).

c) $\begin{cases} L_2: x-y+1=0 \\ C: x^2+y^2-2x+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow L\cap C: \begin{cases} y=x+1 \\ x^2+y^2-2x+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ x^2+(x+1)^2-2x+4(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ 2x^2+4x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ x^2+2x+\frac{5}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+\frac{3}{2}>0 \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow L_2\cap C=\emptyset.$

linjen och cirkeln saknar gemensamma punkter.



Övning 1.59 (Sid. 31)

Lösning

(1) $K\cdot(1+\frac{P}{100})^{10}=2K \Leftrightarrow (1+\frac{P}{100})^{10}=2 \Leftrightarrow 1+\frac{P}{100}=2^{1/10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P=100(2^{1/10}-1)\approx 7{,}18.$

(2) $K(1+\frac{P}{100})^{20}=2K \Leftrightarrow (1+\frac{P}{100})^{20}=2 \Leftrightarrow 1+\frac{P}{100}=2^{1/20} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P=100(2^{1/20}-1)\approx 3{,}53.$

Övning 1.60 (Sid. 31)

Lösning

a) $$2x^3+5x^2=4 \Leftrightarrow x(x^2+5x)=4.$$

Eventuella heltalsrötter är faktorer i 4 så vi undersöker om något av ±1, ±2 eller ±4 satisfierar ekvationen. Prövning visar att $x=-2$ är en rot så, enligt faktorsatsen, är $x+2$ faktor i polynomet $p(x)=2x^3+5x^2-4$.

Divisionsalgoritmen ger

$$\begin{array}{rl}
 2x^2+\ x-2 & \\
\hline
2x^3+5x^2+0x-4 & \boxed{x+2} \\
(-)\ \underline{2x^3+4x^2+0x+0} & \\
x^2+0x-4 & \\
(-)\ \underline{x^2+2x+0} & \\
-2x-4 & \\
(-)\ \underline{-2x-4} & \\
0 &
\end{array}$$

$$p(x)=(x+2)(2x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow x+2=0 \vee 2x^2+x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \vee x^2+\frac{1}{2}x-1=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}.$$

b) $$x^4+2x^3=2x+1 \Leftrightarrow x^4-1+2x^3-2x=(x^2-1)(x^2+1)+$$

$$+2x(x^2-1)=(x^2-1)(x^2+1-2x)=(x+1)(x-1)^3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \vee (x-1)^3=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1 \text{ (trefaldig)}.$$

c) $$4x^4-17x^2+4=0 \Leftrightarrow 4(x^2)^2-17x^2+4=0.$$

Substitutionen $t=x^2$ överför ekvationen till

$$4t^2-17t+4=0.$$

$$4(t^2-\frac{17}{4}t+1)=0 \Leftrightarrow t^2-\frac{17}{4}t+1=0 \Leftrightarrow t=\frac{17\pm15}{8}=x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2=4 \vee x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\pm2 \vee x=\pm1/2.$$

Ekvationen har 4 olika reella rötter nämligen $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=\frac{1}{2}$ och $x_4=-\frac{1}{2}$.

d) $$5x^4+3x^2=92 \Leftrightarrow 5(x^2)^2+3x^2-92=0 \Leftrightarrow (t=x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5t^2+3t-92=0 \Leftrightarrow 5(t^2+\frac{3}{5}t-\frac{92}{5})=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2+\frac{3}{5}t-\frac{92}{5}=0 \Leftrightarrow t=\frac{-3\pm43}{10} \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm2.$$

Ekvationen har rötterna $x_1=2$ och $x_2=-2$.

Övning 1.61 (Sid. 31)

Lösning

$$\underline{x^3+x^2+ax=6\,;\ x=2 \text{ rot.}}$$

$$x=2 \Rightarrow VL=2^3+2^2+2a=2a+12=6=HL \Leftrightarrow a=-3\,;$$

<u>Ansats till faktorisering:</u> $x^3+x^2-3x-6=(x-2)(x^2+\alpha x+3)$.

$$x^3+x^2-3x-6=x^3+(\alpha-2)x^2+(3-2\alpha)x-6 \Leftrightarrow \alpha=3.$$

$$x^3+x^2-3x-6=(x-2)(x^2+3x+3)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \vee$$

$\vee\ x^2+3x+3=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x \overset{!}{=} \frac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}$ (komplexa).

Resultat: För $a=-3$; ekvationen har då endast en rot, nämligen $x=2$.

Testövning 1.62 (Sid. 34)

Lösning

a) $3x-2 \leqslant 5-2x \Leftrightarrow 3x+2x \leqslant 5+2 \Leftrightarrow 5x \leqslant 7 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{7}{5}$.

b) $\frac{1}{x+2}>2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2}-2>0 \Leftrightarrow \frac{1-2(x+2)}{x+2}=\frac{-2x-3}{x+2}=-\frac{2x+3}{x+2}>0$

$\Leftrightarrow -(2x+3)(x+2)>0 \Leftrightarrow -2(x+\frac{3}{2})(x+2)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+\frac{3}{2})(x+2)<0$; $f(x)=(x+\frac{3}{2})(x+2)$ studeras.

...		-2		-3/2		x
sgn(x+2)	−	0	+	+	+	
sgn(x+1/2)	−	−	−	0	+	
sgn(f(x))	+	0	−	0	+	

$\therefore \frac{1}{x+2}>2 \Leftrightarrow -2<x<-3/2$.

Anm sgn( ) = signum( ) = tecknet på ( )

definieras av $\operatorname{sgn} u = \begin{cases} +1, & u>0 \\ 0, & u=0 \\ -1, & u<0 \end{cases}$.

Testövning 1.63 (Sid. 36)

Lösning

a) $|2-3|=|-1|=-(-1)=1$.

b) $|2\cdot(-4)|=|-8|=-(-8)=8$.

Alt. $|2\cdot(-4)|=|2|\cdot|-4|=2\cdot(-(-4))=2\cdot4=8$.

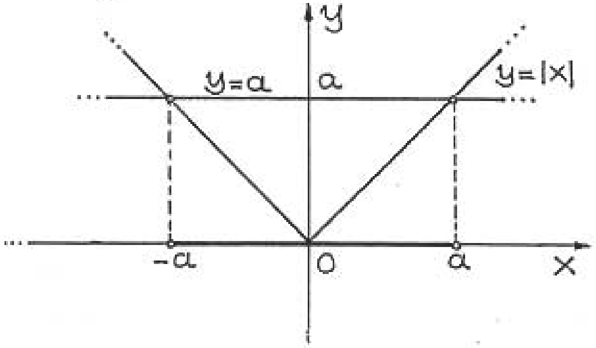
c) $\left|\frac{-4}{-3}\right|=\left|\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}$ (alt. $\left|\frac{-4}{-3}\right|=\frac{|-4|}{|-3|}=\frac{-(-4)}{-(-3)}=\frac{4}{3}$).

d) $\left|\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right|=\left|\frac{2\cdot4}{3\cdot4}-\frac{3\cdot3}{4\cdot3}\right|=\left|\frac{2\cdot4-3^2}{3\cdot4}\right|=\left|\frac{-1}{12}\right|=\frac{|-1|}{|12|}=\frac{-(-1)}{12}=\frac{1}{12}$.

Testövning 1.64 (Sid. 36)

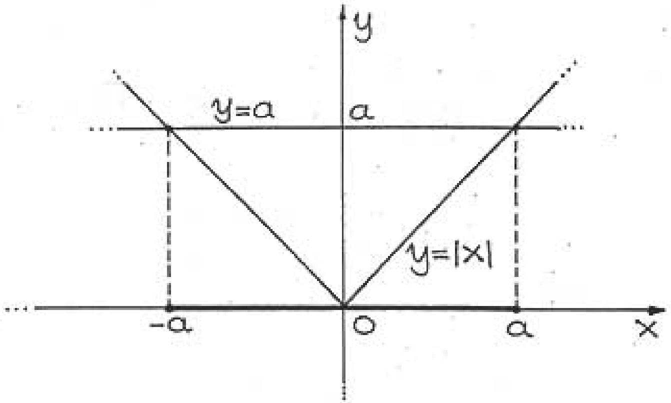
Lösning

I samma koordinatsystem uppritas graferna till $y=|x|$ och $y=a$, $a>0$.



(1) För vilka x ligger grafen till $y=|x|$ under linjen $y=a$? Det syns tydligt i figuren; för $-a<x<a$. Ringarna signalerar att just dessa punkter inte tillhör lösningsmängden:

$$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a.$$

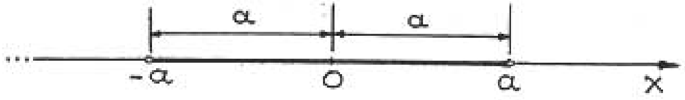


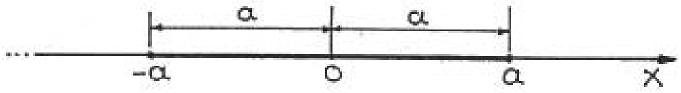
(2) Grafisk lösning till ekvationen $|x| \leq a$.

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

Annan lösning

$|x| < a \Leftrightarrow |x-0| < a \Leftrightarrow$ avståndet från x till 0 är högst a. De båda fallen illustreras enl. följande:

(1)


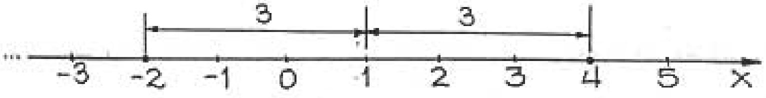
(2)


Testövning 1:65 (Sid. 40)

Lösning

a) $|x-1| = 3 \Leftrightarrow x-1 = 3 \vee x-1 = -3 \Leftrightarrow \underline{x=4} \vee \underline{x=-2}$.

Avståndet från x till 1 är exakt 2 (se fig.).



b) $\underline{|x+3| = 2|x-2| + 1}$ (*)

Anm. $|x-a| = (x-a) \cdot \text{sgn}(x-a)$.

		-3		2		x
sgn(x+3)	−	0	+	+	+	
sgn(x−2)	−	−	−	0	+	

(1) $\underline{x<-3} \overset{(*)}{\Rightarrow} -(x+3) = 2(-(x-2)) + 1 \Leftrightarrow -x-3 = -2x+4+1$

$\Leftrightarrow -x-3 = -2x+5 \Leftrightarrow x = 8$; ingen rot, ty $8 > -3$.

(2) $\underline{-3 \leq x < 2} \overset{(*)}{\Rightarrow} x+3 = 2(-(x-2)) + 1 \Leftrightarrow x+3 = -2x+4+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+3 = -2x+5 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow \underline{x = 2/3}$; rot.

(3) $\underline{x \geq 2} \overset{(*)}{\Rightarrow} x+3 = 2(x-2)+1 \Leftrightarrow x+3 = 2x-4+1 \Leftrightarrow x+3 =$

$= 2x-3 \Leftrightarrow \underline{x=6}$; rot.

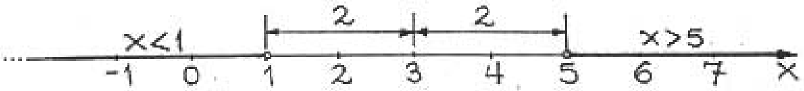
Resultat: $x_1 = -2,\ x_2 = 4$; b) $x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = 6$.

Testövning 1.66 (Sid. 40)

Lösning

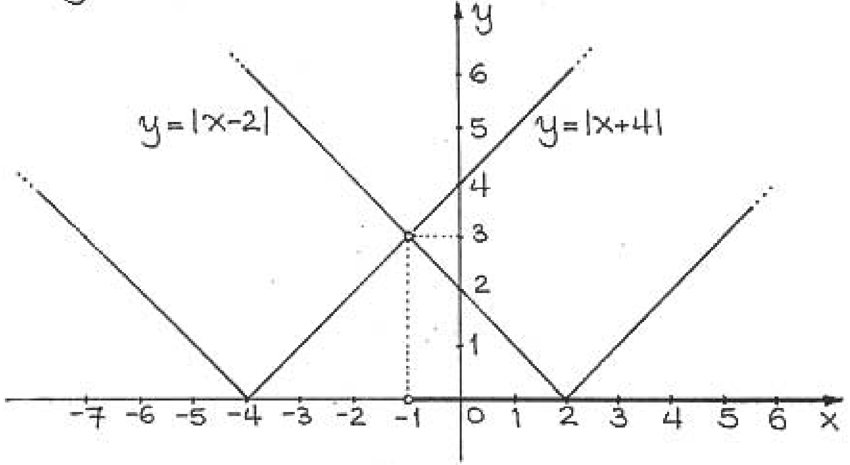
a) $|x-3| > 2 \Leftrightarrow x-3 > 2 \vee x-3 < -2 \Leftrightarrow \underline{x > 5 \vee x < 1}$.

Avståndet från x till 3 är lägst 2 ; de x som satisfierar olikheten är $x > 5$ och $x < 1$.



b) $\underline{|x+4|>|x-2|}$

Jag löser olikheten grafiskt. I samma koordinatsystem uppritas graferna till $y=|x+4|$ och $y=|x-2|$.



För vilka x ligger grafen till $y=|x+4|$ ovanför grafen till $y=|x-2|$? Det syns tydligt i figuren vilka är dex som uppfyller olikheten: $x>1$ (fetare linje).

Anm. Låt λ (lámda) vara ett fixt reellt tal. Man får grafen till $y=|x-\lambda|$ om man förskjuter $y=|x|$ $|\lambda|$ enheter åt vänster (höger) om $\lambda<0$ $(\lambda>0)$. Det är bra att veta.

Övning 1.67 (Sid. 40)

Lösning

$$\underline{y=\sqrt{x^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x^2 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-x^2=0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)(y+x)=0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \vee y=-x \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x,\ x\geq 0 \\ y=-x,\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{y=|x|}.$$

Övning 1.68 (Sid. 40)

Lösning

a) $$\frac{x-1}{x+2} \leq \frac{x-2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)}-\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-1)-(x^2-4)}{(x+1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{(x+1)(x+2)} \leq 0; \quad f(x)=\frac{3}{(x+1)(x+2)};$$

...		−2		−1		→ x
sgn(x+2)	−		+		+	
sgn(x+1)	−		−		+	
sgnf(x)	+		−		+	

Resultat: $-2<x<-1$.

b) $$\frac{3}{x+2} \geq x \Leftrightarrow \frac{3}{x+2}-x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-x(x+2)}{x+2} = \frac{3-x^2-2x}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x^2+2x-3)}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-1)(x+3)}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{(1-x)(x+3)}{x+2} \geq 0.$$

		-3		-2		1	
sgn(x+3)	−	0	+		+	+	+
sgn(x+2)	−	−	−		+	+	+
sgn(1−x)	+	+	+		+	0	−
sgn(f(x))	+	0	−		+	0	−

Resultat: $x \leq -3$ eller $-2 < x < 1$.

Övning 1.69 (Sid. 40)

Lösning

a) $|2x-1| = 3x-1$

(1) $|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 \text{ om } 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1) \text{ om } 2x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1, \text{ för } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1, \text{ för } x < \frac{1}{2} \end{cases}$;

(2) $0 \leq |2x-1| = 3x-1 \Leftrightarrow 3x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$;

(3) $|2x-1| = 3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = 3x-1, \text{ för } x \geq \frac{1}{2} \text{ och } x \geq \frac{1}{3} \\ -2x+1 = 3x-1, \text{ för } x < \frac{1}{2} \text{ och } x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \text{ för } x \geq \frac{1}{2} \text{ (självmotsägelse)} \\ x = \frac{2}{5}, \text{ för } \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x = \frac{2}{5}}$.

Anm. $|2x-1| = 3x-1 \overset{!}{\Rightarrow} (2x-1)^2 = (3x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1 =$

$= 9x^2-6x+1 \Leftrightarrow 5x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{2}{5}$; (Prövning!)

b) $x^2 = |x-1|$

(1) $x < 1 \Rightarrow x^2 = -(x-1) \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow \underline{x = (-1 \pm \sqrt{5})/2}$.

(2) $x \geq 1 \Rightarrow x^2 = x-1 \overset{!}{\Leftrightarrow} (x-\frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$; rötter saknas.

Resultat: Ekvationen har rötterna $-(1 \pm \sqrt{5})/2$.

c) Ekvationen löses grafiskt (geometriskt).

Att memorera: $|f(x)| = f(x) \cdot \text{sgn}(f(x))$.

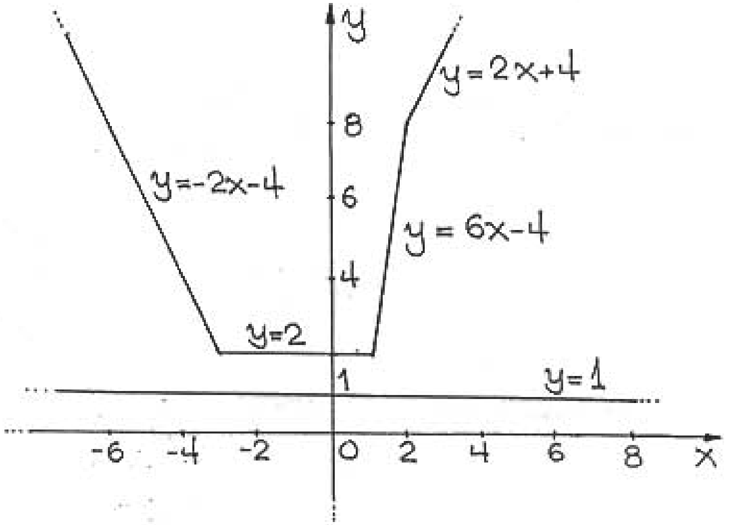
(1)

		-3		1		2	
sgn(x+3)	−	0	+	+	+	+	+
sgn(x−1)	−	−	−	0	+	+	+
sgn(x−2)	−	−	−	−	−	0	+

$$|x+3|-2|x-2|+3|x-1| = \begin{cases} -(x+3)+2(x-2)-3(x-1), & x<-3 \\ x+3+2(x-2)-3(x-1), & -3 \leq x < 1 \\ x+3+2(x-2)+3(x-1), & 1 \leq x < 2 \\ x+3-2(x-2)+3(x-1), & x \geq 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -2x-4, & x<-3 \\ 2, & -3 \leq x < 1 \\ 6x-4, & 1 \leq x < 2 \\ 2x+4, & x \geq 2 \end{cases} \text{ (Se fig.)}$$

(2)



(3) Kurvan (polygonen) $y = |x+3| - 2|x-2| + 3|x-1|$ och linjen $y=1$ saknar gemensamma punkter så ekvationen $|x+3| + 3|x-1| - 2|x-2| = 1$ saknar rötter.

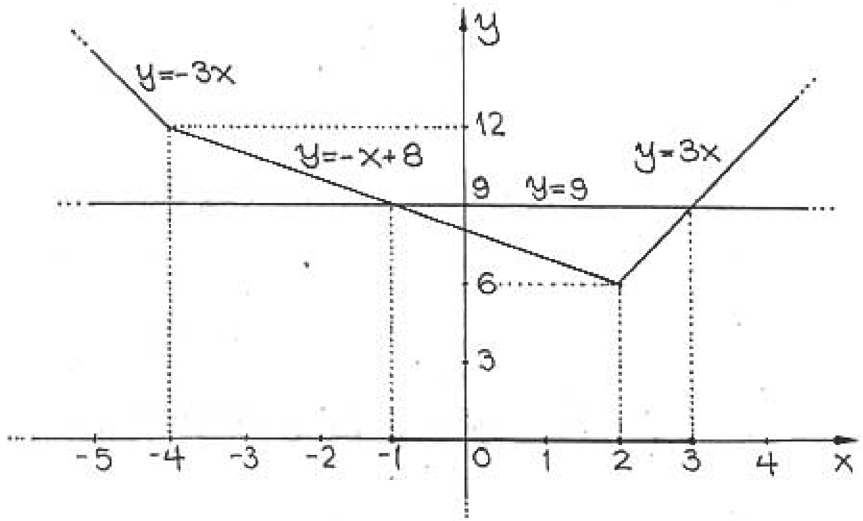
Övning 1.70 (Sid. 40)

Lösning

a) $\underline{2|x-2| + |x+4| \leq 9}$

(1) $$|x+4| + 2|x-2| = \left\{\begin{array}{ll} -(x+4)-2(x-2), & x<-4 \\ x+4-2(x-2) & , -4 \leq x < 2 \\ x+4+2(x-2) & , x \geq 2 \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} -3x & , x<-4 \\ -x+8 & , -4 \leq x < 2 \\ 3x & , 2 \geq x \end{array}\right\}.$$



(2) För vilka x ligger linjen $y=9$ över kurvan $y = 2|x-2| + |x+4|$? Svar: För $-1 \leq x \leq 3$.

b) $\underline{2|x-2| + |x+4| < 6.}$

Från figuren i föregående deluppgift får vi $2|x-2| + |x+4| \geq 6$; lösningsmängden till olikheten $2|x-2| + |x+4| < 6$ är således tom.

Övning 1.71 (Sid. 41)

Lösning

$\underline{a_1 = 10,\ b_1 = 10000;}$ $\underline{a_2 = 12,\ b_2 = 9500.}$

$a_1x + b_1 < a_2x + b_2 \Leftrightarrow 10x + 10000 < 12x + 9500 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x > 500 \Leftrightarrow \underline{x > 250.}$

Svar: Minst 251 enheter.

Testövning 1.72 (Sid. 44)

Lösning

a) $\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5 = 15 = \frac{5 \cdot 6}{2}$. (Sats 1.3).

b) $\sum_{k=2}^{6} k^2 = 2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 80.$

$\sum_{k=1}^{3} \frac{2}{2k-1} = \frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = 2(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}) = 2 \cdot \frac{15+5+3}{15} = \frac{46}{15}.$

Testövning 1.73 (Sid. 44)

Lösning

a) $3+5+7+9+11+13=(2\cdot\underline{1}+1)+(2\cdot\underline{2}+1)+(2\cdot\underline{3}+1)+(2\cdot\underline{4}+1)+$

$+(2\cdot\underline{5}+1)+(2\cdot\underline{6}+1)=\sum\limits_{k=1}^{6}(2k+1).$

b) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{(2\cdot\underline{1})^2}+\frac{1}{(2\cdot\underline{2})^2}+\frac{1}{(2\cdot\underline{3})!}+\dots+\frac{1}{(2\underline{n})!}=$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2},\ n=1,2,3,\dots$

Testövning 1.74 (Sid. 45)

Lösning

a) $\underbrace{1+2+3+\dots+1000}_{1000\text{ termer}}=1000\cdot\frac{1+1000}{2}=500\cdot1001=\underline{\underline{500500}}.$

b) $2^2+2^3+2^4+\dots+2^{12}=2^2(\underbrace{1+2^1+2^2+\dots+2^{10}}_{11\text{ termer}})=2^2\cdot\frac{2^{11}-1}{2-1}=\underline{\underline{8188}}.$

Testövning 1.75 (Sid. 45)

Lösning

a) $\prod\limits_{k=2}^{5}k^2=2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2=(2\cdot3\cdot4\cdot5)^2=120^2=\underline{\underline{14400}}.$

b) $\prod\limits_{k=0}^{4}2^k=2^0\cdot2^1\cdot2^2\cdot2^3\cdot2^4=2^{1+2+3+4}=2^{10}=\underline{\underline{1024}}.$

c) $\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k}=\frac{1+2}{1}\cdot\frac{2+2}{2}\cdot\frac{3+2}{3}\cdot\dots\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n}=$

$=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdot\dots\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n}=\frac{1}{2}(n+1)(n+2).$

Testövning 1.76 (Sid. 46)

Lösning

$7!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=\underline{\underline{5040}}.$

$8!=7!\cdot8=5040\cdot8=\underline{\underline{40320}}.$

$9!=8!\cdot9=40320\cdot9=\underline{\underline{362880}}.$

$10!=9!\,10=362880\cdot10=\underline{\underline{3628800}}.$

Testövning 1.77 (Sid. 46)

Lösning

a) Det första objektet kan väljas på 3 olika sätt. För var och en av dessa möjligheter kan man ta ett godtyckligt objekt av de återstående 2. Det finns alltså $3\cdot2$ olika sätt att välja de två första objekten. Det tredje objektet kan väljas på bara ett sätt.

Totala antalet konfigurationer: $3\xrightarrow{(1)}3\cdot2\xrightarrow{(2)}3\cdot2\cdot1=3!$

$O_1O_2O_3,\ O_1O_3O_2,\ O_2O_1O_3,\ O_2O_3O_1,\ O_3O_1O_2,\ O_3O_2O_1.$

b) Ett fjärde objekt kan placeras bland en 3-objektskonfiguration på 4 olika sätt. Vi har

(1) $O_1O_2O_3 \longrightarrow O_4O_1O_2O_3,\ O_1O_4O_2O_3,\ O_1O_2O_4O_3,\ O_1O_2O_3O_4.$

(2) $O_1O_3O_2 \longrightarrow O_4O_1O_3O_2,\ O_1O_4O_3O_2,\ O_1O_3O_4O_2,\ O_1O_3O_2O_4.$

(3) $O_2O_1O_3 \longrightarrow O_4O_2O_1O_3,\ O_2O_4O_1O_3,\ O_2O_1O_4O_3,\ O_2O_1O_3O_4.$

(4) $O_2O_3O_1 \longrightarrow O_4O_2O_3O_1,\ O_2O_4O_3O_1,\ O_2O_3O_4O_1,\ O_2O_3O_1O_4.$

(5) $O_3O_1O_2 \longrightarrow O_4O_3O_1O_2,\ O_3O_4O_{12},\ O_3O_1O_4O_2,\ O_3O_1O_2O_4.$

(6) $O_3O_2O_1 \longrightarrow O_4O_3O_2O_1,\ O_3O_4O_2O_1,\ O_3O_2O_4O_1,\ O_3O_2O_1O_4.$

Antalet konfigurationer blir för 4 objekt $4 \cdot 6 = 4 \cdot 3! = 4!$. ($O_k$ är objekt nr k.)

Detta kan lätt generaliseras till fler än 4 objekt. För n objekt finns det n möjligheter att placera ett objekt bland en viss konfiguration av $n-1$ element. Om vi antar att det finns $(n-1)!$ $n-1$-konfigurationer, så blir antalet sätt att ordna n objekt $n \cdot (n-1)! = n!$ Detta är vad man kallar ett induktionsbevis (om detta senare i kursen).

c) Det första objektet i en k-konfiguration kan väljas på n olika sätt. Den andra platsen kan besättas på $n-1$ olika sätt; de två första platserna kan besättas på $n \cdot (n-1)$ olika sätt. Sedan kan den tredje platsen besättas på $n-2$ olika sätt osv. Den sista platsen, den k:te, kan besättas på $n-(k-1)$ olika sätt.

Det totala antalet k-konfigurationer blir

$$n \cdot (n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

<u>Anm</u>. $k=n$ är ett specialfall.

d) Om vi har n olika objekt och vi vill välja k stycken, kan detta ske så här. Konfigurationer som omfattar (består av) samma objekt kan ordnas på $k!$ olika sätt, antalet konfigurationer av k objekt. Antalet konfigurationer med k element är alltså

$$\frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\ ;\ (\text{se c})).$$

Testövning 1.78 (Sid. 49)

Lösning

(1) $\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{n!}{0!n!}=\frac{n!}{1\cdot n!}=1$, ty $0!:=1$.

Tecknet $:=$ utläses "är enligt definition lika med"; alternativa beteckningar är $\triangleq$ el. $\overset{\text{def}}{=}$

(2) $\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!0!}=\frac{n!}{0!n!}=1$, enl. (1).

(3) $\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=\frac{(n-1)!\,n}{1\cdot(n-1)!}=n$.

(4) $\binom{n}{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!\,1!}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=n$, enligt (3).

(5) $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\binom{n}{n-k}$.

Testövning 1.79 (Sid. 49)

Lösning

$$HL=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!(n-k)}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!\,k}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k}\right)=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\cdot\frac{n}{(n-k)k}=$$

$$=\frac{(n-1)!\cdot n}{(k-1)!\cdot k\cdot(n-k-1)!(n-k)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}=VL.$$

Testövning 1.80 (Sid. 49)

Lösning

$$\binom{7}{5}=\frac{7!}{5!(7-5)!}=\frac{7!}{5!2!}=\frac{5!6\cdot7}{5!\cdot2}=\frac{7\cdot6}{2}=7\cdot3=21.$$

Testövning 1.81 (Sid. 49)

Lösning

$$(2x-y)^6=(2x+(-y))^6=\binom{6}{0}(2x)^6(-y)^0+\binom{6}{1}(2x)^5(-y)^1+$$

$$+\binom{6}{2}(2x)^4(-y)^2+\binom{6}{3}(2x)^3(-y)^3+\binom{6}{4}(2x)^2(-y)^4+$$

$$+\binom{6}{5}(2x)^1(-y)^5+\binom{6}{6}(2x)^0(-y)^6=$$

$$=1\cdot(2x)^6+6\cdot(2x)^5(-y)+15\cdot(2x)^4(-y)^2+$$

$$+20(2x)^3(-y)^3+15(2x)^2(-y)^4+6(2x)(-y)^5+$$

$$+(-y)^6=\underline{64x^6-192x^5y+240x^4y^2-}$$

$$\underline{-160x^3y^3+60x^2y^4-12xy^5+y^6.}$$

Övning 1.82 (Sid. 49)

Lösning

$x_1=19250$, $x_2=20240$, $x_3=19200$, $x_4=66200$,

$x_5 = 21090,\ x_6 = 18620,\ x_7 = 19500.$

$$\overline{x} = \frac{1}{7}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7) =$$
$$= \frac{1}{7}(19250+20240+19200+66200+21090+18620+$$
$$+19500) = \frac{1}{7}\cdot 184100 = \underline{26300}.$$

Låt oss rangordna lönerna.

18620, 19200, 19250, $\underline{19500}$, 20240, 21090, 66200.

Medianen 19500 är ett lämpligt mått.

Ett annat mått är medelvärdet av alla utom den lägsta och den högsta:

$$\hat{x} = \frac{1}{5}(19200+19250+19500+20240+21090) = \underline{19856}.$$

Anm. Så får man fram poängsumman i t.ex. simhopp, konståkning och backhoppning.

Övning 1.83 (Sid. 49)

Lösning

a) $$\sum_{k=1}^{99}\left(\frac{k}{2}+2\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{99}k + 2\sum_{k=1}^{99}1 = \frac{1}{2}\cdot 100\cdot\frac{99+1}{2} + 2\cdot 100 =$$
$$= 100\cdot 25 + 100\cdot 2 = 100(25+2) = \underline{2700}.$$

b) $\underline{a=4,\ k=\frac{1}{2}}$: $$2^2+2^1+2^0+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5} = \sum_{k=-2}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k =$$
$$= 4\cdot\frac{(1/2)^8-1}{1/2-1} = 8\left(1-\frac{1}{2^8}\right) = 8-\frac{1}{32} = \underline{\frac{255}{32}}.$$

Övning 1.84 (Sid. 49)

Lösning

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1 = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2+n-n = n^2.$$

Övning 1.85 (Sid. 49)

Lösning

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^k \quad \text{(binomialsatsen)}$$

a) $$x=1=y \Rightarrow (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot 1^k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$

b) $$x=1=-y \Rightarrow (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-1}\cdot(-1)^k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0.$$

Övning 1.86 (Sid. 49)

Lösning

$$\underline{A = \frac{a_1+a_2}{2},\quad G = \sqrt{a_1a_2}}.$$

$$A-G = \frac{a_1+a_2}{2} - \sqrt{a_1a_2} = \frac{a_1+a_2-2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}}{2} = \frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2} \geqslant 0$$

$\Leftrightarrow \underline{A \geqslant G}.$ (Obs! $x \geqslant y \Leftrightarrow x-y \geqslant 0$).

$$A=G \Leftrightarrow A-G=0 \Leftrightarrow (\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}) = (\sqrt{a_1})^2-(\sqrt{a_2})^2 = a_1-a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2.$$

Övning 1.87 (Sid. 50)

Lösning

$$\Sigma = a + a(1+\frac{r}{100}) + a(1+\frac{r}{100})^2 + a(1+\frac{r}{100})^3 + \cdots + a(1+\frac{r}{100})^n =$$

$$= a\left(1 + (1+\frac{r}{100}) + (1+\frac{r}{100})^2 + (1+\frac{r}{100})^3 + \cdots + (1+\frac{r}{100})^n\right) =$$

$$= a \cdot \frac{(1+r/100)^{n+1} - 1}{(1+r/100) - 1} = \underline{\frac{100a}{r}\left((1+\frac{r}{100})^{n+1} - 1\right)}.$$

Övning 1.88 (Sid. 50)

Lösning

a) $\Sigma = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{63} = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} =$

$= \frac{2^{64}-1}{2-1} = \underline{2^{64}-1}.$

b) $\Sigma = 2^{64} - 1 \approx 2^{64} = 10^{64 \lg 2} = 10^{19,27}$ korn $= \frac{10^{19,27}}{10^3}$ kg $=$

$= \frac{10^{19,27}}{10^6}$ ton $= 10^{13,27}$ ton $= \underline{1,9 \cdot 10^{13} \text{ ton}}.$

Testövning 1.89 (Sid. 51)

Lösning

$$\underline{z_1 = 3+5i}\ ,\ \underline{z_2 = 2-7i}$$

$z_1 + z_2 = 3+5i+2-7i = 3+2+5i-7i = \underline{5-2i}.$

$z_1 - z_2 = 3+5i-(2-7i) = 3+5i-2+7i = 3-2+5i+7i = \underline{1+12i}.$

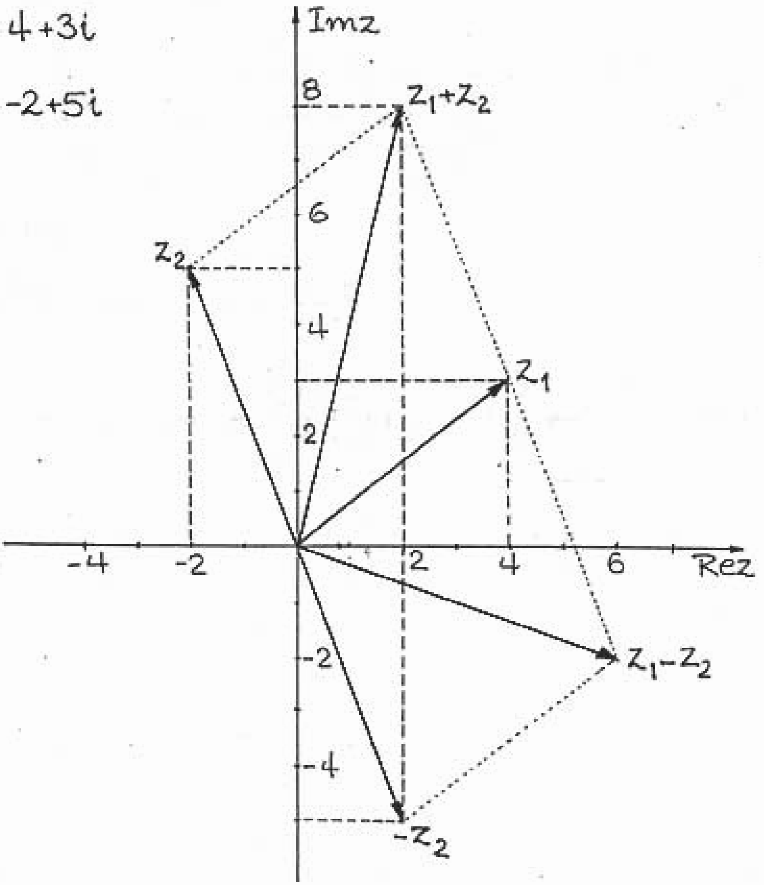
$z_1 z_2 = (3+5i)(2-7i) = 6-21i+10i+35 = \underline{41-11i}.$

Testövning 1.90 (Sid. 55)

Lösning

$z_1 = 4+3i$

$z_2 = -2+5i$



Testövning 1.91 (Sid. 55)

Lösning

$$\underline{z_1 = 4-5i}\ ,\ \underline{z_2 = 5+4i}$$

(1) $|z_1| = |4-5i| = \sqrt{4^2+(-5)^2} = \sqrt{16+25} = \underline{\sqrt{41}}.$

(2) $|z_2|=|5+4i|=|i(4-5i)|=|i|\cdot|4-5i|=1\cdot\sqrt{41}=\underline{\sqrt{41}}.$

(3) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{41}\cdot\sqrt{41}=\underline{41}.$

(4) $|z_1+z_2|=|4-5i+5+4i|=|9-i|=\sqrt{9^2+(-1)^2}=\sqrt{81+1}=\underline{\sqrt{82}}.$

(5) $|z_1|+|z_2|=\sqrt{41}+\sqrt{41}=\underline{2\sqrt{41}}.$

Testövning 1.92 (Sid. 56)

Lösning

a) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{5+2i}{5-2i}=\frac{(5+2i)^2}{(5-2i)(5+2i)}=\frac{5^2+20i-4}{5^2+2^2}=\frac{21+20i}{29}=\underline{\frac{21}{29}+\frac{20}{29}i}.$

b) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{4-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+4i}=\frac{-i(\sqrt{3}+4i)}{\sqrt{3}+4i}=\underline{-i}.$

Testövning 1.93 (Sid. 56)

Lösning

(1) $z=x+iy \Rightarrow \overline{\overline{z}}=\overline{\overline{x+iy}}=\overline{x-iy}=x-(-i)y=x+iy=z.$

(2) $\begin{cases} z=x+iy \\ \overline{z}=x-iy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+\overline{z}=2x=2\mathrm{Re}z \\ z-\overline{z}=2iy=2i\mathrm{Im}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}z=\frac{z+\overline{z}}{2} \\ \mathrm{Im}z=\frac{z-\overline{z}}{2i} \end{cases}.$

(3) $z=x+iy \Rightarrow z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=(\sqrt{x^2+y^2})^2=|z|^2.$

Testövning 1.94 (Sid. 57)

$z^2+4z+6=0 \Leftrightarrow z=-2\pm\sqrt{-2} \Leftrightarrow \underline{z=-2+i\sqrt{2}} \vee \underline{z=-2-i\sqrt{2}}.$

Testövning 1.95 (Sid. 57)

Lösning

a) $z=x+iy \Rightarrow z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy=3-4i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=-4 \end{cases} \overset{!}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x^2+y^2=5 \\ 2xy=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=8 \\ 2y^2=2 \\ 2xy=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y^2=1 \\ xy=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm2 \\ y=\pm1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=x+iy \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=x+iy \end{cases} \Leftrightarrow \underline{z=2-i} \vee \underline{z=-2+i}.$

Anm. I $\overset{!}{\Leftrightarrow}$ underförstås följande:

$z^2=3-4i \Leftrightarrow |z^2|=|z|^2=|3-4i| \Leftrightarrow x^2+y^2=5.$

b) $z^2+(2-2i)z-3+2i=0 \Leftrightarrow z^2+2(1-i)z-3+2i=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=-(1-i)+\sqrt{(1-i)^2+3-2i}=-(1-i)+\sqrt{3-4i}=(a))=$

$=-(1-i)\pm(2-i) \Leftrightarrow \underline{z=1} \vee \underline{z=-3+2i}.$

Testövning 1.96 (Sid. 59)

Lösning

(1) $z=1+i \Rightarrow z^4=(z^2)^2=((1+i)^2)^2=(2i)^2=-4 \Leftrightarrow z^4+4=0$

(2) $\left.\begin{cases} z=1+i \text{ rot} \Leftrightarrow z-(1+i) \text{ faktor i } z^4+4 \\ z=1-i \text{ rot, ty koefficienterna reella} \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (z-(1+i))(z-(1-i))=((z-1)-i)((z-1)+i)=(z-1)^2+1=$

$= z^2-2z+1+1 = z^2-2z+2$ faktor i z^4+4.

$$\begin{array}{rl} & z^2+2z+2 \\ \hline z^4+0\cdot z^3+0\cdot z^2+0\cdot z+4 & \boxed{z^2-2z+2} \\ (-)\ \underline{z^4-2z^3+2\cdot z^2+0\cdot z+0} & \\ 2z^3-2z^2+0\cdot z+4 & \\ (-)\ \underline{2z^3-4z^2+4\cdot z+0} & \\ 2z^2-4\cdot z+4 & \\ (-)\ \underline{2z^2-4z+4} & \\ 0 & \end{array}$$

$$z^4+4 = \underline{(z^2-2z+2)(z^2+2z+2)}.$$

Anm. $z^4+4 = (z^4+4z^2+4)-4z^2 = (z^2+2)^2-(2z)^2 =$

$$=(z^2+2-2z)(z^2+2+2z) = (z^2-2z+2)(z^2+2z+2).$$

Övning 1.97 (Sid. 58)

Lösning

a) $\underline{z_1 = 2+4i,\ z_2 = 5-i}$

$z_1 z_2 = (2+4i)(5-i) = 10-2i+20i+4 = \underline{24+18i}.$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+4i}{5-i} = \frac{(2+4i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{10+2i+20i-4}{5^2+1^2} = \frac{6+22i}{26} = \underline{\frac{3}{13}+\frac{11}{13}i}.$

b) $\underline{z_1 = 2i,\ z_2 = 3+4i}$

$z_1 \cdot z_2 = 2i(3+4i) = 6i+8i^2 = \underline{-8+6i}.$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{3+4i} = \frac{2i(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6i-8i^2}{3^2+4^2} = \frac{8+6i}{25} = \underline{\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i}.$

Resultat: Se ovan.

Övning 1.98 (Sid. 59)

Lösning

$c\bar z = i \Leftrightarrow \overline{c\bar z} = \bar i \Leftrightarrow \bar c \cdot \bar{\bar z} = -i \Leftrightarrow \bar c z = -i \Leftrightarrow c\bar c z = -ic \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |c|^2 z = -ic \Leftrightarrow |3+5i|^2 z = -i(3+5i) \Leftrightarrow 34z = 5-3i$

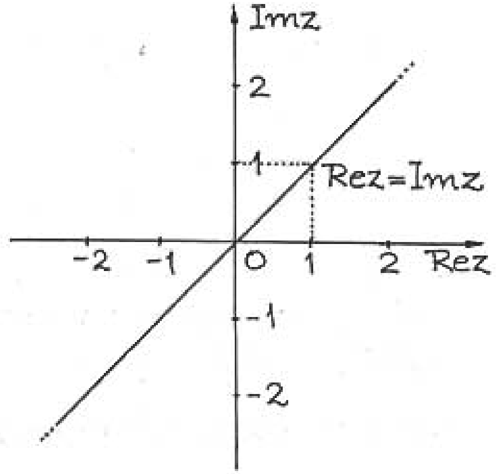
$\Leftrightarrow z = \frac{5-3i}{34} = \underline{\frac{5}{34}-\frac{3}{34}i}.$

Övning 1.99 (Sid. 59)

Lösning

a) $\underline{\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z}$

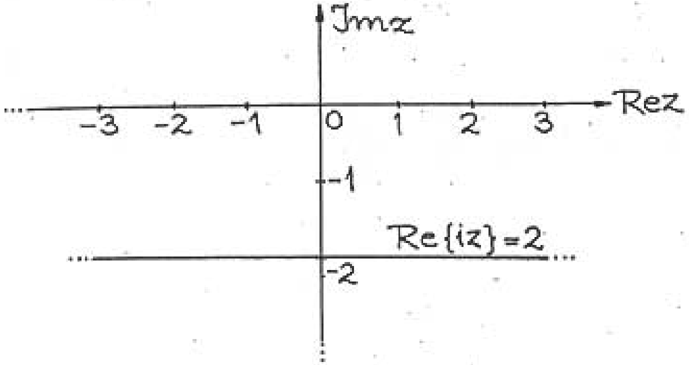
$z = x+iy \wedge \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z \Leftrightarrow x=y \Leftrightarrow y=x$ (Se fig.)



b) $\underline{\operatorname{Re}\{iz\} = 2}$

$z = x+iy \Rightarrow iz = i(x+iy) = -y+ix \Rightarrow \operatorname{Re}\{iz\} = -\operatorname{Im} z$;

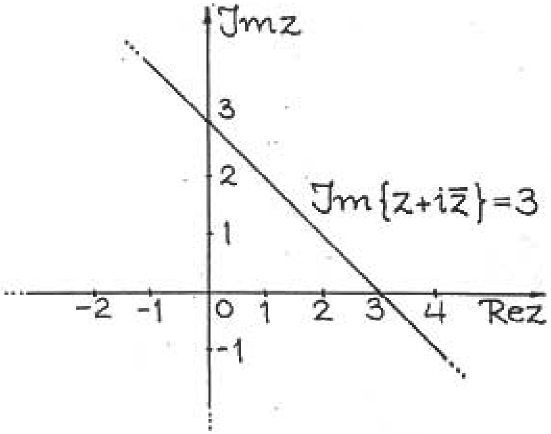
$\operatorname{Re}\{iz\} = 2 \Leftrightarrow -\operatorname{Im} z = 2 \Leftrightarrow \underline{\operatorname{Im} z = -2.}$ (Se figur).



c) $\underline{\operatorname{Jm}\{z+i\bar{z}\}=3}$

$z=x+iy \Rightarrow z+i\bar{z}=x+iy+i(x-iy)=x+y+i(x+y);$

$\operatorname{Jm}\{z+i\bar{z}\}=3 \Leftrightarrow x+y=3 \Leftrightarrow \underline{\operatorname{Re}z+\operatorname{Jm}z=3}.$ (Se fig.)

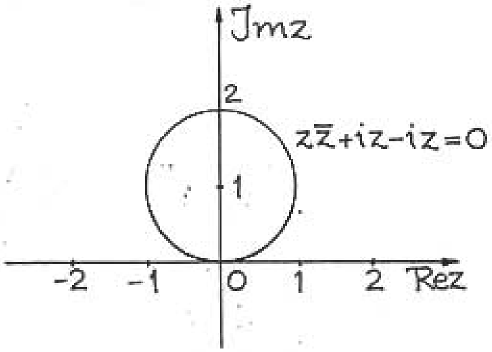


d) $\underline{z\bar{z}+iz-i\bar{z}=0}$

$z=x+iy \Rightarrow z\bar{z}+iz-i\bar{z}=|z|^2+i(z-\bar{z})=|z|^2+i\,2i\operatorname{Jm}z=$

$=|z|^2-2\operatorname{Jm}z=x^2+y^2-2y=0 \Leftrightarrow \underline{x^2+(y-1)^2=1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x+i(y-1)|^2=1 \Leftrightarrow |z-i|^2=1 \Leftrightarrow \underline{|z-i|=1}$ (cirkel).



Övning 1.100 (Sid. 59)

Lösning

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{x_1+iy_1+x_2+iy_2}=\overline{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}=$

$=x_1+x_2-i(y_1+y_2)=x_1-iy_1+x_2-iy_2=$

$=\overline{x_1+iy_1}+\overline{x_2+iy_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2.$

(2) $\overline{z_1z_2}=\overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)}=\overline{x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)}$

$=x_1x_2-y_1y_2-i(x_1y_2+x_2y_1)=$

$=x_1x_2+(-iy_1)(-iy_2)+x_1(-iy_2)+x_2(-iy_1)=$

$=x_1(x_2-iy_2)-iy_1(x_2-iy_2)=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)=$

$=(\overline{x_1+iy_1})(\overline{x_2+iy_2})=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2.$

Övning 1.101 (Sid. 59)

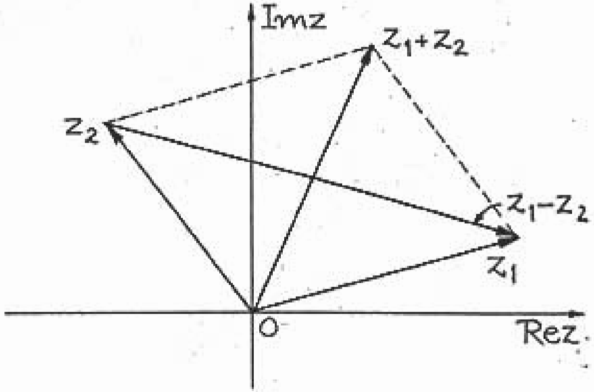
Lösning

$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=$

$= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) + (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+$

$+ z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} =$

$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$



Summan av kvadraterna på diagonalerna i en parallellogram är lika med summan av kvadraterna på dess sidor.

Övning 1.102 (Sid. 59)

Lösning

a) $\underline{z^2+iz+6=0}$

$z = -\frac{i}{2} + \sqrt{-\frac{1}{4}-6} = -\frac{i}{2} + \sqrt{-\frac{25}{4}} = -\frac{i}{2} \pm \frac{5i}{2} \Leftrightarrow \underline{z=2i} \vee \underline{z=-3i}.$

b) $\underline{z^3-iz^2+4z-4i=0}$

$z^2(z-i)+4(z-i) = (z^2+4)(z-i) = (z-2i)(z+2i)(z-i) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z-2i=0 \vee z+2i=0 \vee z-i=0 \Leftrightarrow \underline{z=i} \vee \underline{z=\pm 2i}.$

Övning 1.103 (Sid. 60)

Lösning

a) $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}} = \dfrac{ab(a+b)(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b})}{ab(a+b)(\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b})} = \dfrac{\frac{ab(a+b)}{a}-\frac{ab(a+b)}{a+b}}{\frac{ab(a+b)}{b}-\frac{ab(a+b)}{a+b}} =$

$= \dfrac{b(a+b)-ab}{a(a+b)-ab} = \dfrac{ab+b^2-ab}{a^2+ab-ab} = \underline{\dfrac{b^2}{a^2}}.$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right) = \sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt{2}+1+(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} =$

$= \sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \sqrt{2}\,\dfrac{2\sqrt{2}}{2-1} = \sqrt{2}\,\dfrac{2\sqrt{2}}{1} = 2(\sqrt{2})^2 = 2^2 = \underline{4}.$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1} + \dfrac{x}{x^2-2x+1} + \dfrac{x-2}{x^2-1} = \dfrac{x^2}{(x+1)^2} + \dfrac{x}{(x-1)^2} + \dfrac{x-2}{x^2-1} =$

$= \dfrac{x^2(x-1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} + \dfrac{x(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} + \dfrac{(x-2)(x^2-1)}{(x^2-1)^2} =$

$= \dfrac{x^2(x^2-2x+1)+x(x^2+2x+1)+(x-2)(x^2-1)}{(x^2-1)^2} =$

$= \dfrac{x^4-2x^3+x^2+x^3+2x^2+x+x^3-2x^2-x+2}{(x^2-1)^2} =$

$= \underline{\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^2-1)^2}}.$

d) $\left(\dfrac{xy^{-1}z^2}{x^{-2}yz^{-1}}\right)^{-1} = (x^{1-(-2)}\cdot y^{-1-1}z^{2-(-1)})^{-1} = (x^3y^{-2}z^3)^{-1} =$

$= \left(\dfrac{x^3z^3}{y^2}\right)^{-1} = \underline{\dfrac{y^2}{x^3z^3}}.$

Anm. I c) har räkningarna mening för $x \neq \pm 1$.

Övning 1.104 (Sid. 61)

Lösning

a) $\underline{2x^2+8x=1} \Leftrightarrow 2(x^2+4x)=1 \Leftrightarrow x^2+4x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+4x+$

$+4=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow (x+2)^2=(\pm\frac{3}{\sqrt{2}})^2 \Leftrightarrow x+2=\pm\frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x=-2-\frac{3}{\sqrt{2}}} \vee \underline{x=-2+\frac{3}{\sqrt{2}}}.$

b) $\underline{5x^2+4x+1=0} \Leftrightarrow 5(x^2+\frac{4}{5}x)=-1 \Leftrightarrow x^2+\frac{4}{5}x=-\frac{1}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}=-\frac{1}{5}+\frac{4}{25} \Leftrightarrow (x+\frac{2}{5})^2=-\frac{1}{25}$; ekvation-en saknar reella rötter.

c) $\frac{2x-1}{x+2}+\frac{x+2}{2x-1}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{(2x-1)^2}{(x+2)(2x-1)}+\frac{(x+2)^2}{(x+2)(2x-1)}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(2x-1)^2+(x+2)^2}{(x+2)(2x-1)}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{4x^2-4x+1+x^2+4x+4}{2x^2+4x-x-2}=\frac{10}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{5x^2+5}{2x^2+3x-2}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3(5x^2+5)=10(2x^2+3x-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15x^2+15=20x^2+30x-20 \Leftrightarrow 5x^2+30x-35=0$

$\Leftrightarrow 5(x^2+6x-7)=0 \Leftrightarrow x^2+6x-7=0 \Leftrightarrow x=-3\pm 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x=1} \vee \underline{x=-7}.$

d) $\underline{x^3+x^2-14x=24} \Leftrightarrow x\cdot(x^2+x-14)=24.$

Eventuella heltalslösningar är faktorer i 24.

Prövning visar att $x=4$ är en rot, vilket innebär att $x-4$ är en faktor i $x^3+x^2-14x-24$ (faktorsatsen). Divisionsalgoritmen ger

$$\begin{array}{rl}
 x^2+5x+6 & \\
\hline
x^3+x^2-14x-24 & \boxed{x-4} \\
(-)\ \underline{x^3-4x^2+0x+0} & \\
5x^2-14x-24 & \\
(-)\ \underline{5x^2-20x+0} & \\
6x-24 & \\
(-)\ \underline{6x-24} & \\
0. &
\end{array}$$

$x^3+x^2-14x-24=(x-4)(x^2+5x+6)=(x-4)(x+2)(x+3)=0$

$\Leftrightarrow x-4=0 \vee x+2=0 \vee x+3=0 \Leftrightarrow \underline{x=4} \vee \underline{x=-2} \vee \underline{x=-3}.$

e) $\underline{x+\sqrt{x-9}=11} \Leftrightarrow x-9+\sqrt{x-9}-2=0$ (rotekvation).

$t=\sqrt{x-9} \Rightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow t=1$ ($t=-2$ förkastas).

$t=1 \Rightarrow \sqrt{x-9}=1 \Rightarrow x-9=1 \Leftrightarrow \underline{x=10}.$

f) $\underline{x-\sqrt{x-9}=11} \Leftrightarrow x-9-\sqrt{x-9}-2=0$ (rotekvation)

$t=\sqrt{x-9} \Rightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow t=2$ ($t=-1$ förkastas).

$\sqrt{x-9}=2 \Rightarrow x-9=4 \Leftrightarrow \underline{x=13}.$

g) $\underline{|x-4|+|x+6|=13}$ (Grafisk lösning följer)

I samma koordinatsystem uppritas kurvan

$y = f(x) = |x-4| + |x+6|$ och linjen $y = g(x) = 13$.

(1) $x-4$ och $x+6$ byter tecken i $x=4$ resp. $x=-6$.

Jag delar x-axeln i tre "bitar" som följer:

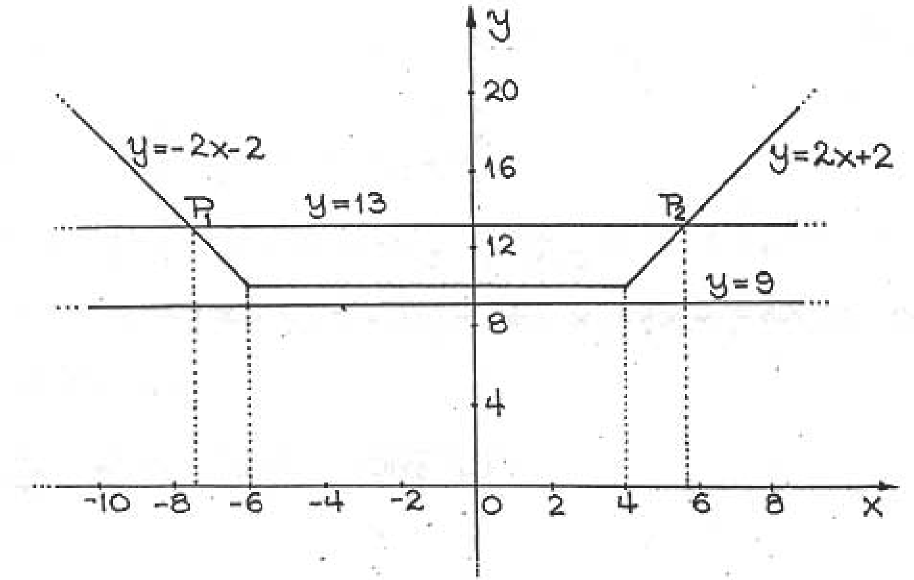
$\underline{I_1: x<-6}$; $\underline{I_2: -6\leq x<4}$; $\underline{I_3: x\geq 4}$.

(2) $x<-6 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x+6<0 \\ x-4<0 \end{Bmatrix} \Rightarrow f(x) = -(x-4)-(x+6) = -2x-2$;

(3) $-6\leq x<4 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -6\leq x \Leftrightarrow x+6\geq 0 \Rightarrow |x+6| = x+6 \\ x<4 \Leftrightarrow x-4<0 \Rightarrow |x-4| = -(x-4) \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = x+6-x+4) = 10$.

(4) $x\geq 4 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x+6>0 \Rightarrow |x+6| = x+6 \\ x-4\geq 0 \Rightarrow |x-4| = x-4 \end{Bmatrix} \Rightarrow f(x) = 2x+2$.



$P_1: (-7{,}5; 13)$ och $P_2: (5{,}5; 13)$ bestäms algebraiskt $(-2x-2 = 13 = 2x+2)$, så rötterna är

$$x_1 = -7{,}5 \text{ och } x_2 = 5{,}5.$$

b) $|x-4| + |x+9| = 9$ saknar reella rötter, vilket framgår av diagrammet i föregående övning.

Anm. Ren algebraisk lösning är möjlig i dessa två fall.

Övning 1.105 (Sid. 61)

Lösning

a) $x^2-46x<147 \Leftrightarrow x^2-46x+23^2<147+23^2 = 676 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-23)^2-26^2<0 \Leftrightarrow (x-23+26)(x-23-26)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-49)<0$; $\underline{f(x) = (x+3)(x-49)}$;

		-3		46		x
sgn(x+3)	–	0	–	–	–	
sgn(x-46)	–	–	–	0	–	
sgn(f(x))	+	0	–	0	+	

Resultat: $x^2-46x<147 \Leftrightarrow -3<x<46$.

sgn( ) = signum ( ) = tecknet på ( ).

Att memoreras: $(x-\alpha)(x-\beta)<0 \Leftrightarrow \alpha<x<\beta \quad (\alpha<\beta)$.

b) $x^3-3x^2+2x\geq 0$

$x(x^2-3x+2)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)=x(x-1)(x-2)\geq 0.$

…		0		1		2	
sgn(x)	−	0	+	+	+	+	+
sgn(x−1)	−	−	−	0	+	+	+
sgn(x−2)	−	−	−	−	−	0	+
sgn f(x)	−	0	+	0	−	0	+

$\therefore\ x^3-3x^2+2x\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 1 \vee x\geq 2.$

c) $\frac{x+3}{2x-5}\geq 3.$

$\frac{x+3}{2x-5}-3\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3-3(2x-5)}{2x-5}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{18-5x}{2x-5}\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5(18/5-x)}{2(x-5/2)}\geq 0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{18/5-x}{x-5/2}\geq 0;$

…		5/2		18/5	
sgn(18/5−x)	+		+	0	−
sgn(x−5/2)	−		+	+	+
sgn(f(x))	−		+	0	−

$\therefore\ \frac{x+3}{2x-5}\geq 3 \Leftrightarrow f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}<x\leq\frac{18}{5}.$

d) $\frac{1}{x}>\frac{x}{2}\geq\frac{2}{x}.$

$$\frac{1}{x}>\frac{x}{2}\geq\frac{2}{x} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{2}<\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{1}{x}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{2x}<0\\ \frac{2}{x}\leq\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{2}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{2x}\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{2x}<0\\ \frac{(x+2)(x-2)}{2x}\geq 0\end{cases};\quad \begin{cases}f(x)=\frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{2x}<0 & (1)\\ g(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{2x}\geq 0 & (2)\end{cases}$$

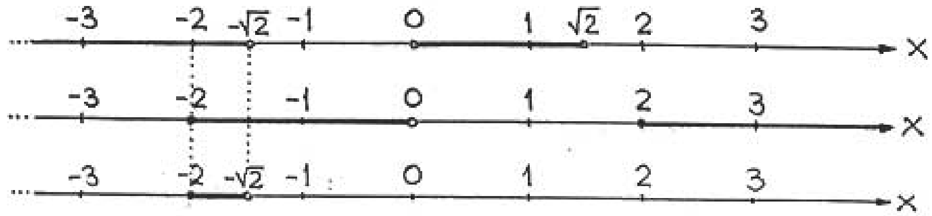
…		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
sgn(x+√2)	−	0	+		+	+	+
sgn(2x)	−	−	−		+	+	+
sgn(x−√2)	−	−	−		−	0	+
sgn(f(x))	−	0	+		−	0	+

$f(x)<0 \Leftrightarrow x<-\sqrt{2} \vee 0<x<\sqrt{2};$

…		−2		0		2	
sgn(x+2)	−	0	+		+	+	+
sgn(2x)	−	−	−		+	+	+
sgn(x−2)	−	−	−		−	0	+
sgn(g(x))	−	0	+		−	0	+

$g(x)\geq 0 \Leftrightarrow -2\leq x<0 \vee x\geq 2.$

Jag bestämmer härnäst de x som satisfierar såväl (1) som (2).

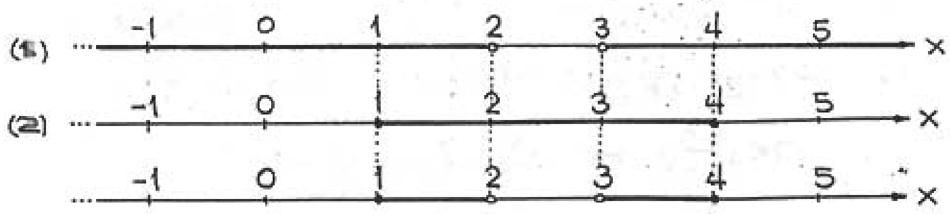


Resultat: $-2\leq x<-\sqrt{2}$ är villkoren för x.

e) $1<|2x-5|\leq 3$

$$\begin{cases}1<|2x-5|\\ |2x-5|\leq 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-5>1 \vee 2x-5<-1\\ -3\leq 2x-5\leq 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>3 \vee x<2 & (1)\\ 1\leq x\leq 4 & (2)\end{cases}$$

De x som uppfyller (1) och (2) bestäms härnäst:



<u>Resultat</u>: Villkoren för x är $1 \le x < 2$ eller $3 < x \le 4$.

f) $\left|\frac{2x+1}{x-1}\right| \le 1 \Leftrightarrow \underline{|2x+1| \le |x-1|,\ x \ne 1.}$

$|2x+1| \le |x-1| \Rightarrow (2x+1)^2 \le (x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2+4x+1 \le x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow 3x^2+6x \le 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) \le 0 \Leftrightarrow \underline{-2 \le x \le 0}.$

<u>Anm.</u> Villkoren $x \ne 1$ påverkar inget.

Övning 1.106 (Sid. 61)

<u>Lösning</u>

a) $\underline{P_1:(0,4),\ P_2:(3,0);\ \ y-y_1=k(x-x_1).}$

$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-4}{3-0}=-\frac{4}{3};$

$y-4=-\frac{4}{3}(x-0) \Leftrightarrow y+\frac{4}{3}x=4 \Leftrightarrow \underline{4x+3y=12}.$

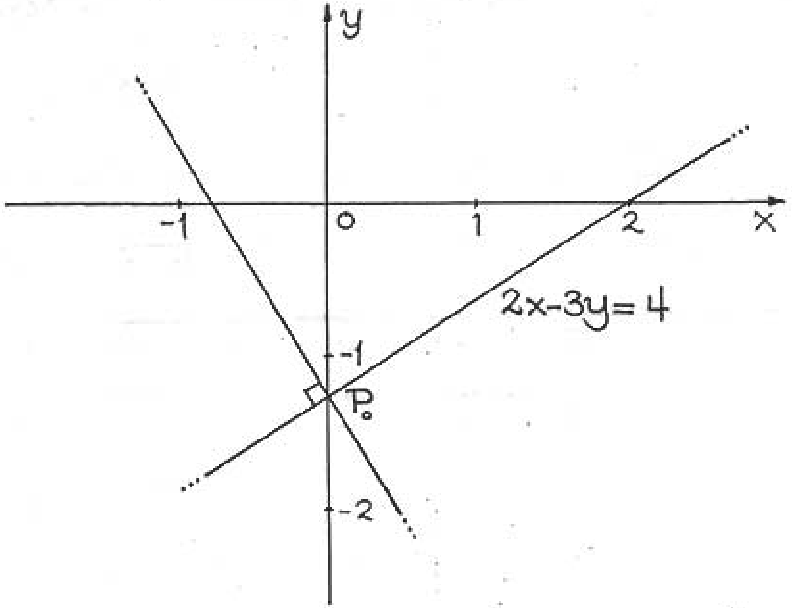
b) $\underline{P_1:(3,4),\ P_2:(1,-1);\ \ y-y_1=k(x-x_1).}$

$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-4}{1-3}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2};$

$y-4=\frac{5}{2}(x-3) \Leftrightarrow 2(y-4)=5(x-3) \Leftrightarrow \underline{5x-2y=7}.$

Övning 1.107 (Sid. 61)

<u>Lösning</u>



$2x-3y=4 \Leftrightarrow 3y=2x-4 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3} \Rightarrow k=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow k'=-\frac{1}{k}=-\frac{3}{2}=$ normalens k-värde.

$P_0:(0,-4/3)$ fås för $x=0$ i linjens ekvatio

Normalens ekvation blir alltså

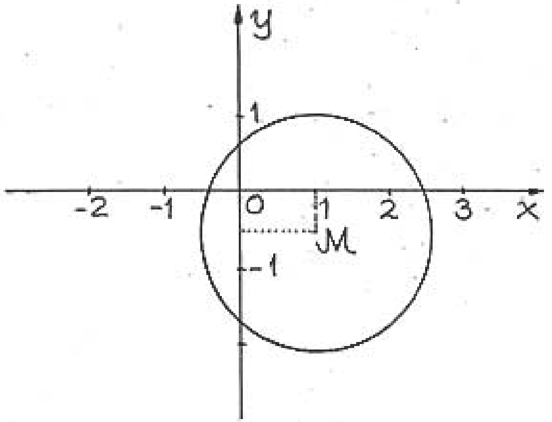
$y-(-\frac{4}{3})=-\frac{3}{2}(x-0) \Leftrightarrow y+\frac{4}{3}+\frac{3}{2}x=0 \Leftrightarrow \underline{9x+6y+8=}$

Övning 1.108 (Sid. 61)

<u>Lösning</u>

a) $x^2+y^2-2x+y=1 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+y+\frac{1}{4}=1+1+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}$; $\underline{M:(1,-\frac{1}{2}),\ r=\frac{3}{2}}$.

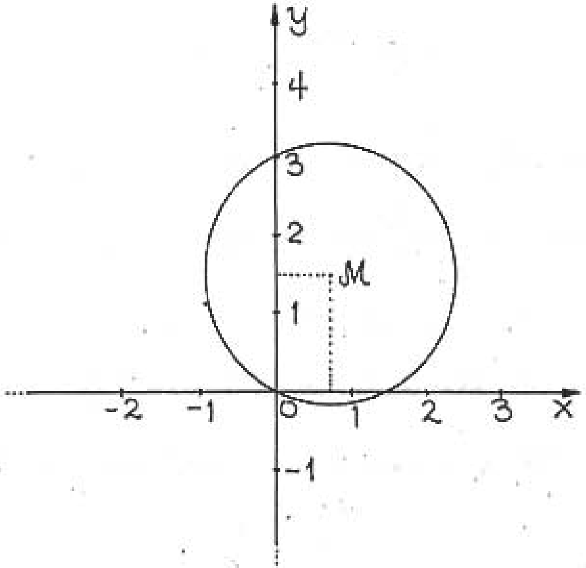


b) $2x^2+2y^2=3x+6y \Leftrightarrow 2(x^2+y^2)=3x+6y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{3}{2}x+3y \Leftrightarrow x^2-\frac{3}{2}x+y^2-3y=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}+y^2-3y+\frac{9}{4}=\frac{9}{16}+\frac{9}{4}=\frac{9 \cdot 5}{16}=(\frac{3\sqrt{5}}{4})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-\frac{3}{4})^2+(y-\frac{3}{2})^2=(\frac{3\sqrt{5}}{4})^2$; $\underline{M:(\frac{3}{4},\frac{3}{2}),\ r=\frac{3\sqrt{5}}{4}}$.



Övning 1.109 (Sid. 61)

Lösning

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=2x+c \end{cases} \Rightarrow x^2+(2x+c)^2=5 \Leftrightarrow 5x^2+4cx=5-c^2$$

$\Leftrightarrow 5(x^2+\frac{4c}{5}x)=5-c^2 \Leftrightarrow x^2+\frac{4c}{5}x=1-\frac{c^2}{5} \Leftrightarrow x^2+$

$+\frac{4c}{5}x+\frac{4c^2}{25}=1-\frac{c^2}{5}+\frac{4c^2}{25} \Leftrightarrow (x+\frac{2c}{5})^2=1-\frac{c^2}{25}$; (*)

Linjen skär cirkeln då och endast då (*) har reella rötter, dvs när $1-c^2/25 \geq 0 \Leftrightarrow |c| \leq 5$.

Resultat: $\begin{cases} -5<c<5 \Rightarrow 2 \text{ skärningspunkter.} \\ c=\pm 5 \Rightarrow 1 \text{ skärningspunkt.} \\ c>5 \text{ el. } c<-5 \Rightarrow \text{ingen skärningspunkt.} \end{cases}$

Övning 1.110 (Sid. 61)

Lösning

Akilles och sköldpadda har ... sprungit lika lång tid. Om sköldpaddan har hunnit Δx meter, så har Akilles, som springer 100 gånger fortare, hunnit i kapp den $100+\Delta x$ meter från starten. Om Δt är tiden kompanterna har slagits, så har vi att

$\Delta t = \frac{100+\Delta x}{100v} = \frac{\Delta x}{v} \Leftrightarrow \frac{100+\Delta x}{100} = \Delta x \Leftrightarrow 100\Delta x = 100 +$
$+ \Delta x \Leftrightarrow 99 \cdot \Delta x = 100 \Leftrightarrow \underline{\Delta x = \frac{100}{99} \text{ meter.}}$

Övning 1.111 (Sid. 61)

Lösning

Bakhjulets omkrets är x meter.

Framhjulets omkrets är x-0,5 meter.

Bakhjulets varvtal är y.

Framhjulets varvtal är y+100.

(1) $\underline{xy = (x-0{,}5)(y+100) = 1000.}$ (ekvationssystem)

(2) $\cancel{xy} = (x-\frac{1}{2})(y+100) = \cancel{xy} + 100x - \frac{1}{2}y - 50 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y =$
$= 100x - 50 \Leftrightarrow y = 100(2x-1)$

(3) $xy = 1000 \overset{(2)}{\Rightarrow} 100(2x-1)x = 1000 \Leftrightarrow (2x-1)x = 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2 - x = 10 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}.$

Svar: Framhjulens omkrets är 2 meter och bakhjulens 2,5 meter.

Övning 1.112 (Sid. 61)

Lösning

(1) $\frac{a}{c} < \frac{b}{d} \Leftrightarrow cd \cdot \frac{a}{c} < cd \cdot \frac{b}{d} \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow ad + ac < bc + ac$
$\Leftrightarrow a(d+c) < (b+a)c \Leftrightarrow \frac{a(c+d)}{c(c+d)} < \frac{(b+a)c}{c(c+d)} \Leftrightarrow \frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d}$;

(2) $\frac{a}{c} < \frac{b}{d} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} ad < bc \Leftrightarrow ad + bd < bc + bd \Leftrightarrow (a+b)d < (c+d)b$
$\Leftrightarrow \frac{(a+b)d}{(c+d)d} < \frac{(c+d)b}{(c+d)d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}$;

(3) Ur (1) och (2) följer att $\frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}$.

Övning 1.113 (Sid. 61)

Lösning

Påstående: $\sqrt{3}$ är irrationellt.

Bevis: (Motsägelsebevis).

Ett reellt tal är antingen rationellt eller irrationellt. Antag således att $\sqrt{3}$ inte är irrationellt. Detta kommer att leda till en motsägelse. Men om $\sqrt{3}$ är rationellt så existerar heltal p och q s.a. $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ och s.a. bråket $\frac{p}{q}$ är förkortat så långt som möjligt.

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}\Leftrightarrow 3=\left(\frac{p}{q}\right)^2=\frac{p^2}{q^2}\Leftrightarrow p^2=3q^2. \quad (*)$$

Det innebär att 3 delar p^2, vilket är det-samma som att p är en multipel av 3: $p=3r$, för ngt heltaligt r. Insättning i (*) $\Rightarrow (3r)^2=3q^2 \Leftrightarrow 9r^2=3q^2 \Leftrightarrow q^2=3r^2 \Rightarrow$ 3 faktor i q^2 och därmed i q. Jag har kommit fram till att 3 är faktor i såväl p som q. Men detta motsäger antagandet (till) att $\frac{p}{q}$ är förkortat så långt som möjligt. Det finns alltså inga p och q s.a. $\sqrt{3}=p/q$, varav följer att $\sqrt{3}$ är irrationellt.

Övning 1.114 (Sid. 62)

Lösning

$\underline{a_n=a+(n-1)d,\ n=1,2,3,\dots}$ (aritmetisk följd).

$$\begin{cases}a_2=3\Rightarrow a+d=3\\ a_6=11\Rightarrow a+5d=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+d=3\\ 3+4d=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ d=2\end{cases}\Rightarrow a_n=2n-1$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{50}(2n-1)=2\sum_{n=1}^{50}n-\sum_{n=1}^{50}1=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 51-50=50^2.$$

Svar: Den sökta summan är 2500.

Övning 1.115 (Sid. 62)

Lösning

$\underline{a_n=a\cdot k^{n-1},\ n=1,2,3,\dots}$ (geometrisk följd).

$$\begin{cases}a_2=2\Rightarrow ak=2\\ a_4=4\Rightarrow ak^3=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ak=2\\ 2k^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ak=2\\ k^2=2\end{cases}\Leftrightarrow a=k=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(\sqrt{2})^k=\sqrt{2}\cdot\frac{(\sqrt{2})^{10}-1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}\cdot\frac{31}{\sqrt{2}-1}=\underline{62+31\sqrt{2}}.$$

Övning 1.116 (Sid. 62)

Lösning

a) $$\sum_{k=0}^{n}(2k+2^k)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}2^k=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+1\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=$$
$$=\underline{n^2+n+2^{n+1}-1}.$$

b) $$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\dots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\underline{\frac{n}{n+1}}.$$

Övning 1.117 (Sid. 62)

Lösning

(1) Båt nr 1: $\tau_1=\frac{s/2}{v_1}+\frac{s/2}{v_2}=s\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)=\frac{s}{H}$;

$\frac{1}{H}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)$ definierar det harmoniska medelvärdet av v_1 och v_2; $\mathcal{H}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$.

(2) <u>Båt nr 2</u>: $s=\frac{\tau_2}{2}v_1+\frac{\tau_2}{2}v_2=\tau_2\cdot\frac{v_1+v_2}{2}=\tau_2 A\Leftrightarrow\tau_2=\frac{s}{A}$;

(3) Jag har visat tidigare att $A\geqslant G$, där $G=\sqrt{v_1v_2}$.

$\frac{A}{G}\geqslant 1\Rightarrow\frac{1}{H}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)=\frac{1}{2}\frac{v_1+v_2}{v_1v_2}=\frac{A}{G^2}=\frac{A}{G}\cdot\frac{1}{G}\geqslant\frac{1}{G}\Leftrightarrow\underline{H\leqslant G}$

$\Rightarrow H\leqslant A\Leftrightarrow\frac{1}{A}\leqslant\frac{1}{H}\Leftrightarrow\frac{s}{A}\leqslant\frac{s}{H}\Leftrightarrow\tau_2<\tau_1$.

<u>Svar</u>: Den första båtens tar tiden $s\cdot\frac{v_1+v_2}{2v_1v_2}$ och den andra $s\cdot\frac{2}{v_1+v_2}$; den andra båten är snabbast.

Övning 1.118 (Sid. 62)

Lösning

a) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (kubregeln).

$(2-3i)^3=(2+(-3i))^3=2^3+3\cdot2^2(-3i)+3\cdot2(-3i)^2+(-3i)^3=$

$=8-36i-54+27i=\underline{-46-9i}.$

b) $\frac{5+2i}{i+2}=\frac{(5+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{10-5i+4i+2}{2^2+1^2}=\frac{12-i}{5}=\underline{\frac{12}{5}-\frac{1}{5}i}.$

c) $\frac{1}{(2i-1)^2}=\frac{1}{-4+1-4i}=\frac{1}{-3-4i}=-\frac{1}{3+4i}=-\frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)}=$

$=-\frac{3-4i}{3^2+4^2}=-\frac{3-4i}{25}=\underline{-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i}.$

Svara med Re- och Im-delen separerade.

Övning 1.119 (Sid. 62)

Lösning

a) $|(3+5i)^3|=|3+5i|^3=(\sqrt{3^2+5^2})^3=(34^{1/2})^3=\underline{34^{3/2}}.$

b) $\left|\frac{4-5i}{2+3i}\right|=\frac{|4-5i|}{|2+3i|}=\frac{\sqrt{4^2+5^2}}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{13}}=\underline{\sqrt{\frac{41}{13}}}.$

c) $\frac{i}{1-i}-\frac{1}{1+i}=\frac{i^2}{1+i}-\frac{1}{1+i}=-\frac{2}{1+i}\Rightarrow\left|\frac{i}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right|=\left|-\frac{2}{1+i}\right|=\frac{2}{\sqrt{2}}=\underline{\sqrt{2}}.$

Övning 1.120 (Sid. 62)

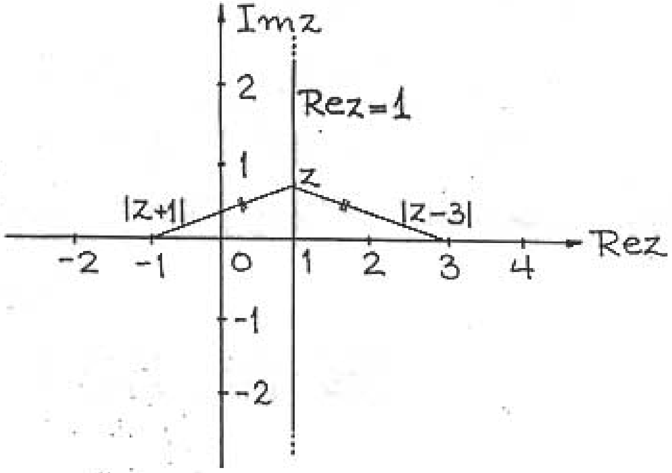
Lösning

a) $\underline{|z-3|=|z+1|}.$

$|z-3|^2=|z+1|^2\Leftrightarrow(z-3)\overline{(z-3)}=(z+1)\overline{(z+1)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(z-3)(\bar{z}-3)=(z+1)(\bar{z}+1)\Leftrightarrow z\bar{z}-3(z+\bar{z})+9=z\bar{z}+$

$+z+\bar{z}+1\Leftrightarrow4(z+\bar{z})=8\Leftrightarrow8\mathrm{Re}z=8\Leftrightarrow\underline{\mathrm{Re}z=1}.$



forts

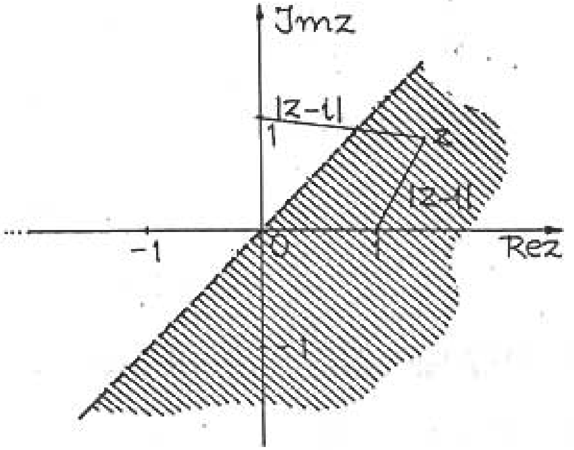
b) $\underline{|z-i|>|z-1|}$

$$|z-i|^2>|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-i)\overline{(z-i)}>(z-1)\overline{(z-1)} \Leftrightarrow$$

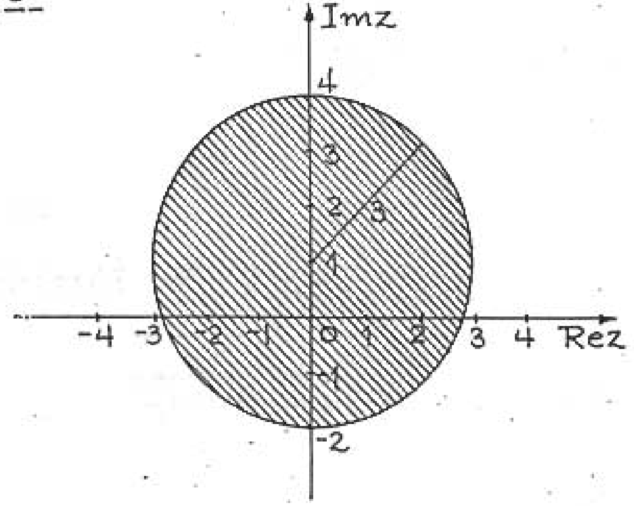
$$\Leftrightarrow (z-i)(\bar{z}+i)>(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow z\bar{z}+i(z-\bar{z})+1>z\bar{z}-$$

$$-z-\bar{z}+1 \Leftrightarrow i(z-\bar{z})>-(z+\bar{z}) \Leftrightarrow i2i\,\mathrm{Im}\,z>-2\mathrm{Re}\,z$$

$$\Leftrightarrow -\mathrm{Im}\,z>-\mathrm{Re}\,z \Leftrightarrow \underline{\mathrm{Im}\,z<\mathrm{Re}\,z.} \quad (y<x).$$



c) $\underline{|z-i|\leq 3}$



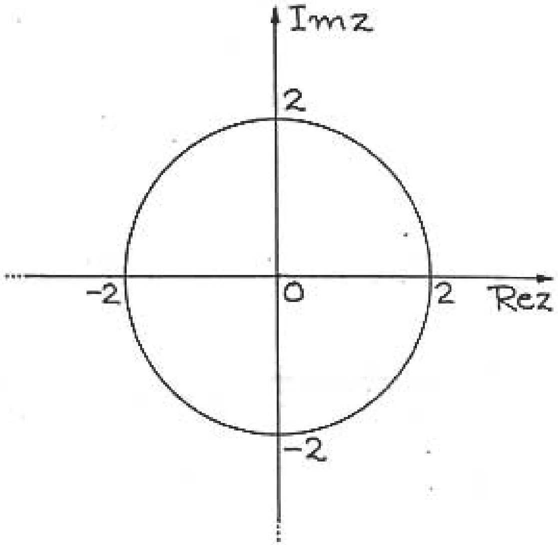
d) $\underline{|z-4i|=2|z-1|}$

$$|z-4i|^2=4|z-i|^2 \Leftrightarrow (z-4i)\overline{(z-4i)}=4(z-i)\overline{(z-i)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-4i)(\bar{z}+4i)=4(z-i)(\bar{z}+i) \Leftrightarrow z\bar{z}+4i(z-\bar{z})+16=$$

$$=4(z\bar{z}+i(z-\bar{z})+1)=4z\bar{z}+4i(z-\bar{z})+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3z\bar{z}=12 \Leftrightarrow z\bar{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow \underline{|z|=2.}$$



2. Funktioner

Testövning 2.1 (Sid. 67)

Lösning

a) $\underline{f(x)=1/x}$

f är definierad för alla x utom $x=0$ (man får inte dividera med 0); $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\}$. Ekvationen $f(x)=k$ har (exakt) en rot utom för $a=0$; f antar alla värden utom $y=0$; $V_f=\{y\in\mathbb{R}: y\neq 0\}$.

b) $\underline{f(x)=1/\sqrt{x-1}}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x-1>0\}=\{x\in\mathbb{R}: x>1\}=]1,\infty[$.

$$f(x)=a>0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}}=a \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}=a^2 \Leftrightarrow x-1=\frac{1}{a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1+\frac{1}{a^2}>1.$$

$f(x)=a$, $a>0$, har (exakt) en rot, dvs f antar alla positiva värden, för $x>1$; $V_f=\mathbb{R}_+$ = mängden av de positiva reella talen.

Resultat: a) $D_f=V_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; b) $D_f=]1,\infty[$, $V_f=\mathbb{R}_+$.

Testövning 2.2 (Sid. 67)

Lösning

$\underline{f(x)=x^2-x}$

a) $f(10)=10^2-10=100-10=\underline{90}.$

b) $f(u)=u^2-u \Rightarrow f(x-1)=(x-1)^2-(x-1)=\underline{x^2-3x+2}.$

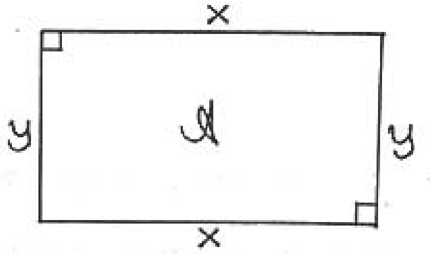
c) $f(a^2)=(a^2)^2-a^2=a^4-a^2.$

d) $f(v)=v^2-v \Rightarrow f(f(x))=(f(x))^2-f(x)=(x^2-x)^2-(x^2-x)=$

$=x^4-2x^3+x^2-x^2+x=\underline{x^4-2x^3+x}.$

Testövning 2.3 (Sid. 67)

Lösning



$2x+2y=20 \Leftrightarrow 2(x+y)=2\cdot 10 \Leftrightarrow x+y=10 \Leftrightarrow \underline{y=10-x}.$

$\underline{x>0 \wedge y>0} \Leftrightarrow x>0 \wedge 10-x>0 \Leftrightarrow x>0 \wedge x<10$

$\Leftrightarrow 0<x<10.$ $\quad \mathcal{A}=f(x)=x\cdot y=x(10-x),\ 0<x<10.$

Resultat: $f(x)=10x-x^2,\ 0<x<10.$

Testörning 2.4 (Sid. 68)

Lösning

$$f(u)=\sqrt{u-1}\,,\quad u\geq 1.$$

$$g(v)=v^2+1\,,\quad -\infty<v<\infty.$$

(1) $f\circ g(x)=f(g(x))=f(x^2+1)=\sqrt{x^2+1-1}=\sqrt{x^2}=|x|$

$u>1 \Rightarrow x^2+1\geq 1 \Leftrightarrow x^2\geq 0 \Leftrightarrow -\infty<x<\infty.$

$f\circ g: x \longmapsto |x|,\ x\in\mathbb{R}.$ $\quad(D_{f\circ g}=\mathbb{R}).$

(2) $g\circ f(x)=g(f(x))=(\sqrt{x-1})^2+1=x-1+1=x\,;$

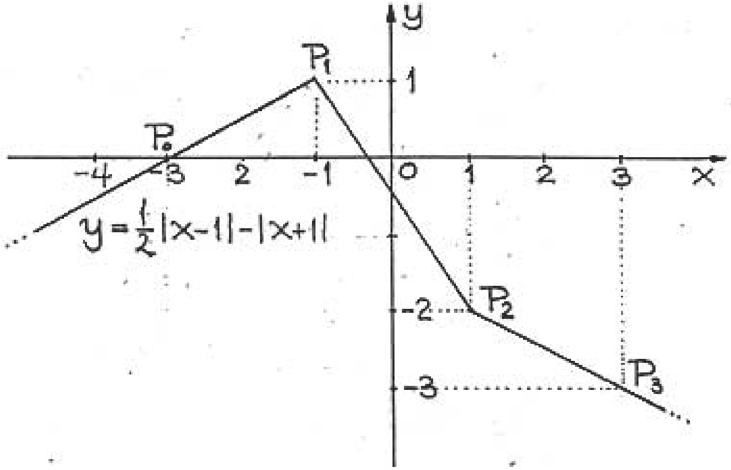
$g\circ f: x\longmapsto x,\ x\geq 1.$ $\quad(D_{g\circ f}=[1,\infty[).$

Testörning 2.5 (Sid. 72)

Lösning

$f(x)=\frac{1}{2}|x-1|-|x+1|$

Grafen till f är en bruten linje i xy-planet (f är styckvis linjär); "brytpunkterna" är nollställena till $x+1$ och $x-1$, dvs. $x=\pm1$; motsvarande punkter på grafen är $P_1:(-1,1)$ och $P_2:(1,-2)$. För att upprita grafen behöver vi ytterligare två punkter "utanför" dessa två; $P_0:(-3,0)$ och $P_3:(3,-3)$ duger bra.



Annan lösning (analytisk)

Punkterna $x=\pm1$ delar x-axeln i 3 disjunkta avsnitt, enligt nedan:

$$x<-1,\quad -1\leq x<1,\quad x\geq 1$$

(1) $x<-1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+1<0 \Rightarrow |x+1|=-(x+1) \\ x-1<-2<0 \Rightarrow |x-1|=-(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y=$

$=\frac{1}{2}(-(x-1))-(-(x+1))=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+x+1=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\,;$

(2) $-1\leq x<1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -1\leq x \Leftrightarrow x+1\geq 0 \Leftrightarrow |x+1|=x+1 \\ x<1 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow |x-1|=-(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}(x-1)-(x+1)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-x-1=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\,;$

(3) $x \geqslant 1 \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+1 \geqslant 2 > 0 \Leftrightarrow |x+1| = x+1 \\ x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow |x-1| = x-1 \end{cases}\right\} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x-1)-(x+1) =$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - x - 1 = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$

Sammanfattningsvis fås

$$f(x) = \frac{|x-1|}{2} - |x+1| = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & x < -1 \\ -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}, & -1 \leqslant x < 1 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, & x > 1 \end{cases}.$$

Testövning 2.6 (Sid. 72)

Lösning

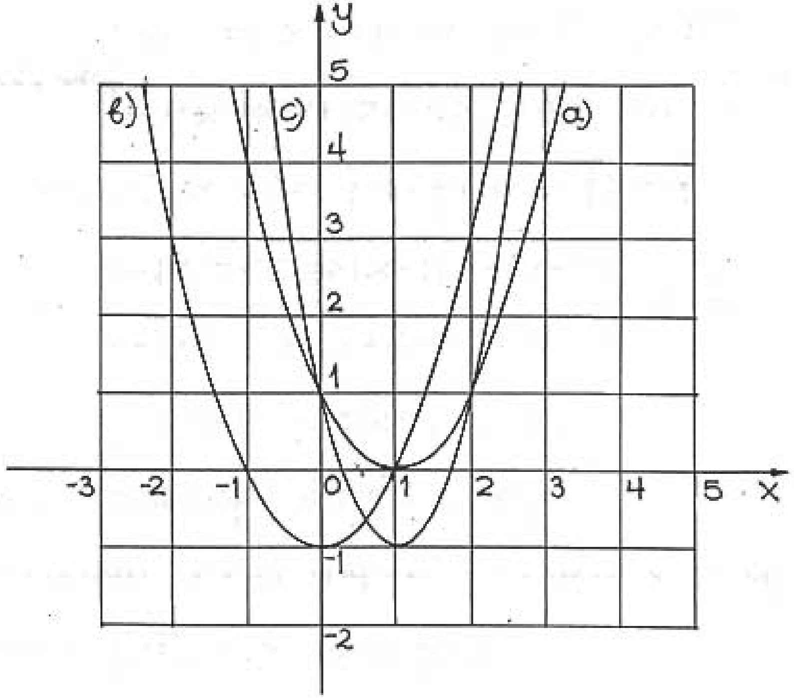
Kurvan $y = x^2$ är en välbekant parabel.

a) Man får kurvan $y = (x-1)^2$ gm förskjutning av kurvan $y = x^2$ 1 enhet åt höger.

b) Kurvan $y = x^2 - 1$ är en $y = x^2$ kurva förskjuten 1 enhet nedåt.

c) $y = 2(x-1)^2 - 1$ är parabeln $y = 2x^2$ förskjuten 1 enhet åt höger och en enhet nedåt.

Anm. Kurvan $y = 2x^2$ har samma topp (minimipunkt) som $y = x^2$ men är "brantare".



Testövning 2.7 (Sid. 72)

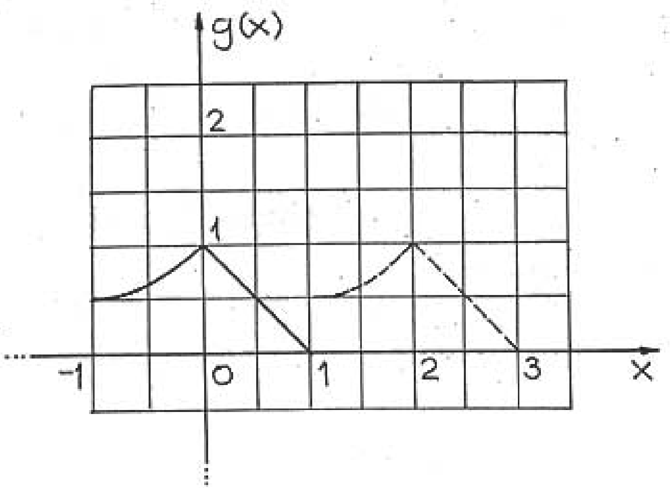
Lösning

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3 - x, & 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

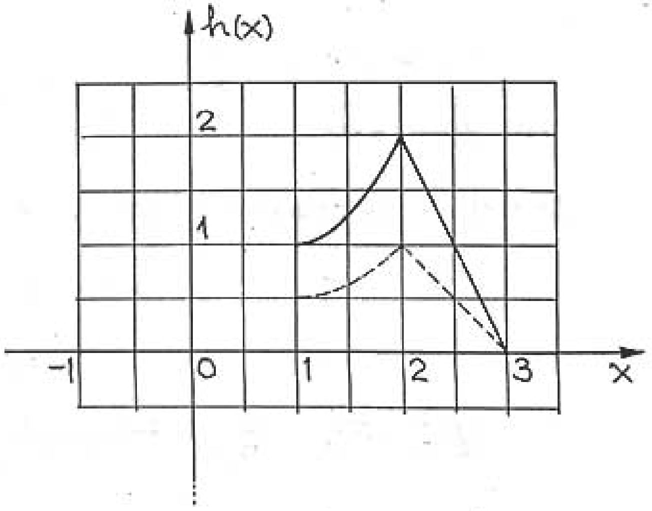
a) $g(x) = f(x+2) = \left.\begin{cases} \frac{1}{2}(x+2-1)^2 + \frac{1}{2}, & 1 \leqslant x+2 \leqslant 2 \\ 3-(x+2) & , 2 < x+2 \leqslant 3 \end{cases}\right\} =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 - x & , 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

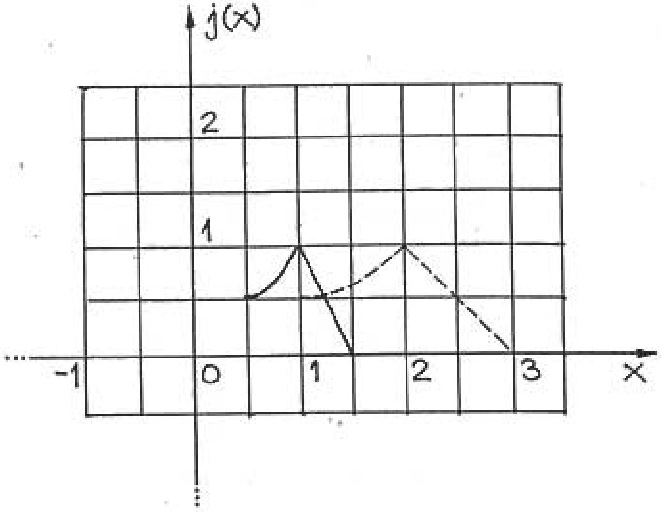
På nästa sida finns graferna uppritade.



b) $h(x) = 2f(x) = \begin{cases} (x-1)^2+1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 6-2x, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$ (Se fig. nedan).



c) $j(x) = f(2x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x-1)^2+\frac{1}{2}, & 1 \leq 2x \leq 2 \\ 3-2x, & 2 < 2x \leq 3 \end{cases} = \begin{cases} 2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 3-2x, & 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$.



Anm. Läs även författarnas ledning/facit.

Testövning 2.8 (Sid. 77)

Lösning

a) $f(x) = x+2$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1+2 = x_2+2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ injektiv.

$y = x+2 \Leftrightarrow x = y-2 = f^{-1}(y)$.

Resultat: Inverterbar; $f^{-1}(x) = x-2$.

b) $f(x) = 1/(x-1)$, $x \neq 1$.

$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow x_1-1 \neq x_2-1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1-1} \neq \frac{1}{x_2-1} \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Leftrightarrow f$ injektiv, dvs inverterbar.

$y=\frac{1}{x-1}\neq 0 \Leftrightarrow x-1=\frac{1}{y} \Leftrightarrow x=1+\frac{1}{y}=f^{-1}(y)$.

Resultat: f inverterbar; $f^{-1}(x)=1+1/y, y\neq 0$.

Testövning 2.9 (Sid. 77)

Lösning

a) $f(x)=x^2+2x$

$x^2+2x=y \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{1+y}$, $y\geq -1$.

För varje $y>-1$ finns två olika x, så f är inte injektiv/inverterbar.

Anm. f injektiv: $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

f ej injektiv: Det existerar $x_1, x_2 \in D_f$ s.a. $x_1\neq x_2$ och $f(x_1)=f(x_2)$.

b) $f(x)=\frac{1}{x^4+1}$.

$x\neq 0 \Rightarrow -x\neq x$ och $f(-x)=\frac{1}{(-x)^4+1}=\frac{1}{x^4+1}=f(x)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f icke-injektiv.

Övning 2.10 (Sid. 78)

Lösning

a) $f(x)=x/(x-1)$.

f är definierad för alla $x\neq 1$ (man får inte dividera med 0); $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 1\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$\frac{x}{x-1}=y \Leftrightarrow \frac{x-1+1}{x-1}=y \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x-1}=y \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}=y-1$;

f kan inte anta värdet 1, ty då är $\frac{1}{x-1}=0$ vilket inte håller för något x.

Resultat: $D_f=V_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$

(1) Det som står under rottecknet ska vara ≥ 0.

$$g(x)=3x-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x(3-x)\geq 0$$

…		0		3	→ x
sgn(x)	-	0	+	+	+
sgn(3-x)	+	+	+	0	-
sgn g(x)	-	0	+	0	-

$g(x)\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 3 \Leftrightarrow D_f=[0,3]$.

(2) $g(x)=3x-x^2=\frac{9}{4}-(x-\frac{3}{2})^2\leq\frac{9}{4}$;

g antar sitt maximum (största värdet) $\frac{9}{4}$ för $x=\frac{3}{2}$; man kan rita och se. (Haha!)

(3) $0\leq g(x)\leq\frac{9}{4} \Leftrightarrow 0\leq\sqrt{g(x)}\leq\sqrt{9/4} \Leftrightarrow 0\leq f(x)\leq\frac{3}{2}$.

Resultat: $D_f = [0,3]$, $V_f = [0, \frac{3}{2}]$.

Övning 2.11 (Sid. 78)

Lösning

a) $\underline{f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

$$f(x) = -\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = -\frac{\sqrt{x}+1-2}{\sqrt{x}+1} = -\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}+1} - 1, \ \underline{\underline{x \geq 0}};$$

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2} \Leftrightarrow \sqrt{x_1}+1 \neq \sqrt{x_2}+1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1}+1} \neq$$

$$\neq \frac{1}{\sqrt{x_2}+1} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x_1}+1} \neq \frac{2}{\sqrt{x_2}+1} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x_1}+1} - 1 \neq \frac{2}{\sqrt{x_2}+1} - 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f$ injektiv/inverterbar.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+1} - 1 = y \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+1} = \underline{y+1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{2} = \frac{1}{y+1} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \frac{2}{y+1} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{y+1} - 1 = \frac{1-y}{1+y} > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2 = f^{-1}(y).$$

Resultat: $f^{-1}(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$, $-1 < x \leq 1$.

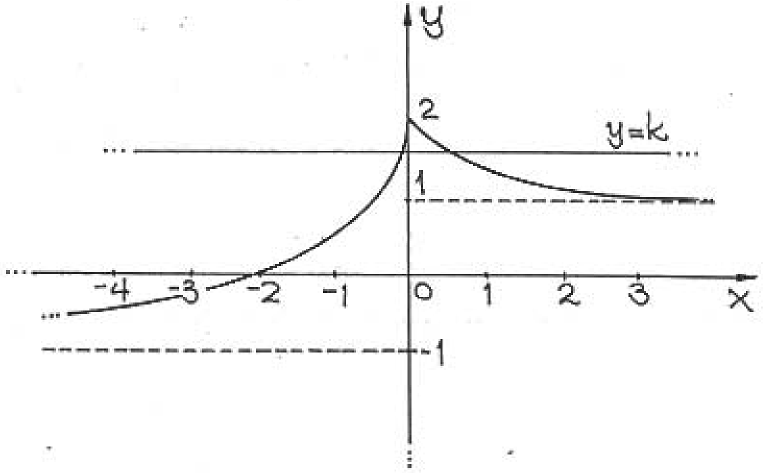
Anm. $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+1} = y+1 > 0 \Rightarrow y > -1$. (*)

$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1-y}{1+y} \geq 0 \Leftrightarrow -1 < y \leq 1$. (**)

I facit står det $D_{f^{-1}}: x \neq -1$. Detta är fel.

f är strängt avtagande, så $f(\infty) < f(x) \leq f(0)$.

b) $f(x) = \frac{x+2}{|x|+1} = \left\{ \begin{matrix} \frac{x+2}{x+1}, & x \geq 0 \\ \frac{x+2}{-x+1}, & x < 0 \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+1}, & x \geq 0 \\ -1 - \frac{3}{x-1}, & x < 0 \end{cases}$ (se fig.)



f är ingen monoton funktion (strängt växande el. strängt avtagande) så den är icke-injektiv; invers saknas således.

Anm. f injektiv: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. f ovan uppfyller inte detta i $1 < f(x) < 2$, dvs $f(x) = k$, $1 < k < 2$, har två rötter.

Övning 2.12 (Sid. 78)

Lösning

$\underline{f(u) = \sqrt{1-u^2}, \ -1 \leq u \leq 1}$; $\underline{g(v) = \sqrt{1+v^2}, \ -\infty < v < \infty}$.

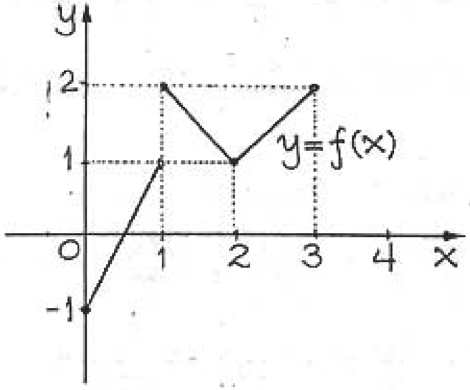
a) $g(f(x))=\sqrt{1+f(x)^2}=\sqrt{1+1-x^2}=\underline{\sqrt{2-x^2},\ -1\leq x\leq 1}.$

b) $f(g(x))=\sqrt{1-g(x)^2}=\sqrt{1-(1+x^2)}=\underline{\sqrt{-x^2}},\ \underline{x=0}$

Övning 2.13 (Sid. 78)

Lösning

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & 0\leq x<1\\ 3-x, & 1\leq x<2\\ x-1, & 2\leq x<3\end{cases}.$$



Anm. f är styckvis linjär; $D_f=[0,3[$, $V_f=[-1,2]$.

Testövning 2.14 (Sid. 82)

Lösning

a) $\underline{2\ln x+\ln(x+3)=\ln(x+1)+\ln 2}$

$\ln x^2+\ln(x+3)=\ln(x+1)+\ln 2\Leftrightarrow\ln x^2(x+3)=$

$=\ln 2(x+1)\overset{!}{\Leftrightarrow}x^2(x+3)=2(x+1)\Leftrightarrow x^3+3x^2=2x+2$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2-2x-2=0\Rightarrow x=1$ rot $\Rightarrow x-1$ faktor.

$$\begin{array}{rl}x^2+4x+2 & \\ \hline x^3+3x^2-2x-2 & \big|\ x-1\\ (-)\ \underline{x^3-x^2+0x+0} & \\ 4x^2-2x-2 & \\ (-)\ \underline{4x^2-4x+0} & \\ 2x-2 & \\ (-)\ \underline{2x-2} & \\ 0 & \end{array}$$

$x^3+3x^2-2x-2=(x-1)(x^2+4x+2)=0\Leftrightarrow x-1=0\vee$

$\vee\ x^2+4x+2=0\Leftrightarrow\underline{x=1}\vee\underline{x=-2\pm\sqrt{2}}.$

Räkningarna har mening endast för $x>0$, ty $D_{\ln}=\mathbb{R}_+$.

Resultat: $x=1$.

Anm. I $\overset{!}{\Leftrightarrow}$ underförstås: $\ln u=\ln v\Leftrightarrow u=v$, dvs ln-funktionen är en-entydig.

b) $\underline{\ln(x^2-2)\leq\ln x}$

ln-funktionen är strängt växande, dvs

$$\underline{0<u<v\Rightarrow\ln u<\ln v}.$$

(1) $x^2-2\leq x\Leftrightarrow x^2-x-2\leq 0\Leftrightarrow(x+1)(x-2)\leq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\underline{-1\leq x\leq 2}.$

forts

(2) Villkoren för x ges av $x^2-2>0$ och $x>0$, dvs $x>\sqrt{2}$. Detta kombinerat med $-1\leq x\leq 2$ ger "lösningsmängden" $\sqrt{2}<x\leq 2$.

Resultat: De x som löser olikheten uppfyller dubbelolikheten $\sqrt{2}<x\leq 2$.

Testövning 2.15 (Sid. 82)

Lösning

$x,y>0 \Rightarrow \frac{x}{y}>0$; $D_{ln}=\mathbb{R}_+$.

$x=\frac{x}{y}\cdot y \Leftrightarrow \ln x=\ln(\frac{x}{y}\cdot y)\overset{!}{=}\ln\frac{x}{y}+\ln y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y$.

I $\overset{!}{=}$ underförstås regeln (2.4).

Testövning 2.16 (Sid. 82)

Lösning

(2.3) $\underline{\ln 1=0}$; (2.4) $\underline{\ln xy=\ln x+\ln y,\ x,y>0}$;

(2.5) $\underline{\ln(x/y)=\ln x-\ln y,\ x,y>0}$; (2.6) $\underline{\ln\frac{1}{x}=-\ln x}$.

(1) $\underline{p=0}$: $VL=\ln x^0=\ln 1=0$, enl. (2.3);

$HL=0\cdot\ln x=0$.

(2) $\underline{p=1}$: $\ln x^1=\ln x=1\cdot\ln x$.

(3) $\underline{p=2}$: $\ln x^2=\ln x\cdot x\overset{!}{=}\ln x+\ln x=2\ln x$.

I $\overset{!}{=}$ underförstås (2.4).

(4) $\underline{p=3}$: $\ln x^3=\ln x^2\cdot x\overset{!}{=}\ln x^2+\ln x\overset{!!}{=}2\ln x+\ln x=$

$=3\ln x$.

I $\overset{!}{=}$ underförstås (2.4) och $\overset{!!}{\Leftrightarrow}$ resultatet i (3) ovan.

(5) $\underline{p=4}$: $\ln x^4=\ln x^3\cdot x=\ln x^3+\ln x=3\ln x+\ln x=$

$=4\ln x$.

(6) $\underline{p=-1}$: $\ln 1=\ln x^0=\ln x^{1-1}=\ln x^1\cdot x^{-1}=\ln x+\ln x^{-1}$

$\Leftrightarrow 0=\ln x+\ln x^{-1}\Leftrightarrow \ln x^{-1}=-\ln x=(-1)\ln x$.

$\ln 1=0$; enl. (2.3); jämför med (2.6).

(7) $\underline{p=-2}$: $\ln x^{-2}=\ln x^{-1}\cdot x^{-1}=\ln x^{-1}+\ln x^{-1}=(6)=$

$=-\ln x-\ln x=-2\ln x$.

(8) $\underline{p=-3}$: $\ln x^{-3}=\ln x^{-2}x^{-1}=\ln x^{-2}+\ln x^{-1}=-2\ln x-$

$-\ln x=-3\ln x$.

Anm. $1=x^0=x^{p-p}=x^p\cdot x^{-p}\Leftrightarrow \ln 1=\ln x^p\cdot x^{-p}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0=\ln x^p+\ln x^{-p}\Leftrightarrow \ln x^{-p}=-\ln x^p=-p\ln x$.

Testövning 2.16 (Sid. 87)

Lösning

a) $8^{-4/3}=(8)^{-4/3}=(2^3)^{-4/3}=2^{3\cdot(-4/3)}=2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\underline{\frac{1}{16}}.$

b) $\sqrt[3]{4}\cdot 2^{-2/3}=(4)^{1/3}\cdot 2^{-2/3}=(2^2)^{1/3}\cdot 2^{-2/3}=2^{2/3}\cdot 2^{-2/3}=\underline{1}.$

c) $a^{2/3}\cdot b^{-1/4}\cdot a^{-3/4}\cdot b^{3/5}=a^{2/3}\cdot a^{-3/4}\cdot b^{-1/4}\cdot b^{3/5}=$

$=a^{2/3-3/4}\cdot b^{3/5-1/4}=a^{8/12-9/12}\cdot b^{12/20-5/20}=$

$=\underline{a^{-1/12}\cdot b^{7/20}}.$

d) $\left(\frac{a^{-1/2}\cdot b^{2/5}\cdot c^{1/3}}{a^{-3/5}\cdot b^{1/3}\cdot c^{-1}}\right)^2=\left(\frac{a^{-1/2}}{a^{-3/5}}\cdot\frac{b^{2/5}}{b^{1/3}}\cdot\frac{c^{1/3}}{c^{-1}}\right)^2=$

$=(a^{-1/2-(-3/5)}\cdot b^{2/5-1/3}\cdot c^{1/3-(-1)})^2=$

$=(a^{3/5-1/2}\cdot b^{2/5-1/3}\cdot c^{1/3+1})^2=$

$=(a^{6/10-5/10}\cdot b^{6/15-5/15}\cdot c^{4/3})^2=$

$=(a^{1/10}\cdot b^{1/15}\cdot c^{4/3})^2=(a^{1/10})^2\cdot(b^{1/15})^2\cdot(c^{4/3})^2=$

$=a^{2\cdot(1/10)}\cdot b^{2\cdot(1/15)}\cdot c^{2\cdot(4/3)}=\underline{a^{1/5}\cdot b^{2/15}\cdot c^{8/3}}.$

Testövning 2.17 (Sid. 87)

Lösning

a) $e^{2x}+2e^x-2=0 \Leftrightarrow (e^x)^2+2\cdot e^x-2=0 \Leftrightarrow (t=e^x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2+2t-2=0 \Leftrightarrow t=-1\pm\sqrt{3}=e^x \Leftrightarrow \underline{x=\ln(\sqrt{3}-1)}.$

b) $9^x+8\cdot 3^{x-1}-1=0 \Leftrightarrow (3^2)^x+8\cdot 3^x\cdot 3^{-1}-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{2x}+\frac{8}{3}\cdot 3^x-1=0 \Leftrightarrow (3^x)^2+\frac{8}{3}\cdot 3^x-1=0 \Leftrightarrow (t=3^x)$

$\Leftrightarrow t^2+\frac{8}{3}t-1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{4}{3}\pm\frac{5}{3}=\frac{1}{3}=3^x \Leftrightarrow \underline{x=-1}.$

c) $e^{2x}\geq e^x+2 \Leftrightarrow (e^x)^2-e^x-2\geq 0 \Leftrightarrow (t=e^x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2-t-2\geq 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2)\geq 0 \overset{!}{\Leftrightarrow} t\geq 2 \Leftrightarrow e^x\geq 2$

$\Leftrightarrow x\geq \ln 2.$

Anmärkning: I $\overset{!}{\Leftrightarrow}$ underförstås följande:

...	0		2		→ t
sgn(t+1)		+	+	+	
sgn(t-2)		−	0	+	
sgn(f(t))		−	0	+	

$f(t)=(t+1)(t-2)$, $t=e^x>0$, så att $t=-1$ förkastas.

Resultat: a) $x=\ln(\sqrt{3}-1)$; b) $x=-1$; c) $x\geq\ln 2$.

Testövning 2.18 (Sid. 87)

Lösning

(1) $\ln\frac{a^x}{a^y}=\ln a^x-\ln a^y=x\ln a-y\ln a=(x-y)\ln a=$

$=\ln a^{x-y} \Leftrightarrow \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}.$

(2) $\ln(a^x)^y=y\ln a^x=xy\ln a=\ln a^{xy} \Leftrightarrow (a^x)^y=a^{xy}.$

Testövning 2.19 (Sid. 89)

Lösning

a) $\left(\frac{x^{\sqrt{2}}}{x^{-\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = (x^{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})})^{\sqrt{2}} = (x^{2\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = x^{2(\sqrt{2})^2} = x^{2\cdot 2} = \underline{x^4}$.

b) $\frac{x^{0,1} \cdot y^{-0,5}}{x^{-0,2} \cdot y^{-1}} = \frac{x^{0,1}}{x^{-0,5}} \frac{y^{-0,5}}{y^{-1}} = x^{0,1-(-0,5)} \cdot y^{-0,5-(-1)} = \underline{x^{0,6} y^{0,5}}$

Testövning 2.20 (Sid. 89)

Lösning

$x^{1/2} - 2x^{1/3} = 9 \Leftrightarrow (x = t^6) \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 = 9 \Rightarrow t = 3$ rot

$\Leftrightarrow t-3$ faktor i polynomet $t^3 - 2t^2 - 9$;

$$\begin{array}{rl} t^2 + t + 3 & \\ \hline t^3 - 2t^2 + 0t - 9 & \boxed{t-3} \\ (-)\ \underline{t^3 - 3t^2 + 0t + 0} & \\ t^2 + 0t - 9 & \\ (-)\ \underline{t^2 - 3t + 0} & \\ 3t - 9 & \\ (-)\ \underline{3t - 9} & \\ 0 & \end{array}$$

$t^3 - 2t^2 - 9 = (t-3)(t^2+t+3) = 0 \overset{!}{\Leftrightarrow} t-3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$

$\Leftrightarrow x^{1/6} = 3 \Leftrightarrow x = 3^6 = \underline{729.}$

Anm $t^2+t+3 \neq 0$ för alla t. Observera att $ab = 0$ och $b \neq 0 \Rightarrow a = 0$ (modus tollens).

Övning 2.21 (Sid. 90)

Lösning

a) $\underline{\ln(x+3) - \ln(x+1) = \ln 2}$.

$$D_{\ln} = \mathbb{R}_+ \Rightarrow \begin{cases} x+3 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x > -1}.$$

$\ln(x+3) = \ln 2 + \ln(x+1) = \ln 2(x+1) \Leftrightarrow x+3 = 2(x+1)$

$\Leftrightarrow x+3 = 2x+2 \Leftrightarrow \underline{x = 1.}$

b) $\underline{\ln(x-1) + \ln(x+5) = \ln x + \ln 2.}$

$$D_{\ln} = \mathbb{R}_+ \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+5 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -5 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x > 1.}$$

$\ln(x-1)(x+5) = \ln 2x \Leftrightarrow (x-1)(x+5) = 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 =$

$= 0 \Leftrightarrow \underline{x = -1 + \sqrt{6}}$ (ty $x > 1$).

c) $\underline{e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0.}$

$(e^x)^3 - 2(e^x)^2 - e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow (t = e^x) \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow t^2(t-2) - (t-2) = (t-2)(t^2-1) = (t+1)(t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = 2$ ($t = -1$ förkastas ty $t = e^x > 0$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x = 1 \vee e^x = 2 \Leftrightarrow \underline{x = 0} \vee \underline{x = \ln 2.}$

d) $\underline{3^x - 3^{x/2} = 6}$; substitutionen blir $t = 3^{x/2}$.

$t^2-t=6 \Leftrightarrow t=3$; $t=-2$ förkastas, ty $t=3^{x/2}>0$).

$3^{x/2}=3 \Leftrightarrow (3^x)^{1/2}=3 \Leftrightarrow 3^x=9=3^2 \Leftrightarrow \underline{x=2}.$

e) $\underline{\ln(x^2-4) \leq \ln(x-2)}$

$$D_{\ln}=\mathbb{R}_+ \Rightarrow \begin{cases} x^2-4>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2>4 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|>2 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x>2}. \ (*)$$

ln-funktionen är strängt växande, varför

$$\ln(x^2-4) \leq \ln(x-2) \Leftrightarrow x^2-4 \leq x-2 \Leftrightarrow x^2-x-6 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-3) \leq 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} -2 \leq x \leq 3 \wedge x>2 \Leftrightarrow \underline{2<x\leq 3.}$$

Anm. $x^2>4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}>\sqrt{4} \Leftrightarrow |x|>2 \Leftrightarrow x<-2 \vee x>2$;

$f(x)=x^2-x-6=(x+2)(x-3)$;

	-2		3		x
sgn(x+2)		+	+	+	
sgn(x-3)		−	0	+	
sgnf(x)		−	0	+	

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2<x\leq 3$

f) $\underline{4^x-2^{x+1}<8}$

(1) $4^x=(4)^x=(2^2)^x=2^{2x}=2^{x2}=(2^x)^2$; $2^{x+1}=2^x.2$.

(2) $(2^x)^2-2\cdot 2^x<8 \wedge t=2^x \Leftrightarrow t^2-2t<8 \Leftrightarrow t^2-2t-8<0$;

$\Leftrightarrow (t+2)(t-4)<0 \Leftrightarrow -2<t<4 \wedge t>0 \Leftrightarrow 0<t<4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x<4 \Leftrightarrow 2^x<2^2 \Leftrightarrow x<2$, ty $x \mapsto 2^x$ växande

Övning 2.22 (Sid. 90)

Lösning

a) $\underline{y=\ln(2-x)}$

Anm. Låt a vara en reell konstant och $y=f(x)$ en funktion. Man får grafen till $y=f(x-a)$ om man förskjuter grafen till $y=f(x)$, a enheter åt höger, om $a>0$, eller $|a|$ enheter åt vänster, om $a<0$.

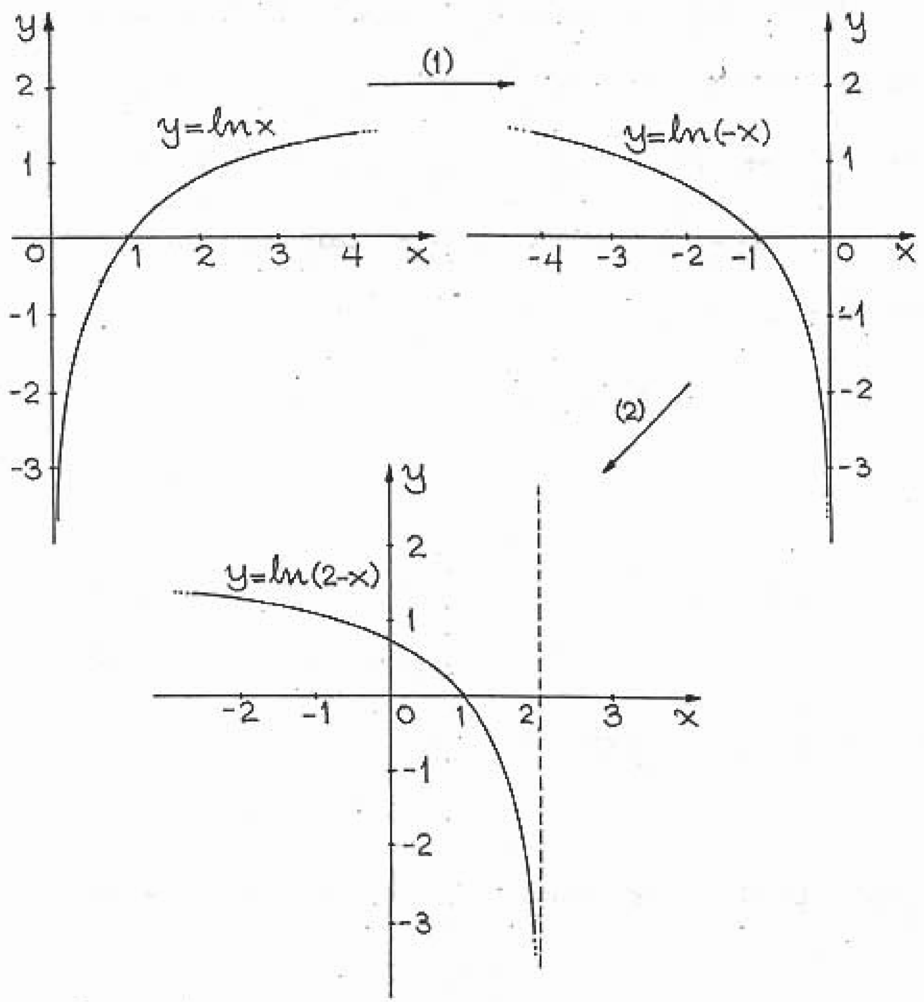
Man får grafen till $y=f(-x)$ om man speglar grafen till $y=f(x)$ i y-axeln.

Dessa två "avbildningar", translation och spegling, kommer jag att kombinera för att rita grafen till $y=\ln(2-x)$ i stora drag.

$y=\ln(2-x)$ är definierad för $x<2$; linjen $x=2$ säges vara en (lodrät) asymptot till grafen. Jag utgår från lnx och får schemat:

$$x \longmapsto \ln x \xrightarrow{(1)} \ln(-x) \xrightarrow{(2)} \ln(2-x).$$

I (2) underförstås $-x \longrightarrow -(x-2)=2-x$.

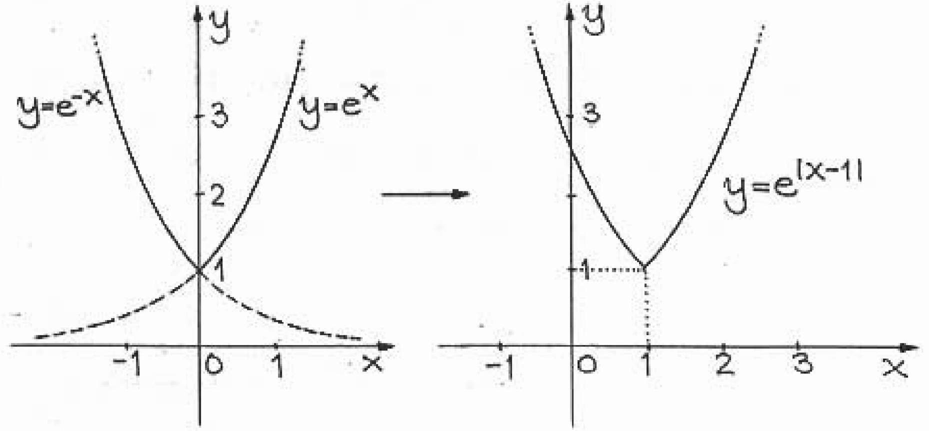


b) $\underline{y=e^{|x-1|}}$

Man får kurvan $y=e^{-x}$ genom spegling av kurvan $y=e^{x}$ i y-axeln.

$$f(x)=e^{|x|}=\begin{cases} e^{x}, & x\geq 0 \\ e^{-x}, & x\leq 0 \end{cases} \Rightarrow g(x)=f(x-1)=\begin{cases} e^{x-1}, & x-1\geq 0 \\ e^{-(x-1)} & x-1<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow e^{|x-1|}=\begin{cases} e^{x-1}, & x\geq 1 \\ e^{-x+1}, & x<1 \end{cases}$$



Övning 2.23 (Sid. 90)

Lösning

a) $\underline{f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}}$.

f är definierad för alla x, ty e^{x} är det och dessutom $e^{x}+1\neq 0$; $D_f=\mathbb{R}$.

$$y=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}\Leftrightarrow \frac{1}{e^{x}+1}=1-y\Rightarrow e^{x}+1=\frac{1}{1-y}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{1-y}-1=\frac{y}{1-y}>0\Leftrightarrow y(1-y)>0\Leftrightarrow 0<y<1.$$

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 1-\frac{1}{e^{x_1}+1}=1-\frac{1}{e^{x_2}+1}\Leftrightarrow e^{x_1}+1=e^{x_2}+1\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow$ injektiv/inverterbar.

$e^x = \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow x = \ln\frac{y}{1-y} = f^{-1}(y)$, $0<y<1$.

<u>Resultat</u>: $D_f = \mathbb{R}$, $V_f =]0,1[$; $f^{-1}(x) = \ln\frac{x}{1-x}$

b) $\underline{f(x) = e^{2x} - 2e^x}$

$f(x) = y = e^{2x} - 2e^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x + 1 = y+1 \Leftrightarrow (e^x-1)^2 = y+1$

$\Rightarrow y \geq -1 \Rightarrow e^x = 1 \pm \sqrt{1+y}$;

Plustecknet $\Rightarrow$ y är obegränsat uppåt; det innebär att $V_f = [-1,\infty[$.

För $-1<y<0$ får vi 2 x-värden, så f är inte injektiv/inverterbar

<u>Resultat</u>: $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = [-1,\infty[$; invers saknas.

c) $\underline{f(x) = \ln(e^x - 1)}$

$D_{\ln} = \mathbb{R}_+ \Rightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}_+$.

f antar alla värden, dvs ekvationen $f(x) = a$ har en rot för alla a, dvs $V_f = \mathbb{R}$.

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \ln(e^{x_1}-1) = \ln(e^{x_2}-1) \Leftrightarrow e^{x_1} - 1 =$

$= e^{x_2} - 1 \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ f inverterbar;

$\ln(e^x-1) = y \Leftrightarrow e^x - 1 = e^y \Leftrightarrow e^x = 1 + e^y \Leftrightarrow x = \ln(1+e^y)$;

<u>Resultat</u>: $D_f = \mathbb{R}_+$, $V_f = \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = \ln(1+e^x)$.

Övning 2.24 (Sid. 90)

Lösning

a) $I \to 2I \Rightarrow 10\lg\frac{I}{I_0} \longrightarrow \lg\frac{2I}{I_0} = \lg 2\frac{I}{I_0} = \lg 2 + \lg\frac{I}{I_0}$.

b) $\begin{cases} 100 = 10\lg\frac{I}{I_0} \\ 110 = 10\lg\frac{I'}{I_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg\frac{I}{I_0} = 10 \\ \lg\frac{I'}{I_0} = 11 \end{cases} \Rightarrow \lg\frac{I'}{I_0} - \lg\frac{I}{I_0} = 11 - 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg\frac{I'/I_0}{I/I_0} = 1 \Leftrightarrow \lg\frac{I'}{I} = 1 \Leftrightarrow \frac{I'}{I} = 10 \Leftrightarrow I' = 10 \cdot I$.

<u>Svar</u>: a) Den ökar med $10\lg 2$.

b) Den tiodubblas.

Övning 2.25 (Sid 90)

Lösning

a) $pH = 7 \Rightarrow -\lg h = 7 \Leftrightarrow \lg h = -7 \Leftrightarrow \underline{h = 10^{-7}}$.

b) $pH = 10 \Rightarrow -\lg h = 10 \Leftrightarrow \lg h = -10 \Leftrightarrow \underline{h = 10^{-10}}$.

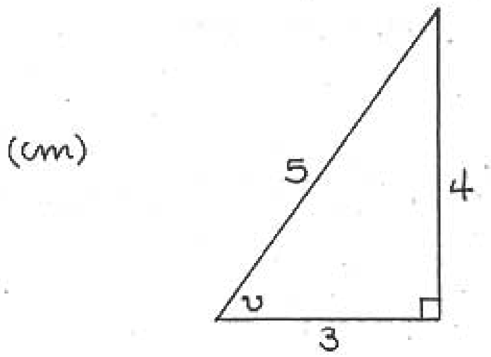
c) $pH = 5{,}5 \Rightarrow -\lg h = 5{,}5 \Leftrightarrow \lg h = -5{,}5 \Leftrightarrow h = 10^{-5{,}5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h = 10^{0{,}5} \cdot 10^{-6} = \underline{3{,}16 \cdot 10^{-6}}$.

Testövning 2.26 (Sid. 92)

Lösning

a)

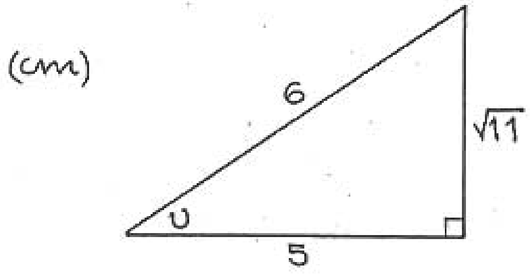


$$\begin{cases} a=3 \\ b=4 \\ c=5 \end{cases}$$

$c^2=a^2+b^2=3^2+4^2=9+16=25=5^2 \Leftrightarrow c=5$ (cm).

$$\left.\begin{array}{l} \cos v=\frac{a}{c}=\frac{3}{5} \\ \sin v=\frac{b}{c}=\frac{4}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \tan v=\frac{\sin v}{\cos v}=\frac{4/5}{3/5}=\frac{4}{3}=\frac{b}{a}.$$

b)



$$\begin{cases} a=5 \\ b=\sqrt{11} \\ c=6 \end{cases}$$

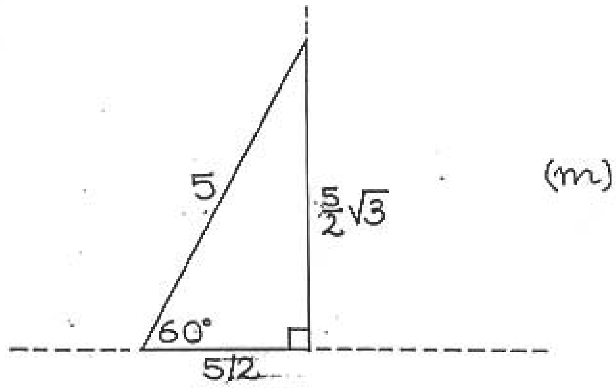
$c^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow b^2=c^2-a^2=6^2-5^2=36-25=11 \Rightarrow \underline{\underline{b=\sqrt{11}}}.$

$\cos v=\frac{5}{6}$; $\sin v=\frac{\sqrt{11}}{6}$, $\tan v=\frac{\sqrt{11}}{5}$.

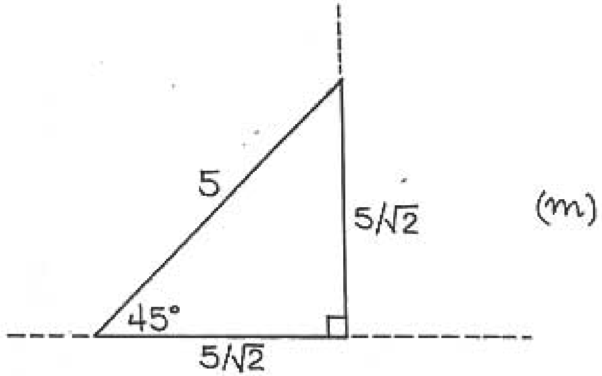
Testövning 2.27 (Sid. 92)

Lösning

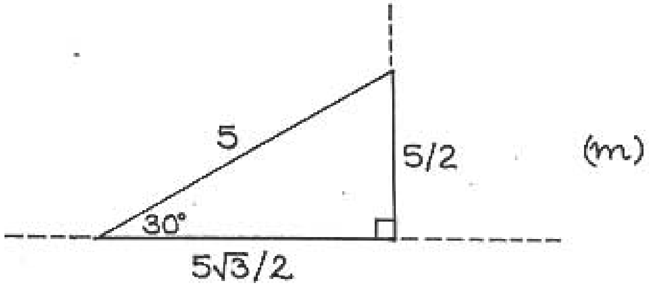
a) Med figurens beteckningar fås:



b)



c)

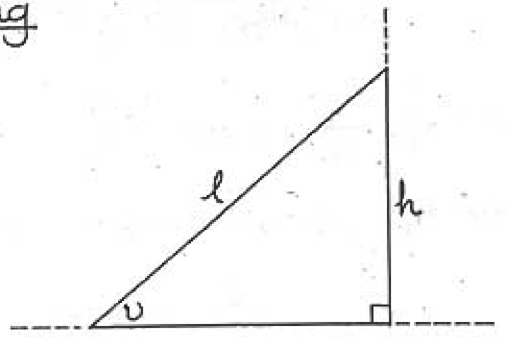


Anm. Ovanstående lösningar kan härledas med trigonometri... Kom ihåg att trigonometrin är en underavdelning till geometrin. (Se 2.28).

Testörning 2.28 (Sid. 92)

Lösning

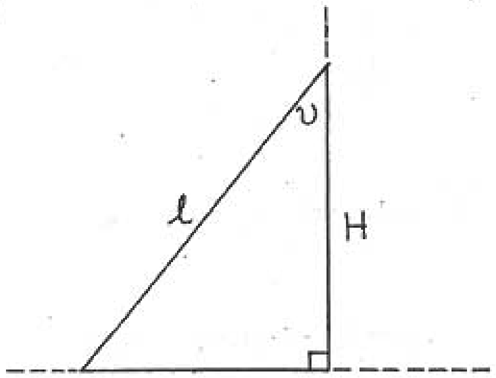
a)



(m)

$\sin v = h/\ell \Leftrightarrow \underline{h = \ell \cdot \sin v}.$

b)



(m)

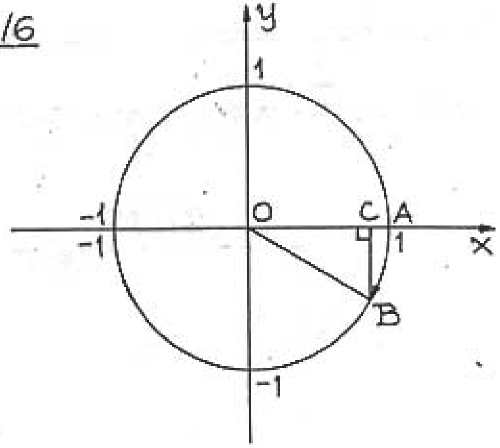
$\cos v = H/\ell \Leftrightarrow \underline{H = \ell \cdot \cos v}.$

Testörning 2.29 (Sid. 94)

Lösning

När man arbetar med enhetscirkeln uteblir vinkelbågen; vinkeln är <u>båglängd med tecken</u>.

a) $\underline{\overset{\frown}{AB} = v = -\pi/6}$



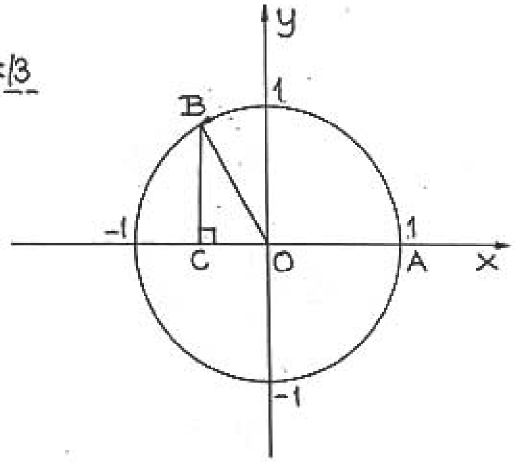
$\cos v = \frac{OC}{OB} \Rightarrow \cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{OC}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ (ΔOBC betraktas).

$\sin v = \frac{CB}{OB} \Rightarrow \sin(-\frac{\pi}{6}) = \frac{-1/2}{1} = -\frac{1}{2}.$

$\tan v = \frac{CB}{OC} \Rightarrow \tan(-\frac{\pi}{6}) = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$

$\cot v = \frac{OC}{CB} \Rightarrow \cot(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}.$

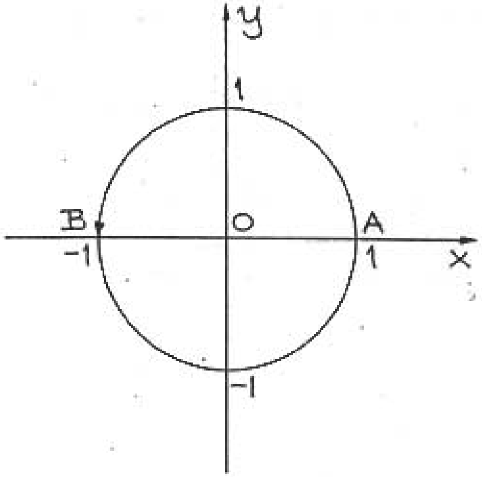
b) $\underline{\overset{\frown}{AB} = v = 2\pi/3}$



$\cos v = OC = -1/2$; $\sin v = \sqrt{3}/2$; $\tan v = -\sqrt{3}/2 = 1/\cot v.$

Triangeln OBC är en halv liksidig triangel. När man räknar cos, sin, tan och cot för en trubbig vinkel, måste man beakta även tecknet. OB = 1. Däremot är OC inte detsamma som CO; det bör memoreras att OC = −CO. Detsamma gäller för sinus. Skilj även mellan OB & BO.

c) $\overset{\frown}{AB} = v = \pi$



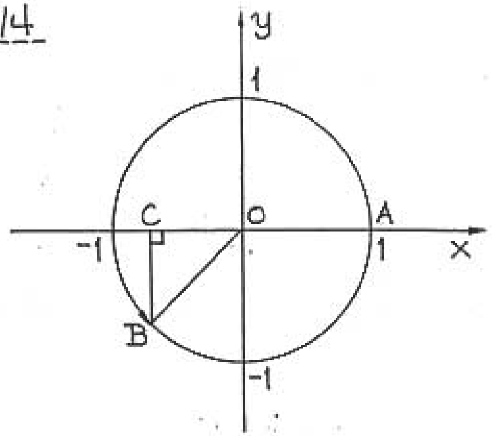
Punkten B har koordinaterna (−1,0). Enligt figuren 2.29 i boken har vi

$$\cos v = -1, \quad \sin v = 0, \quad \tan v = 0.$$

Cot är inte definierad i detta fall.

Här är triangeln OBC degenererad.

d) $\overset{\frown}{AB} = v = 5\pi/4$



$$\cos v = \frac{OC}{OB} \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (OC = -\tfrac{1}{\sqrt{2}},\ OB = 1).$$

$$\sin v = \frac{CB}{OB} \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (CB = -\tfrac{1}{\sqrt{2}},\ OB = 1).$$

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{-1/\sqrt{2}}{-1/\sqrt{2}} = 1 = \frac{\cos v}{\sin v} = \cot v.$$

Testövning 2.30 (Sid. 99)

Lösning

a) $2\cos^2 v = 1 \Leftrightarrow \cos^2 v = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos v = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee \cos v = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

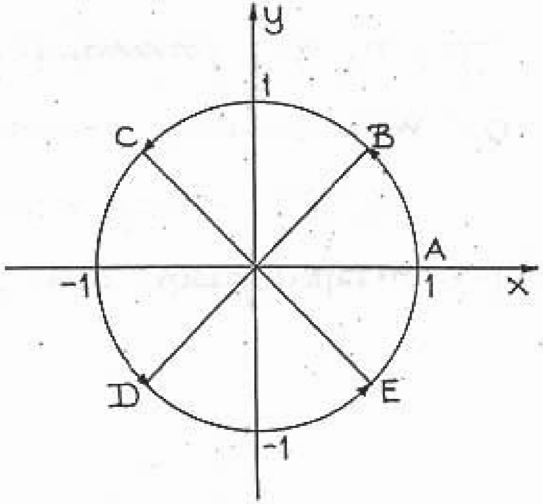
$\cos v = 1/\sqrt{2} \Leftrightarrow v = \pm\frac{\pi}{4} + n\,2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$\cos v = -1/\sqrt{2} \Leftrightarrow v = \pm\frac{3\pi}{4} + n'\cdot 2\pi,\ n' \in \mathbb{Z}.$

Lösningsmängden kan sammanfattas i

$$\underline{v = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}.}$$

Studera även figuren på nästa sida.



$\overset{\curvearrowright}{AB} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \overset{\curvearrowright}{AC} = \overset{\curvearrowright}{AB} + \overset{\curvearrowright}{BC} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \overset{\curvearrowright}{AD} = \overset{\curvearrowright}{AC} + \overset{\curvearrowright}{CD} =$

$= \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \overset{\curvearrowright}{AE} = \overset{\curvearrowright}{AD} + \overset{\curvearrowright}{DE} = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$ osv

Man kan också vandra i motsatt riktning (medurs), men då måste man kasta om alla pilar.

Anm. Såväl ledning som svar är fel. (2003)

b) $2\cos^2 v - \sin v = 2$

$\cos^2 v + \sin^2 v = 1 \Leftrightarrow \cos^2 v = 1 - \sin^2 v$, för alla v.

$2(1-\sin^2 v) - \sin v = 2 \Leftrightarrow 2 - 2\sin^2 v - \sin v = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 v + \sin v = 0 \Leftrightarrow 2\sin v(\sin v + \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin v = 0 \lor \sin v + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin v = 0 \lor \sin v = -\frac{1}{2}$;

(1) $\sin v = 0$

(2) $\sin v = -\frac{1}{2}$

$\overset{\curvearrowright}{AB} = -\pi/6$,

Resultat

Testövnin

Lösning

a) $3\cot^2 v = 1$

$\tan^2 v = 3$

Resultat:

b) $\underline{\tan^2 v + \tan v = 0.}$

$\tan v(\tan v + 1) = 0 \Leftrightarrow \tan v = 0 \vee \tan v = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{v = n\pi} \vee \underline{v = -\frac{\pi}{4} + n'\pi,\ n, n' \in \mathbb{Z}.}$

Testövning 2.32 (Sid. 99)

Lösning

a) $0 < v < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{\cos v > 0} \wedge \underline{\sin v > 0}$ (1:a kvadranten)

$\cos v = 0{,}1 = \frac{1}{10} \Rightarrow \sin v = \sqrt{1-0{,}1^2} = \sqrt{0{,}99} = \frac{3\sqrt{11}}{10}.$

$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{3\sqrt{11}/10}{1/10} = 3\sqrt{11}.$

$\cot v = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{3\sqrt{11}}.$

b) $-\frac{\pi}{2} < v < 0 \Rightarrow \underline{\cos v > 0} \wedge \underline{\sin v < 0.}$ (4:e kvadranten)

$\cos v = 0{,}1 \Rightarrow \sin v = -\sqrt{1-0{,}1^2} = -\frac{3\sqrt{11}}{10}.$

$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{-3\sqrt{11}/10}{1/10} = -3\sqrt{11} \Rightarrow \cot v = -\frac{1}{3\sqrt{11}}.$

Anm. $\sqrt{99} = \sqrt{9 \cdot 11} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{11} = 3\sqrt{11}.$

Testövning 2.33 (Sid. 101)

Lösning

a) $\sin 2v = \sin v \Leftrightarrow \sin 2v - \sin v = 0 \Leftrightarrow 2\sin v \cos v -$
$- \sin v = 0 \Leftrightarrow 2\sin v(\cos v - \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \sin v = 0 \vee \cos v = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \underline{v = l\pi \vee v = \frac{\pi}{3} + m2\pi \vee v = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi,\ l, m, n \in \mathbb{Z}.}$

b) $\underline{\cos 4v + \cos 2v + 1 = 0.}$

$\cos 4v = \cos 2(2v) = 2\cos^2 2v - 1;$

$2\cos^2 2v - 1 + \cos 2v + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2v + \cos 2v = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos 2v(\cos 2v + \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \cos 2v = 0 \vee \cos 2v = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2v = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi \vee 2v = \frac{2\pi}{3} + m \cdot 2\pi \vee 2v = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow \underline{v = \frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2} \vee v = \frac{\pi}{3} + m\pi \vee v = -\frac{\pi}{3} + n\pi,\ l, m, n \in \mathbb{Z}.}$

c) $\underline{\sin(v + \frac{\pi}{3}) + \sin v = 0.}$

$\sin v = -\sin(v + \frac{\pi}{3}) = \sin(-v - \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow v = -v - \frac{\pi}{3} + 2n\pi$

$\Leftrightarrow 2v = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi \Leftrightarrow \underline{v = -\frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.}$

d) $\underline{\tan 2v = 3\tan v}$ (Studera (2.53)).

$\frac{2\tan v}{1-\tan^2 v} - 3\tan v = 0 \Leftrightarrow \tan v\left(\frac{2}{1-\tan^2 v} - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \tan v = 0 \vee \frac{2}{1-\tan^2 v} = 3 \Leftrightarrow \tan v = 0 \vee$

$\vee 1 - \tan^2 v = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \tan v = 0 \vee \tan^2 v = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan v = 0 \vee \tan v = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee \tan v = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{v = l\pi \vee v = \frac{\pi}{6} + m \cdot 2\pi \vee v = -\frac{\pi}{6} + n2\pi,\ l, m, n \in \mathbb{Z}.}$

Testövning 2.34 (Sid. 101)

Lösning

Tabellen på sidan 94 konsulteras.

a) $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

b) Formlerna (2.48) konsulteras.

$\cos\frac{\pi}{6}=\cos 2\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\cos^2\frac{\pi}{12}-1=1-2\sin^2\frac{\pi}{12}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cos^2\frac{\pi}{12}-1\\ \frac{\sqrt{3}}{2}=1-2\sin^2\frac{\pi}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\\ 2\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\\ \sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\end{cases};$$

Anm. $2\pm\sqrt{3}=\frac{8\pm4\sqrt{3}}{4}=\frac{8\pm2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{4}=\frac{(\sqrt{2}\pm\sqrt{6})^2}{2^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}.$

Testövning 2.35 (Sid. 101)

a) (2.36) $\cos(-v)=\cos v$, $\sin(-v)=-\sin v.$

forts

(2.45) $\cos(u-v)=\cos u\cos v+\sin u\sin v.$

$\cos(u+v)=\cos(u-(-v))=\cos u\cos(-v)+\sin u\cdot\sin(-v)=$

$=\cos u\cos v-\sin u\sin v.$

b) (2.41) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=\sin v$ och $\sin\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=\cos v$

(2.44) $\cos(u+v)=\cos u\cos v-\sin u\sin v$

(2.45) $\cos(u-v)=\cos u\cos v+\sin u\sin v$

(2.36) $\cos(-v)=\cos v$ och $\sin(-v)=-\sin v$

① $\sin(u+v)=(2.41)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(u+v)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-u\right)-v\right)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\cos v+\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\sin v=(2.41)=$

$=\sin u\cos v+\cos u\sin v.$

Anm. I (2.47) ska det stå

$\sin(u-v)=\sin u\cos v-\cos u\sin v.$

② $\sin(u-v)=\sin(u+(-v))=\sin u\cos(-v)+\cos u\sin(-v)=$

$=\sin u\cos v-\cos u\sin v.$

Övning 2.36 (Sid. 102)

Lösning

$0<u<\pi/2\Rightarrow\cos u>0\wedge\sin u>0$ (1:a kvadranten)

$\pi/2<v<\pi\Rightarrow\cos v<0\wedge\sin v>0$ (2:a kvadranten)

$$\left.\begin{array}{l}\sin u=\frac{1}{3}\Rightarrow\cos u=\sqrt{1-1/9}=\sqrt{8/9}=2\sqrt{2}/3\\ \sin v=\frac{1}{3}\Rightarrow\cos v=-\sqrt{1-1/9}=-\sqrt{8/9}=-2\sqrt{2}/3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin(u+v)=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{1}{3}=-\frac{2\sqrt{2}}{9}+\frac{2\sqrt{2}}{9}=0.\\ \cos(u-v)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{1}{3}\frac{1}{3}=-\frac{8}{9}+\frac{1}{9}=-\frac{7}{9}.\end{cases}$$

Övning 2.37 (Sid. 102)

Lösning

a) $\sin^2 v+\sin v\cos v=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sin^2 v+2\sin v\cos v=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin v\cos v=1-2\sin^2 v\Leftrightarrow \sin 2v=\cos 2v\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan 2v=1\Leftrightarrow 2v=\frac{\pi}{4}+n\pi\Leftrightarrow \underline{v=\frac{\pi}{8}+n\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}}.$

b) $\tan\left(v+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan v+\tan(\pi/4)}{1-\tan v\cdot\tan(\pi/4)}=\frac{1+\tan v}{1-\tan v};$

$\tan\left(v+\frac{\pi}{4}\right)-\tan v=1\Leftrightarrow\frac{1+\tan v}{1-\tan v}-(1+\tan v)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(1+\tan v)\left(\frac{1}{1-\tan v}-1\right)=0\Leftrightarrow\tan v=0\vee\tan v=-1$

$\Leftrightarrow\underline{v=m\pi}\vee\underline{v=-\frac{\pi}{4}+n\pi,\ m,n\in\mathbb{Z}}.$

Övning 2.38 (Sid. 102)

Lösning

(1) $\tan(u+v)=\frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)}=\frac{\sin u\cos v+\cos u\sin v}{\cos u\cos v-\sin u\sin v}=$

$$=\frac{\frac{\sin u\cos v+\cos u\sin v}{\cos u\cos v}}{\frac{\cos u\cos v-\sin u\sin v}{\cos u\cos v}}=\frac{\frac{\sin u}{\cos u}+\frac{\sin v}{\cos v}}{1+\frac{\sin u}{\cos u}\frac{\sin v}{\cos v}}=\frac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\tan v}.$$

(2) $\tan(-v)=-\tan v\Rightarrow\tan(u-v)=\tan(u+(-v))=(1)=$

$=\frac{\tan u+\tan(-v)}{1-\tan u\tan(-v)}=\frac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\tan v}.$

Övning 2.39 (Sid. 103)

Lösning

$$\frac{1}{\cos^2x}=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=1+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2=1+\tan^2x.$$

Övning 2.40 (Sid. 103)

Lösning

(1) $\begin{cases}\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v\\ \sin(u-v)=\sin u\cos v-\cos u\sin v\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sin(u+v)-\sin(u-v)=\cos u\sin v-(-\cos u\sin v)=$

$=2\cos u\sin v.$

(2) $\begin{cases}u+v=s\\ u-v=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{s+t}{2}\\ v=\frac{s-t}{2}\end{cases}\Rightarrow\sin s-\sin t=2\cos\frac{s+t}{2}\sin\frac{s-t}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin u-\sin v=2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}.$

Övning 2.41 (Sid. 103)

Lösning

a) $\tan(\frac{\pi}{2}-v)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-v)}{\cos(\frac{\pi}{2}-v)}=\frac{\cos v}{\sin v}=\cot v=\frac{1}{\tan v}$.

b) $\cos 3v=\cos(2v+v)=\cos 2v\cos v-\sin 2v\sin v=$

$$=(2\cos^2 v-1)\cos v-2\cos v\sin v\cdot\sin v=$$

$$=2\cos^3 v-\cos v-2\cos v\sin^2 v=$$

$$=2\cos^3 v-\cos v-2\cos v(1-\cos^2 v)=$$

$$=2\cos^3 v-\cos v-2\cos v+2\cos^3 v=$$

$$=4\cos^3 v-3\cos v.$$

c) $\sin 3v=\sin(2v+v)=\sin 2v\cos v+\cos 2v\sin v=$

$$=2\sin v\cos v\cdot\cos v+(1-2\sin^2 v)\sin v=$$

$$=2\sin v\cos^2 v+\sin v-2\sin^3 v=$$

$$=2\sin v(1-\sin^2 v)+\sin v-2\sin^3 v=$$

$$=2\sin v-2\sin^3 v+\sin v-2\sin^3 v=$$

$$=3\sin v-4\cos^3 v.$$

Övning 2.42 (Sid. 103)

Övning 2.40 konsulteras.

$$|\sin u-\sin v|=\left|2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}\right|=$$

$$=2\left|\cos\frac{u+v}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{u-v}{2}\right|\leq$$

$$\leq 2\cdot 1\cdot\left|\sin\frac{u-v}{2}\right|\leq$$

$$\leq 2\cdot 1\cdot\frac{|u-v|}{2}=|u-v|.$$

Testövning 2.43 (Sid. 104)

Lösning

a) $r(\cos v,\sin v)=(1,-1)\Leftrightarrow\begin{cases}r\cos v=1\\ r\sin v=-1\end{cases}\overset{!}{\Leftrightarrow}\begin{cases}r^2=2\\ r\cos v=1\\ r\sin v=-1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r=\sqrt{2}\\ \cos v=1/\sqrt{2}\\ \sin v=-1/\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=\sqrt{2}\\ v=-\pi/4\end{cases};\quad (v_n=-\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi).$$

b) $r(\cos v,\sin v)=(\sqrt{3},1)\Leftrightarrow\begin{cases}r\cos v=\sqrt{3}\\ r\sin v=1\end{cases}\overset{!}{\Leftrightarrow}\begin{cases}r^2=4\\ r\cos v=\sqrt{3}\\ r\sin v=1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r=2\\ \cos v=\sqrt{3}/2\\ \sin v=1/2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=2\\ v=\pi/6\end{cases};\quad (v_n=\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi).$$

c) $r(\cos v,\sin v)=(0,-3)\Leftrightarrow\begin{cases}r\cos v=0\\ r\sin v=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r^2=9\\ r\cos v=0\\ r\sin v=-3\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r=3\\ \cos v=0\\ \sin v=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=3\\ v=-\pi/2\end{cases};\quad (v_n=-\pi/2+n\cdot 2\pi).$$

Testövning 2.44 (Sid. 104)

Lösning

a) $\begin{cases} r=3 \\ v=\frac{7\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3\cos\frac{7\pi}{6}=3\cos(\pi+\frac{\pi}{6})=-3\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ y=3\sin\frac{7\pi}{6}=3\sin(\pi+\frac{\pi}{6})=-3\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{3}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{(x,y)=(-\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2})}.$

b) $\begin{cases} r=2 \\ v=-\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2\cos(-\frac{\pi}{2})=0 \\ y=2\sin(-\frac{\pi}{2})=-2 \end{cases} \Rightarrow \underline{(x,y)=(0,-2)}.$

Testövning 2.45 (Sid. 108)

Lösning

$VL=\cos x+\sin x = C\sin v . \cos x + C\cos v \sin x = C\sin(x+v)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C\cos v=1 \\ C\sin v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C^2=2 \\ C\cos v=1 \\ C\sin v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=\sqrt{2} \\ \cos v=1/\sqrt{2} \\ \sin v=1/\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=\sqrt{2} \\ v=\frac{\pi}{4} \end{cases};$

$\cos x+\sin x=\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x+\pi/4=\pi/3+2m\pi \ \vee \ x+\pi/4=2\pi/3+2n\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x=\pi/12+m\cdot 2\pi \ \vee \ x=5\pi/12+n\cdot 2\pi, \ m,n\in \mathbf{Z}}.$

Övning 2.46 (Sid. 108)

Till funktionen $y=A\sin(kx+v)$ tilldelas:

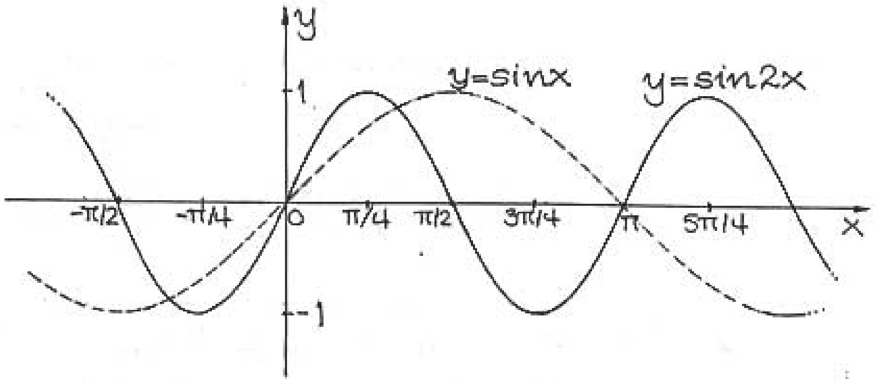
A = amplituden = största utslaget/elongationen.

k = svängningstalet (alt. vinkelfrekvensen).

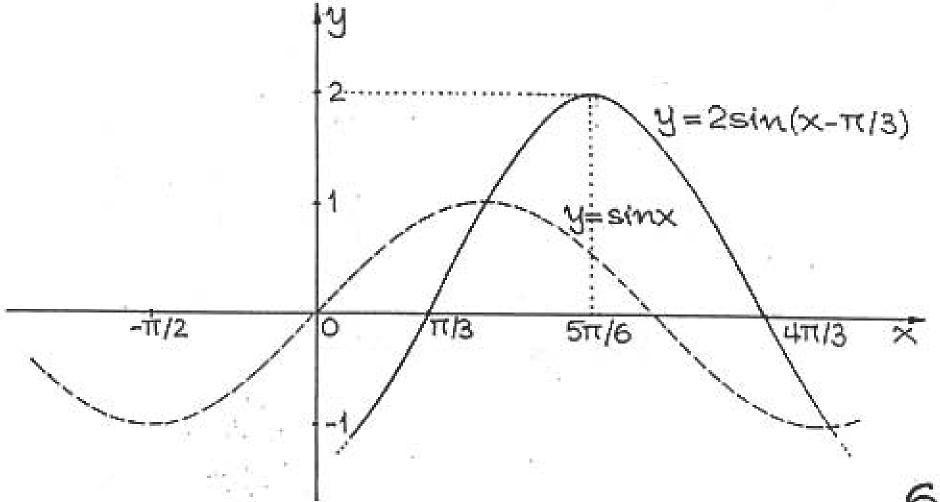
$\frac{v}{k}$ = fasförskjutningen (alt. begynnelsefasen).

$P=\frac{2\pi}{k}$ = perioden (alt. våglängden).

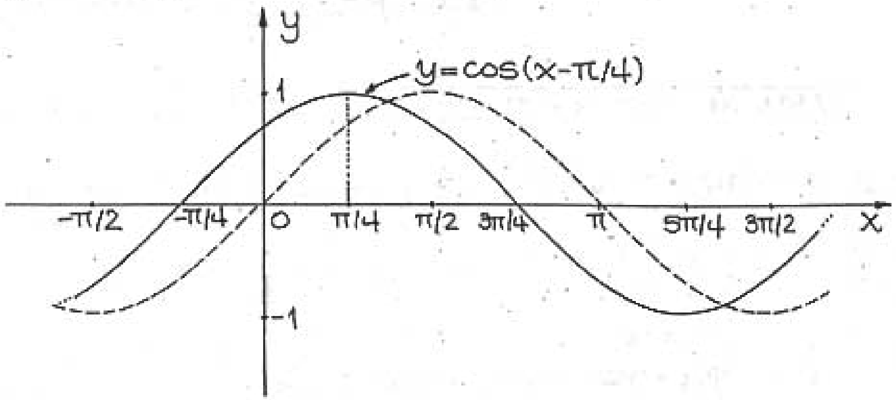
a) $\underline{y=\sin 2x}$; $A=1,\ k=2,\ v=0,\ P=\pi.$



b) $\underline{y=2\sin(x-\pi/3)}$; $A=2,\ k=1,\ v=-\pi/3,\ P=2\pi.$



c) $y = \cos(\frac{\pi}{4} - x) = \cos(-(x - \frac{\pi}{4})) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$.



I facit (sid 505) finns kurvorna uppritade i stora huvuddrag.

Övning 2.47 (Sid. 108)

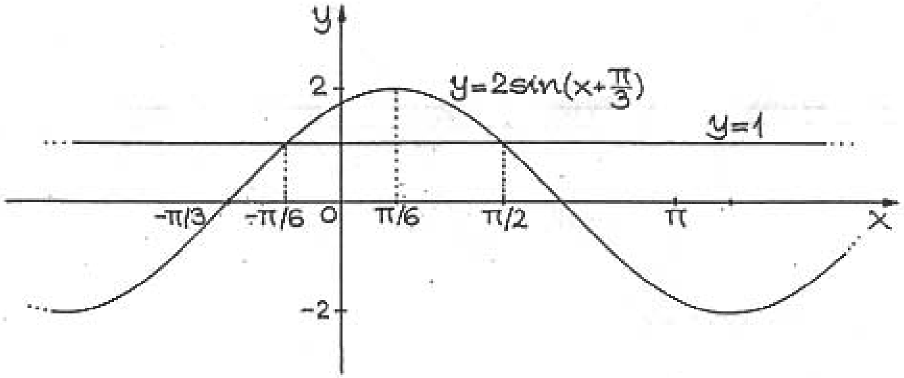
Lösning

a) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x = C\sin v \cos x + C\cos v \sin x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C\cos v = 1 \\ C\sin v = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C^2 = 4 \\ C\cos v = 1 \\ C\sin v = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ \cos v = 1/2 \\ \sin v = \sqrt{3}/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ v = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{y = 2\sin(x + \pi/3).}$

Kurvan är en sinuskurva med amplituden 2 förskjuten $\frac{\pi}{3}$ åt vänster. Den finns uppritad på nästa sida.



b) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow 2\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + m2\pi \ \vee \ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi, \ m, n \in \mathbb{Z},$

$\Leftrightarrow \underline{x = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2\pi \ \vee \ x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi, \ m, n \in \mathbb{Z}.}$ (Se fig.)

Övning 2.48 (Sid. 108)

Lösning

a) $A\sin x + B\cos x = C\cos v \sin x + C\sin v \cos x = C\sin(x + v)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C\cos v = A \\ C\sin v = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C^2 = A^2 + B^2 \\ C\cos v = A \\ C\sin v = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \frac{C\sin v}{C\cos v} = \tan v = \frac{B}{A} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(x + v), \ \tan v = \frac{B}{A};$

$-1 \leq \sin(x + v) \leq 1 \ \Leftrightarrow -\sqrt{A^2 + B^2} \leq A\sin x + B\cos x \leq \sqrt{A^2 + B^2}$

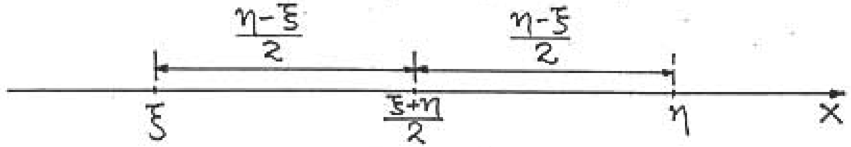
$$\Rightarrow \{A\sin x + B\cos x\}_{min}^{max} = \begin{cases} \sqrt{A^2 + B^2} \\ -\sqrt{A^2 + B^2} \end{cases};$$

b) $$A\sin^2x+B\cos^2x=A\frac{1-\cos2x}{2}+B\frac{1+\cos2x}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}(A+B+(B-A)\cos2x)=$$
$$=\frac{A+B}{2}+\frac{B-A}{2}\cos2x.$$

$y=A\sin^2x+B\cos^2x$ är en cosinuskurva som "oscillerar" kring linjen $y=\frac{A+B}{2}$ med amplituden $\frac{|B-A|}{2}$ och perioden $T=\pi$. Det största värdet är $\frac{1}{2}(A+B+|A-B|)$ och det minsta $\frac{1}{2}(A+B-|A-B|)$, vilket sammanfattas i

$$\{A\sin^2x+B\cos^2x\}^{\max}_{\min}=\begin{cases}\max(A,B)\\ \min(A,B)\end{cases}$$

Anm. $\left\{\begin{array}{l}\max(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(\xi+\eta+|\xi-\eta|)\\ \min(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(\xi+\eta-|\xi-\eta|)\end{array}\right\}$ (Se fig.)



Testövning 2.49 (Sid. 112)

Lösning

a) $$u=\arcsin\frac{\sqrt3}{2}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sin u=\frac{\sqrt3}{2}\\ -\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{3}=\sin^{-1}\frac{\sqrt3}{2}.$$

$$v=\arccos\frac{\sqrt3}{2}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos v=\frac{\sqrt3}{2}\\ 0\le v\le\pi\end{array}\right\}\Leftrightarrow v=\frac{\pi}{6}=\cos^{-1}\frac{\sqrt3}{2}.$$

b) $$u=\arcsin\frac{1}{\sqrt2}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sin u=\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{4}=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt2}.$$

$$v=\arccos\frac{1}{\sqrt2}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos v=\frac{1}{\sqrt2}\\ 0\le v\le\pi\end{array}\right\}\Leftrightarrow v=\frac{\pi}{4}=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt2}.$$

c) $$u=\arcsin1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sin u=1\\ -\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}=\sin^{-1}1.$$

$$v=\arccos1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos u=1\\ 0\le u\le\pi\end{array}\right\}\Leftrightarrow u=0=\cos^{-1}1.$$

d) $$u=\arcsin(-\tfrac{1}{2})\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sin u=-\frac{1}{2}\\ -\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow u=-\frac{\pi}{6}=\sin^{-1}(-\tfrac{1}{2}).$$

$$v=\arccos(-\tfrac{1}{2})\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos v=-\frac{1}{2}\\ 0\le v\le\pi\end{array}\right\}\Leftrightarrow v=\frac{2\pi}{3}=\cos^{-1}(-\tfrac{1}{2}).$$

Testövning 2.50 (Sid. 112)

Lösning

a) $$u=\arctan1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\tan u=1\\ -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1.$$

b) $u=\arctan\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan u=\sqrt{3} \\ -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow u=\frac{\pi}{3}=\tan^{-1}\sqrt{3}.$

c) $u=\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan u=-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow u=-\frac{\pi}{6}=\tan^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{3}}).$

Testövning 2.51 (Sid. 112)

Lösning

a) $3\cos^2 v+10\sin v=6 \Leftrightarrow 3(1-\sin^2 v)+10\sin v=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 v-10\sin v+3=0 \Leftrightarrow \sin^2 v-\frac{10}{3}\sin v+1=0$

$\Leftrightarrow \sin v=\frac{5}{3}(\pm)\sqrt{\frac{25}{9}-1}=\frac{5-4}{3}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow v=\arcsin\frac{1}{3}+$

$+m\cdot 2\pi \vee v=\pi-\arcsin\frac{1}{3}+n\cdot 2\pi,\ m,n\in \mathbb{Z},$

$\Leftrightarrow \underline{v=\arcsin\frac{1}{3}+m2\pi \vee v=-\arcsin\frac{1}{3}+(2n+1)\pi.}$

b) $\tan 2v=4\tan v \Leftrightarrow \frac{2\tan v}{1-\tan^2 v}-4\tan v=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\tan v(\frac{1}{1-\tan^2 v}-2)=0 \Leftrightarrow \tan v=0 \vee 1-\tan^2 v=$

$=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan v=0 \vee \tan^2 v=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan v=0 \vee$

$\vee \tan v=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \overset{!}{\Leftrightarrow} \underline{v=m\pi} \vee \underline{v=\pm\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}+n\cdot\pi.}$

Anm. I $\overset{!}{\Leftrightarrow}$ underförstås identiteten (2.65) på sidan 113 i läroboken.

Testövning 2.52 (Sid. 115)

Lösning

a) $\arcsin x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\sin\frac{\pi}{2}=\underline{1.}$

b) $\arctan x=-\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\tan(-\frac{\pi}{3})=-\tan\frac{\pi}{3}=\underline{-\sqrt{3}.}$

c) $\underline{\arcsin x=\arccos 2x}$

$D_{\arcsin}=[-1,1]=D_{\arccos} \Rightarrow \begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ -1\leq 2x\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ -\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2} \end{cases}^{(*)}$

$V_{\arccos}=[0,\pi] \Rightarrow \arcsin x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \underline{0\leq x\leq \frac{1}{2}};^{(**)}$

$t=\arcsin x \Leftrightarrow x=\sin t \Leftrightarrow \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2}$

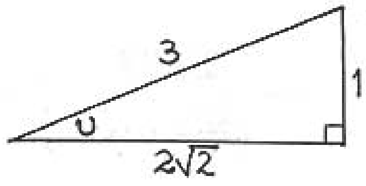
$\Leftrightarrow t=\underline{\arccos\sqrt{1-x^2}=\arccos 2x} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-x^2=4x^2 \Leftrightarrow 5x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{5} \overset{(**)}{\Leftrightarrow} \underline{x=1/\sqrt{5}.}$

Testövning 2.53 (Sid. 115)

Lösning

a)



$\underline{v=\arcsin\frac{1}{3}=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}},$

$v=\arcsin\frac{1}{3} \Rightarrow \sin 2v=2\sin v\cos v=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}.$

b) $\alpha = \arctan 2 \Leftrightarrow \tan\alpha = 2$; $\beta = \arctan 3 \Leftrightarrow \tan\beta = 3$;

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1 \Leftrightarrow \alpha+\beta = -\frac{\pi}{4} + n\pi;$$

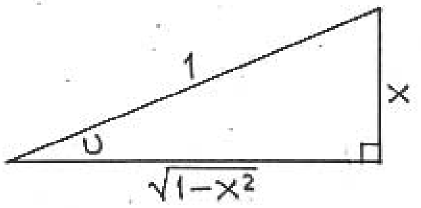
c) $$\left.\begin{array}{l} 1<2 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \arctan 2 < \frac{\pi}{2} \\ 1<3 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \arctan 3 < \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \pi \overset{1}{\Rightarrow} n=1;$$

Resultat: $\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$.

Övning 2.54 (Sid. 115)

Lösning

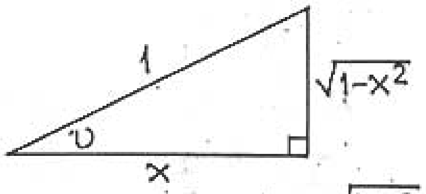
a)



$$\arcsin x = v = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\arctan 2x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow 2x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow x = 0 \vee$$
$$\vee\ 2 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow x=0 \vee \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x=0 \vee x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b)



$$\arccos x = v = \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

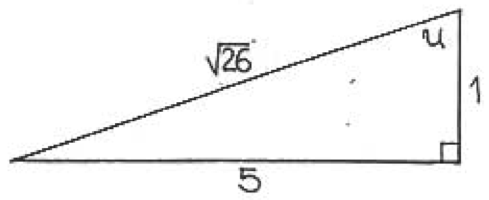
$$\arctan x = \arccos x = \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^4 = 1-x^2 \Leftrightarrow x^4+x^2=1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Anm. $\arccos x \geqslant 0 \Rightarrow \arctan x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0.$

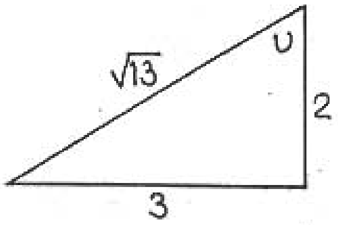
Övning 2.55 (Sid. 115)

Lösning

a)



$$\arccos \frac{1}{\sqrt{26}} = u = \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}}.$$



$$\arcsin \frac{3}{\sqrt{13}} = v = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}};$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v = \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{5}{\sqrt{26}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}} \frac{3}{\sqrt{13}} =$$
$$= \frac{2-15}{13\sqrt{2}} = -\frac{13}{13\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) $\left\{\begin{array}{l} 0<\frac{1}{\sqrt{26}}<1 \Rightarrow 0<\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}<\frac{\pi}{2} \\ 0<\frac{3}{\sqrt{13}}<1 \Rightarrow 0<\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}<\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Rightarrow 0<u+v<\pi \Rightarrow$

$\overset{a)}{\Rightarrow} u+v=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \underline{\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{26}}+\sin^{-1}\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\pi}{4}}.$

Testövning 2.56 (Sid. 116)

Lösning

a) $e^{i\pi/2}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+i\cdot 1=\underline{i}.$

b) $e^{-i\pi/6}=\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})=\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}.$

c) $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\cdot 0=\underline{-1}.$

d) $e^{i\,13\pi/3}=\cos\frac{13\pi}{3}+i\sin\frac{13\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\underline{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$

Testövning 2.57 (Sid. 116)

Lösning

a) $e^{ix}\cdot e^{iy}=(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)=$

$=\cos x\cos y-\sin x\sin y+i(\cos x\sin y+\sin x\cos y)=$

$=\cos(x+y)+i\sin(x+y)=$

$=e^{i(x+y)}.$

b) $(e^{ix})^0=1=e^{i\cdot 0}.$

$(e^{ix})^1=e^{ix}=\cos x+i\sin x=e^{i1\cdot x}.$

$(e^{ix})^2=e^{ix}\cdot e^{ix}=e^{i(1+1)x}=e^{2ix}.$

$(e^{ix})^3=(e^{ix})^2\cdot e^{ix}=e^{2ix}\cdot e^{ix}=e^{i(2+1)x}=e^{3ix}.$

$(e^{ix})^p=(e^{ix})^{-n}=\frac{1}{(e^{ix})^n}=\frac{1}{e^{inx}}=e^{-inx}=e^{ipx}.$

Testövning 2.58 (Sid. 117)

Lösning

a) $\cos^3 x=(\cos x)^3=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{(e^{ix}+e^{-ix})^3}{2^3}=$

$=\frac{1}{8}\left((e^{ix})^3+3(e^{ix})^2\cdot e^{-ix}+3e^{ix}(e^{-ix})^2+(e^{-ix})^3\right)=$

$=\frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}\cdot e^{-2ix}+e^{-3ix}\right)=$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}+e^{-i3x}}{2}+\frac{3e^{i(2-1)x}+3e^{i(1-2)x}}{2}\right)=$

$=\frac{1}{4}\left(\cos 3x+3\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)=$

$=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)=\frac{3\cos x}{4}+\frac{\cos 3x}{4}.$

Testövning 2.59 (Sid. 117)

Lösning

a) $e^{1+i}=e^1\cdot e^i=e(\cos 1+i\sin 1)=\underline{e\cdot\cos 1+ie\cdot\sin 1}.$

b) $e^{1+i\pi/2}=e^1\cdot e^{i\pi/2}=e\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=e\cdot i=\underline{ei}.$

c) $\exp\{-1-i\frac{5\pi}{4}\}=e^{-1}\cdot e^{-i5\pi/4}=e^{-1}(\cos(-\frac{5\pi}{4})+i\sin(-\frac{5\pi}{4}))$

$=e^{-1}\cdot(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})=e^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})=\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2e}+i\frac{\sqrt{2}}{2e}}.$

Testövning 2.60 (Sid. 118)

Lösning

a) $2-2i=re^{i\phi} \Rightarrow r=|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{i\phi}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i \Leftrightarrow \cos\phi+i\sin\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\phi=1/\sqrt{2} \wedge \sin\phi=-1/\sqrt{2} \overset{\downarrow}{\Leftrightarrow} \phi=-\pi/4.$

Resultat: $2-2i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

b) $3+i\sqrt{3}=re^{i\phi} \Rightarrow r=|3+i\sqrt{3}|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}e^{i\phi}=3+i\sqrt{3} \Leftrightarrow e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$\Leftrightarrow \cos\phi=\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \sin\phi=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \phi=\frac{\pi}{6}.$

Resultat: $3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}e^{i\pi/6}.$

c) $-5i=re^{i\phi} \Rightarrow r=|-5i|=5 \Leftrightarrow 5e^{i\phi}=-5i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{i\phi}=-i \Leftrightarrow \cos\phi+i\sin\phi=0+(-1)i \Leftrightarrow \cos\phi=0 \wedge$

$\wedge \sin\phi=-1 \Leftrightarrow \phi=-\pi/2.$

Resultat: $-5i=5e^{-i\pi/2}.$

Testövning 2.61 (Sid. 118)

Lösning

a) $3e^{i5\pi/3}=3(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})=3(-\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3})=$

$=3(-(-\frac{1}{2})-i\frac{\sqrt{3}}{2})=3(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\underline{\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}}.$

b) $-2e^{-i\pi/4}=-2(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))=-2(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})=$

$=-2(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})=\underline{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}.$

Testövning 2.62 (Sid. 119)

Lösning

a) $(1+i)^{11}=(1+i)^{12-1}=(1+i)^{12}\cdot(1+i)^{-1}=((1+i)^2)^6\cdot(1+i)^{-1}=$

$=(2i)^6\cdot(1+i)^{-1}=2^6 i^6\cdot\frac{1}{1+i}=64\cdot i^4\cdot i^2\cdot\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=$

$=64\cdot1\cdot(-1)\cdot\frac{1-i}{1^2+1^2}=-64\cdot\frac{1-i}{2}=-32(1-i)=\underline{-32+32i}.$

Annan metod

$1+i=re^{i\phi} \Rightarrow r=|1+i|=\sqrt{2}=2^{1/2} \Rightarrow \sqrt{2}e^{i\phi}=1+i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{i\phi}=\frac{1+i}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\phi+i\sin\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \Leftrightarrow \cos\phi=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\phi \Leftrightarrow \phi=\frac{\pi}{4}.$

$(1+i)^{11}=(2^{1/2}e^{i\pi/4})^{11}=(2^{1/2})^{11}\cdot(e^{i\pi/4})^{11}=$

$=2^{11/2}e^{i11\pi/4}=2^{11/2}\cdot e^{i3\pi/4}\cdot e^{i2\pi}=$

$=2^{11/2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})=$

$=2^5\cdot\sqrt{2}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)=2^5(-1+i)=\underline{-32+32i}.$

b) $1-i\sqrt{3}=re^{i\phi} \Rightarrow r=|1-i\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2e^{i\phi} = 1 - i\sqrt{3} \Leftrightarrow e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow \cos\phi = \frac{1}{2} \wedge \sin\phi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \phi = -\frac{\pi}{3};$$

$$(1-i\sqrt{3})^{-7} = (2e^{-i\pi/3})^{-7} = 2^{-7} \cdot e^{i7\pi/3} = 2^{-7}e^{i\pi/3} =$$

$$= 2^{-7} \cdot (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2^{-7}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) =$$

$$= 2^{-8}(1+i\sqrt{3}) = \underline{\frac{1}{256} + i\frac{\sqrt{3}}{256}}.$$

Övning 2.63 (Sid. 120)

Lösning

a) $\cos^4 x = (\cos x)^4 = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^4 = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^4}{2^4} =$

$$= \frac{1}{2^4}((e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3(e^{-ix}) + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 +$$

$$+ 4e^{ix} \cdot (e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4) =$$

$$= \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}) =$$

$$= \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4x}) =$$

$$= \frac{1}{16}(6 + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + e^{4ix} + e^{-4ix}) =$$

$$= \frac{6}{16} + \frac{4}{16}(e^{2ix} + e^{-2ix}) + \frac{1}{16}(e^{4ix} + e^{-4ix}) =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix}) + \frac{1}{16}(e^{4ix} + e^{-4ix}) =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} + \frac{1}{8}\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2} =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Anm. $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (\frac{1+\cos 2x}{2})^2 = \frac{(1+\cos 2x)^2}{4} =$

$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}) =$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x) = \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2})$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}.$$

b) $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

(Se Exempel 1.23 sid 49).

$$\sin^5 x = (\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^5 = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^5}{(2i)^5} = \frac{(e^{ix}+(-e^{-ix}))^5}{2^5 \cdot i^5} =$$

$$= \frac{1}{32i}((e^{ix})^5 + 5(e^{ix})^4 \cdot (-e^{-ix}) + 10(e^{ix})^3 \cdot (-e^{-ix})^2 +$$

$$+ 10(e^{ix})^2(-e^{-ix})^3 + 5e^{ix}(-e^{-ix})^4 + (-e^{-ix})^5) =$$

$$= \frac{1}{32i}(e^{5ix} + 5e^{4ix}(-e^{-ix}) + 10e^{3ix}e^{-2ix} +$$

$$+ 10e^{2ix}(-e^{-3ix}) + 5e^{ix} \cdot e^{-4ix} - e^{-5ix}) =$$

$$= \frac{1}{32i}(e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-i3x} - e^{-5ix}) =$$

$$= \frac{1}{32i}(e^{5ix} - e^{-5ix} - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})) =$$

$$= \frac{1}{16}(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i} - 5\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} + 10\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}) =$$

$$= \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$$

Anm. Fel facit! (Sätt in $x = \frac{\pi}{2}$ t.ex.) (2003!)

Övning 2.64 (Sid. 120)

a) $\sqrt{3} - i = re^{i\phi} \Rightarrow r = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2e^{i\phi} = \sqrt{3} - i \Leftrightarrow e^{i\phi} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \cos\phi + i\sin\phi =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \sin\phi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \phi = -\pi/6$;

$(\sqrt{3}-i)^{100} = (2e^{-i\pi/6})^{100} = 2^{100} \cdot (e^{-i\pi/6})^{100} =$

$= 2^{100} e^{-i50\pi/3} = 2^{100} \cdot e^{i16\pi} \cdot e^{-i2\pi/3} =$

$= 2^{100} \cdot e^{-i2\pi/3} = 2^{100} (\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}) =$

$= 2^{100} \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \underline{2^{99}(-1-\sqrt{3}i)}.$

Övning 2.65 (Sid. 120)

Lösning

a) $z^4 = 1 = e^{i2k\pi} \Leftrightarrow z_{k+1} = e^{ik\pi/2}, \ k = 0, 1, 2, 3$;

$z_1 = 1, \ z_2 = e^{i\pi/2} = i, \ z_3 = e^{i\pi} = -1, \ z_4 = e^{i3\pi/2} = -i.$

Annan lösning

$z^4 = 1 \Leftrightarrow (z^2)^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0 \Leftrightarrow z-1=0 \vee z+1=0 \vee$

$\vee z-i=0 \vee z+i=0 \Leftrightarrow \underline{z=1} \vee \underline{z=-1} \vee \underline{z=i} \vee \underline{z=-i}.$

b) $z^4 = -4 \Leftrightarrow z^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^4 + 4z^2 + 4 = 4z^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z^2+2)^2 - (2z)^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2-2z+2)(z^2+2z+2) = 0$

$\Leftrightarrow z^2-2z+2 = 0 \vee z^2+2z+2 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm i \ \vee$

$\vee z = -1 \pm i$; $\underline{z_1 = 1+i}$; $\underline{z_2 = 1-i}$, $\underline{z_3 = -1+i}$, $\underline{z_4 = -1-i}$.

Annan lösning

$z^4 = -4 = 2^2 e^{i\pi} = 2^2 \cdot e^{i(2k+1)\pi} \Leftrightarrow z_{k+1} = 2^{1/2} e^{i(2k+1)\pi/4}$;

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = 2^{1/2} e^{i\pi/4}, \ (k=0) \\ z_2 = 2^{1/2} e^{i3\pi/4}, \ (k=1) \\ z_3 = 2^{1/2} e^{i5\pi/4}, \ (k=2) \\ z_4 = 2^{1/2} e^{i7\pi/4}, \ (k=3) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1 = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = 1+i. \\ z_2 = \sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = -1+i \\ z_3 = \sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = -1-i \\ z_4 = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = 1-i \end{array}\right.$$

Övning 2.66 (Sid. 121)

Lösning

$\underline{f(x) = |x - |x-1||}$

(1) $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases}$;

(2) $-|x-1| = \begin{cases} -(x-1), & x \geq 1 \\ x-1, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+1, & x \geq 1 \\ x-1, & x < 1 \end{cases}$;

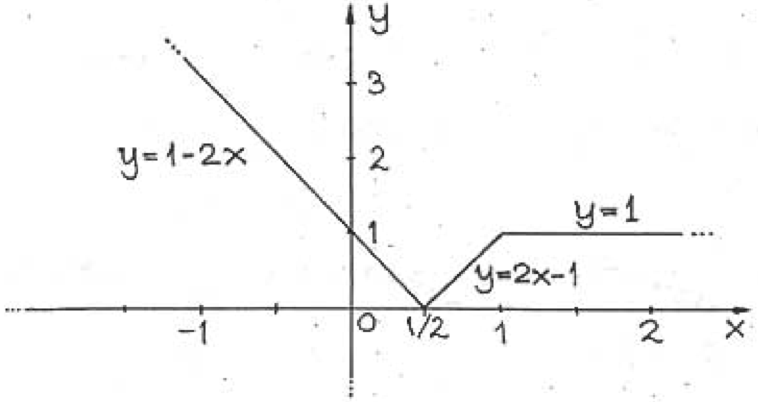
(3) $x - |x-1| = \begin{cases} x-x+1, & x \geq 1 \\ x+x-1, & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x, \geq 1 \\ 2x-1, & x < 1 \end{cases}$

(4) $f(x) = |x - |x-1|| = \begin{cases} |1|, & x \geq 1 \\ |2x-1|, & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ |2x-1|, & x < 1. \end{cases}$

$2x-1$ byter tecken vid $x = \frac{1}{2}$, så att:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1), & x < \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 2x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1, & x < \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$(5)\quad f(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 1 \\ 2x-1, & x<1 \wedge x \geq 1/2 \\ -2x+1, & x<1 \wedge x<1/2 \end{cases} = \begin{cases} 1 & , x \geq 1 \\ 2x-1, & 1/2 \leq x < 1 \\ -2x+1, & x<1/2 \end{cases};$$



Övning 2.67 (Sid. 121)

Lösning

Punkterna $x=0$ och $x=1$, vid vilka x resp. $x-1$ byter tecken (från − till +) delar x-axeln i tre separata (disjunkta) intervall enligt följande:

$$x<0,\ 0 \leq x < 1 \text{ och } x \geq 1.$$

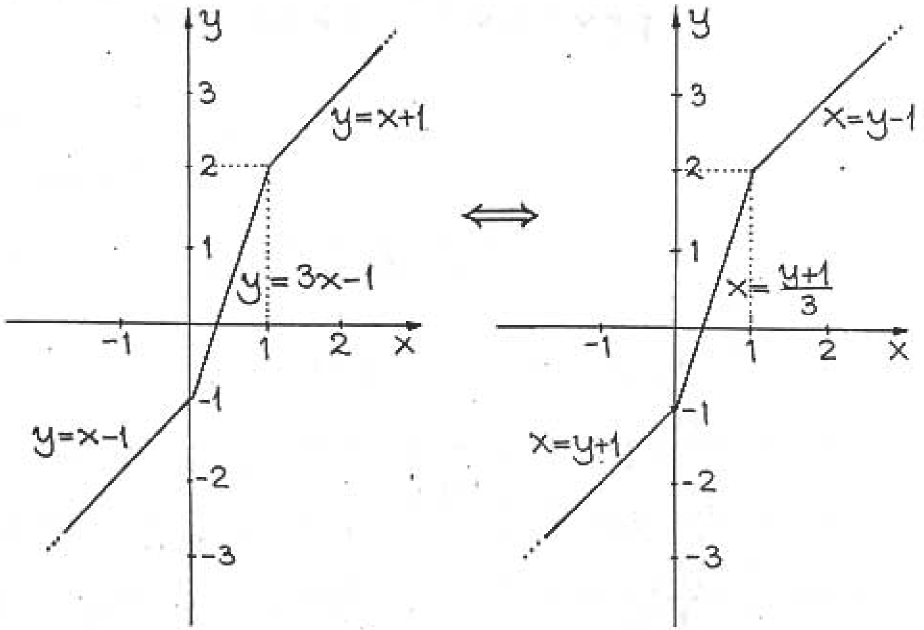
$$(1)\quad x<0 \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ x-1<-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ |x-1| = -(x-1) \end{cases} \Rightarrow |x|-|x-1| = -1;$$

$$(2)\quad 0 \leq x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = x \\ |x-1| = -(x-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x|-|x-1| = 2x-1;$$

$$(3)\quad x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = x \\ |x-1| = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow |x|-|x-1| = 1;$$

$$(4)\quad |x|-|x-1| = \begin{cases} -1 & , x<0 \\ 2x-1, & 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 3x-1, & 0 \leq x < 1 \\ x+1, & x \geq 1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \geq 1 \\ 3x-1 & ; 0 \leq x < 1 \\ x-1 & ; x<0 \end{cases} \qquad f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 2 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}, & -1 \leq x < 2 \\ x+1, & x<-1 \end{cases}.$$

Övning 2.68 (Sid. 121)

Lösning

a) $f(x)=\sqrt{e^{2x}-2}$.

(1) Det som står under rottecknet ska vara ≥ 0.

$e^{2x}-2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq 2 \Leftrightarrow 2x \geq \ln 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}\ln 2$. (*)

f:s definitionsområde är tydligen de x som satisfierar (*), dvs $D_f=[\frac{1}{2}\ln 2, \infty[$.

(2) $e^{2x}-2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0 \Leftrightarrow V_f=[0,\infty[$.

(3) $x_1<x_2 \Leftrightarrow 2x_1<2x_2 \Leftrightarrow e^{2x_1}<e^{2x_2} \Leftrightarrow e^{2x_1}-2 < e^{2x_2}-2 \Leftrightarrow \sqrt{e^{2x_1}-2} < \sqrt{e^{2x_2}-2} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$. (*)

$\Rightarrow f$ injektiv; dvs <u>inverterbar</u>.

$y=\sqrt{e^{2x}-2} \Leftrightarrow e^{2x}-2=y^2 \Leftrightarrow e^{2x}=2+y^2 \Leftrightarrow 2x= =\ln(2+y^2) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln(2+y^2)=f^{-1}(y)$.

f är strängt växande, enl. (*), så $D_{f^{-1}}=V_{f^{-1}}$.

<u>Resultat</u>: $D_f=[\frac{1}{2}\ln 2,\infty[$, $V_f=[0,\infty[$.

$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln(2+x^2)$, $x \geq 0$.

b) $f(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$

(1) $D_{\ln}=]0,\infty[$, s.a. $1+x>0 \wedge 1-x>0 \Leftrightarrow -1<x<1$.

(2) $-1<x<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow f(x)= =\ln(1+x)+\ln(1-x)=\ln(1+x)(1-x)=\ln(1-x^2)$ antar alla reella värden; $-\infty<y<\infty$ alltså.

(3) $f(x)=\ln(1-x^2) \Rightarrow f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=\ln\frac{3}{4} \Rightarrow f(x)$ ej injektiv/inverterbar.

<u>Resultat</u>: $D_f=]-1,1[$, $V_f=\mathbb{R}$; invers saknas.

Övning 2.69 (Sid. 121)

Lösning

$f(u)=\ln(u+1)$, $g(v)=e^{v+1}$

$f(g(x))=\ln(g(x)+1)=\ln(e^{x+1}+1)$.

$g(f(x))=e^{f(x)+1}=e^{\ln(x+1)+1}=e^{\ln(x+1)}\cdot e=e(x+1)$.

Övning 2.70 (Sid. 121)

Lösning

a) $\ln x+\ln(x-2)=1$

$D_{\ln}=\mathbb{R}_+$, så att $x>0$ och $x-2>0$, dvs $x>2$. (*)

$\ln x(x-2)=1 \Leftrightarrow x(x-2)=e \Leftrightarrow x^2-2x+1=e+1 \Leftrightarrow$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} x=1+\sqrt{e+1}$. ($x=1-\sqrt{e+1}<2$, så det förkastas).

b) $\underline{4^x - 2^{x+1} = 3.}$

$4^x = (4)^x = (2^2)^x = 2^{2x} = 2^{x\cdot 2} = (2^x)^2; \quad t = 2^x \,;\, (*)$

$(2^x)^2 - 2\cdot 2^x - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 2^x = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln 2^x = \ln 3 \Leftrightarrow x\ln 2 = \ln 3 \Leftrightarrow \underline{x = \frac{\ln 3}{\ln 2}}.$

c) $\underline{3 + 2e^x - e^{2x} > 0}$

$3 + 2e^x - (e^x)^2 > 0 \Leftrightarrow (t = e^x) \Leftrightarrow 3 + 2t - t^2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 < 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-3) < 0 \overset{!}{\Leftrightarrow} 0 < t < 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x < 3 \Leftrightarrow \underline{x < \ln 3}.$

Anm. I $\overset{!}{\Leftrightarrow}$ underförstås att $-1<t<3,\ t>0$.

d) $\underline{\ln(x-1) + \ln(x+1) \leq \ln x}$

$D_{\ln} = \mathbb{R}_+ \Rightarrow x-1>0 \wedge x+1>0 \wedge x>0 \Rightarrow \underline{x>1}\ (*)$

$\ln(x+1)(x-1) \leq \ln x \Leftrightarrow \ln(x^2-1) \leq \ln x \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq x$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \overset{(*)}{\Rightarrow} \underline{1 < x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$

Att memorera: $\alpha < \beta$ & $(x-\alpha)(x-\beta) < 0 \Rightarrow \alpha < x < \beta$.

Övning 2.71 (Sid. 121)

Lösning

$3^{11/15} = 3^{11\cdot 19/15\cdot 19} = 3^{209/281} \quad (1)$

$9^{7/19} = (3^2)^{7/19} = 3^{14/19} = 3^{14\cdot 15/19\cdot 15} = 3^{210/281}; \quad (2)$

Resultat: $3^{11/15} < 9^{7/19}$.

Övning 2.72 (Sid. 121)

Lösning

$a^{\ln b} = (e^{\ln a})^{\ln b} = e^{(\ln a)\ln b} = e^{(\ln b)\ln a} =$

$= (e^{\ln b})^{\ln a} = b^{\ln a}.$

Övning 2.73 (Sid. 121)

Lösning

a) $\frac{\pi}{2} < v < \pi \Rightarrow \cos v < 0 \wedge \sin v > 0.$

$\cos v = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sin v = \sqrt{1-\cos^2 v} = \sqrt{1-4/9} = \sqrt{5}/3$

$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\sqrt{5}/3}{-2/3} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$

b) $\pi < v < 2\pi \wedge \tan v = 3 \Rightarrow \pi < v < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos v < 0 \\ \sin v < 0 \end{cases};$

$\tan v = 3 \Leftrightarrow \tan^2 v + 1 = 10 = \frac{1}{\cos^2 v} \Leftrightarrow \cos^2 v = \frac{1}{10} =$

$= 1 - \sin^2 v \Leftrightarrow \cos^2 v = \frac{1}{10} \wedge \sin^2 v = \frac{9}{10} \Rightarrow \underline{\cos v = -\frac{1}{\sqrt{10}}}$

$\wedge\ \underline{\sin v = -\frac{3}{\sqrt{10}}}.$

Anm. $\tan v > 0$ för $0 < v < \frac{\pi}{2}$ och $\pi < v < \frac{3\pi}{2}$.

Övning 2.74 (Sid. 121)

Lösning

a) $\tan 2x = \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\cos x(1-\sin x)} = \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)}$

$= \frac{\cos^2 x}{\cos x(1-\sin x)} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x}{1-2\sin^2 x} - \frac{\cos x}{1-\sin x} = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(\frac{2\sin x}{1-2\sin^2 x} -\right.$

$\left.-\frac{1}{1-\sin x}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos x \vee \frac{2\sin x}{1-2\sin^2 x} - \frac{1}{1-\sin x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \frac{2\sin x(1-\sin x)-(1-2\sin^2 x)}{(1-2\sin^2 x)(1-\sin x)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \frac{2\sin x - 1}{(1-2\sin^2 x)(1-\sin x)} = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$

$\vee\ 2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + m2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + l \cdot 2\pi;\ l, m, n \in \mathbb{Z}.$

b) $\underline{2\cos^3 x + \sin x = 2\cos x}$

$2\cos x - 2\cos^3 x = \sin x \Leftrightarrow 2\cos x(1-\cos^2 x) = \sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos x \cdot \sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(\sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \underline{x = m\pi} \vee \underline{x = \frac{\pi}{2} + n2\pi}.$

c) $\underline{\sin(x-\pi/6) + \cos(x+\pi/4) = 0.}$

$\cos(x+\frac{\pi}{4}) = -\sin(x-\frac{\pi}{6}) = \sin(-x+\frac{\pi}{6}) = \cos(-x+\frac{2\pi}{3}) =$

$= \cos(x-\frac{2\pi}{3}) \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4} = -(x-\frac{2\pi}{3}) + n \cdot 2\pi = -x + \frac{2\pi}{3} + n2\pi$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{12} + n2\pi \Leftrightarrow \underline{x = \frac{5\pi}{24} + n\pi, n \in \mathbb{Z}}.$

Övning 2.75 (Sid. 121)

Lösning (Se Ö. 2.38)

$$\underline{u+v+w=\pi}$$

$\tan u + \tan v + \tan w = (\tan u + \tan v) + \tan w =$

$\overset{!}{=} \tan(u+v)(1-\tan u\tan v) + \tan w =$

$= \tan(\pi - w)(1-\tan u\tan v) + \tan w =$

$= \tan(-w)(1-\tan u\tan v) + \tan w =$

$= -\tan w(1-\tan u\tan v) + \tan w =$

$= -\tan w + \tan u\tan v\tan w + \tan w =$

$= \tan u\tan v\tan w.$

Övning 2.76 (Sid. 121)

Lösning

a) $\underline{\sin^4 x} = (\sin x)^4 = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^4}{(2i)^4} =$

$= \frac{1}{16}((e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3(-e^{-ix}) + 6(e^{ix})^2(-e^{-ix})^2 +$

$+ 4(e^{ix})(-e^{-ix})^3 + (-e^{-ix})^4) =$

$$=\frac{1}{16}(e^{4ix}-4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}-4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix})=$$

$$=\frac{1}{16}(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix})=$$

$$=\frac{1}{16}(6-4(e^{2ix}+e^{-2ix})+e^{4ix}+e^{-4ix})=$$

$$=\frac{6}{16}-\frac{1}{2}\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}+\frac{1}{8}\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}=$$

$$=\underline{\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x}.$$

b) $\cos 2x\cdot\sin^3 x=\cos 2x(\sin x)^3=\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\cdot\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3=$

$$=\frac{-1}{16i}(e^{2ix}+e^{-2ix})((e^{ix})^3-3(e^{ix})^2+3e^{ix}(e^{-ix})^2-(e^{-ix})^3)=$$

$$=\frac{i}{16}(e^{2ix}+e^{-2ix})(e^{3ix}-3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}-e^{-3ix})=$$

$$=\frac{i}{16}(e^{2ix}+e^{-2ix})(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix})=$$

$$=\frac{i}{16}(e^{2ix}\cdot e^{3ix}-3e^{2ix}e^{ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+e^{2ix}\cdot e^{-3ix}+$$

$$+e^{-2ix}\cdot e^{3ix}-3e^{-2ix}e^{ix}+3e^{-2ix}e^{-ix}-e^{-2ix}e^{-3ix})=$$

$$=\frac{i}{16}(e^{5ix}-3e^{3ix}+3e^{ix}+e^{-ix}+e^{ix}-3e^{-ix}+3e^{-3ix}-e^{-5ix})$$

$$=\frac{-1}{16i}(e^{5ix}-e^{-5ix}-3(e^{3ix}-e^{-3ix})+4(e^{ix}-e^{-ix}))=$$

$$=-\frac{1}{8}\left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i}-3\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}+4\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)=$$

$$=-\frac{1}{8}(\sin 5x-3\sin 3x+4\sin x)=$$

$$=\frac{3}{8}\sin 3x-\frac{1}{8}\sin 5x-\frac{1}{2}\sin x.$$

Övning 2.77 (Sid. 121)

Lösning

$3\cos x+2\sin x=C\sin x\cos v+C\cos x\sin v=C\sin(x+v)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}C\cos v=2\\ C\sin v=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C^2=13\\ C\cos v=2\\ C\sin v=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=\sqrt{13}\\ \frac{C\sin v}{C\cos v}=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}C=\sqrt{13}\\ \tan v=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=\sqrt{13}\\ v=\arctan\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow 3\cos x+2\sin x=$$

$$=\sqrt{13}\sin(x+\arctan\tfrac{3}{2});$$

$$3\cos x+2\sin x=1\Leftrightarrow\sqrt{13}\sin(x+\arctan\tfrac{3}{2})=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin(x+\mathrm{atn}\tfrac{3}{2})=\frac{1}{\sqrt{13}}\Leftrightarrow x+\mathrm{atn}\tfrac{3}{2}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{13}}+m2\pi$$

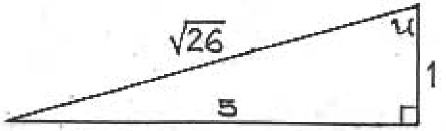
$$\vee\ x+\mathrm{atn}\tfrac{3}{2}=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{13}}+n\cdot 2\pi\Leftrightarrow \underline{x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{13}}-}$$

$$\underline{-\arctan\tfrac{3}{2}+m2\pi}\ \vee\ \underline{x=-\arctan\tfrac{3}{2}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{13}}+(2n+1)\pi}.$$

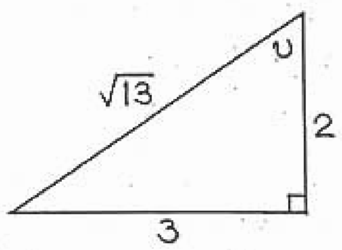
Övning 2.78 (Sid. 122)

Lösning

a)



$$u=\arctan 5=\arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{26}};$$



$v=\arctan\frac{3}{2}=\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}=\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}.$

$$\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v=\frac{5}{\sqrt{26}}\frac{2}{\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{26}}\frac{3}{\sqrt{13}}=$$
$$=\frac{10}{13\sqrt{2}}+\frac{3}{13\sqrt{2}}=\frac{13}{13\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) $$\begin{cases} 1<5 \Rightarrow \arctan 1<\arctan 5<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}<\text{atn}5<\frac{\pi}{2} \\ 1<\frac{3}{2} \Rightarrow \arctan 1<\arctan\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}<\text{atn}\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}<u+v<\pi \qquad (*)$$

$$\sin(u+v)=\frac{1}{\sqrt{2}} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} u+v=\arctan 5+\arctan\frac{3}{2}=\underline{\frac{3\pi}{4}}.$$

Övning 2.79 (Sid. 122)

Lösning

a) $\underline{\arcsin 2x=\arccos 3x}$

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ D_{\arccos}=D_{\arcsin}=[-1,1] \Rightarrow -1\leq 2x\leq 1 \wedge -1\leq 3x\leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2} \wedge -\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{3}; \\ (2)\ V_{\arccos}=[0,\pi] \Rightarrow \arcsin 2x\geq 0 \Rightarrow x\geq 0 \end{array}\right\} \overset{!}{\Rightarrow} \underline{0\leq x\leq\frac{1}{3}}.$$

(3) $u=\arccos 3x \Leftrightarrow \cos u=3x \Leftrightarrow \sin u=\sqrt{1-9x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u=\arccos 3x=\arcsin\sqrt{1-9x^2}$;

(4) $\arcsin 2x=\arccos 3x=\arcsin\sqrt{1-9x^2} \Leftrightarrow 2x=$

$=\sqrt{1-9x^2} \Leftrightarrow 4x^2=1-9x^2 \Leftrightarrow 13x^2=1 \overset{!}{\Leftrightarrow} \underline{x=\frac{1}{\sqrt{13}}}.$

b) $\underline{2\arccos x=\arcsin 2x}$

$$\left.\begin{array}{l} D_{\arcsin}=D_{\arccos}=[-1,1] \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \wedge -1\leq 2x\leq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \wedge -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2} \\ V_{\arccos}=[0,\pi] \Rightarrow \arcsin 2x\geq 0 \Rightarrow x\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{0\leq x\leq\frac{1}{2}};\ (*)$$

$\arcsin 2x=2\arccos x \Leftrightarrow 2x=\sin(2\arccos x)=$

$=2\sin(\arccos x)\cdot\cos(\arccos x)=2x\cdot\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1=\sqrt{1-x^2} \vee 2x=0 \Leftrightarrow x=0$, ingen rot dock.

Ekvationen saknar rötter (lösningar).

Övning 2.80 (Sid. 122)

Lösning

a) $\underline{f(x)=\sin(\arccos x)}$

$D_f=D_{\arccos}=[-1,1]$;

$-1\leq x\leq 1 \Rightarrow 0\leq\arccos x\leq\pi \Rightarrow 0\leq\sin(\arccos x)\leq 1$

$\Rightarrow V_f=[0,1]$;

$\forall a \in [-1,1]: \; f(-a) = \sin(\arccos(-a)) = \sin(\pi - \arccos a) =$

$= \sin(\arccos a) = f(a)$

f är inte injektiv, så den saknar invers.

b) $f(x) = \sqrt{\arctan(x-1)}$.

Det som står under rottecknet ska vara $\geqslant 0$; $\arctan(x-1) \geqslant 0$; arctan är strängt växande, varför $x-1 \geqslant 0$, dvs $x \geqslant 1$. $\therefore$ $D_f = [1, \infty[$.

$x \geqslant 1 \Leftrightarrow x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant \arctan(x-1) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant f(x) < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$;

$\therefore$ $V_f = [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}[$.

f är en sammansättning av tre strängt växande funktioner, nämligen

$x \mapsto x-1, \; x \mapsto \arctan x, \; x \mapsto \sqrt{x}$.

f är alltså strängt växande själv, dvs är inverterbar.

$y = \sqrt{\arctan(x-1)} \Leftrightarrow \arctan(x-1) = y^2 \Leftrightarrow x-1 =$
$= \tan y^2 \Leftrightarrow x = 1 + \tan y^2 = f^{-1}(y), \; 0 \leqslant y < \sqrt{\pi/2}$.

Resultat: a) $D_f = [-1,1]$, $V_f = [0,1]$; f^{-1} existerar inte; b) $D_f = [1, \infty[$, $V_f = [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$; $f^{-1}(y) = 1 + \tan y^2$.

Övning 2.81 (Sid. 122)

Lösning

a) $e^{i\pi/4} + 2e^{i\pi/2} + e^{i3\pi/4} = e^{i\pi/4} + e^{i3\pi/4} + 2e^{i\pi/2} =$
$= e^{i\pi/2}(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}) + 2e^{i\pi/2} = 2e^{i\pi/2}\cos\frac{\pi}{4} + 2e^{i\pi/2} =$
$= \sqrt{2}e^{i\pi/2} + 2e^{i\pi/2} = (2+\sqrt{2})e^{i\pi/2} = (2+\sqrt{2})i.$

Anm. $e^{i\pi/4} + 2e^{i\pi/2} + e^{i3\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} +$
$+ 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) + \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i + 2(0+i) -$
$- \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{2}{\sqrt{2}}i + 2i = \sqrt{2}i + 2i = (2+\sqrt{2})i.$

b) $\sum_{k=1}^{12} e^{k\pi i/6} = \sum_{k=1}^{12} (e^{i\pi/6})^k = e^{i\pi/6} \frac{(e^{i\pi/6})^{12} - 1}{e^{i\pi/6} - 1} = 0$, ty
$(e^{i\pi/6})^{12} = e^{2\pi i} = 1$.

Övning 2.82 (Sid. 122)

Lösning

a) $e^z = 1 = e^{i2k\pi} \Leftrightarrow z = 2k\pi i, \; k \in \mathbb{Z}$.

Annan lösning

$z = x + iy \Rightarrow e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e^x \cos y = 1 \wedge e^x \sin y = 0 \Leftrightarrow e^x \cos y = 1 \wedge$
$\wedge \sin y = 0 \Leftrightarrow e^x \cos y = 1 \wedge y = n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x}\cos n\pi = 1 \wedge y = n\pi \Leftrightarrow (-1)^{n}\cdot e^{x} = 1 \wedge y = n\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \wedge (-1)^{n} = 1 \wedge y = n\pi \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 2k\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{z = 2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}.}$

b) $e^{2z} = i = e^{i\pi/2} \Leftrightarrow 2z = i\frac{\pi}{2} + i2k\pi \Leftrightarrow \underline{z = \frac{4k+1}{4}\pi i,\ k\in\mathbb{Z}}.$

c) $e^{iz} = -2 = 2e^{i\pi} = e^{\ln 2 + i\pi} \Leftrightarrow iz = \ln 2 + i\pi + 2k\pi i =$

$= \ln 2 + i(2k+1)\pi \Leftrightarrow \underline{z = (2k+1)\pi - i\ln 2,\ k\in\mathbb{Z}.}$

Övning 2.83 (Sid. 122)

Lösning

a) $\cosh^{2}x - \sinh^{2}x = (\cosh x - \sinh x)(\cosh x + \sinh x) =$

$= \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} - \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} + \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = e^{-x}\cdot e^{x} = 1.$

Detta går under namnet 'den hyperboliska ettan'.

b) $\cosh(x+y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-(x+y)}) = \frac{1}{2}(e^{x}e^{y} + e^{-x}e^{-y}) =$

$= \frac{1}{2}((\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y) +$

$+ (\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y)) =$

$= \frac{1}{2}(\cosh x\cosh y + \cosh x\sinh y + \cosh y\sinh x +$

$+ \sinh x\sinh y + \cosh x\cosh y - \cosh x\sin y - \cosh y\sinh x +$

$+ \sinh x\sinh y) = \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y.$

$\sinh(x+y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)}) = \frac{1}{2}(e^{x}e^{y} - e^{-x}e^{-y}) =$

$= \frac{1}{2}((\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y) -$

$-(\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y)) =$

$= \frac{1}{2}(\cosh x\cosh y + \cosh x\sinh y + \sinh x\cosh y +$

$+ \sinh x\sinh y - \cosh x\cosh y + \cosh x\sinh y +$

$+ \sinh x\cosh y - \sinh x\sinh y) = \frac{1}{2}(2\sinh x\cosh y +$

$+ 2\sinh x\cosh y) = \underline{\sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y}.$

Övning 2.84 (Sid. 122)

Lösning

(1) $x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1} < e^{x_2} \\ \frac{1}{e^{x_2}} < \frac{1}{e^{x_1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_1} < e^{x_2} \\ -e^{-x_1} < -e^{-x_2} \end{cases} \Rightarrow e^{x_1} - e^{-x_1} <$

$< e^{x_2} - e^{-x_2} \Leftrightarrow \sinh x_1 < \sinh x_2 \Rightarrow f$ strängt växande $\Rightarrow f$ inverterbar.

$y = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{x}) \Leftrightarrow 2y = e^{x} - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 1) \Leftrightarrow e^{2x} - 1 =$

$= 2ye^{x} \Leftrightarrow (e^{x})^{2} - 2ye^{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x} = y + \sqrt{y^{2}+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^{2}+1}) = f^{-1}(y);\quad \underline{f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^{2}+1}).}$

(2) $\forall a \in \mathbb{R}:\ \cosh(-a) = \frac{1}{2}(e^{-a} + e^{-(-a)}) = \frac{1}{2}(e^{a} + e^{-a}) = \cosh a$

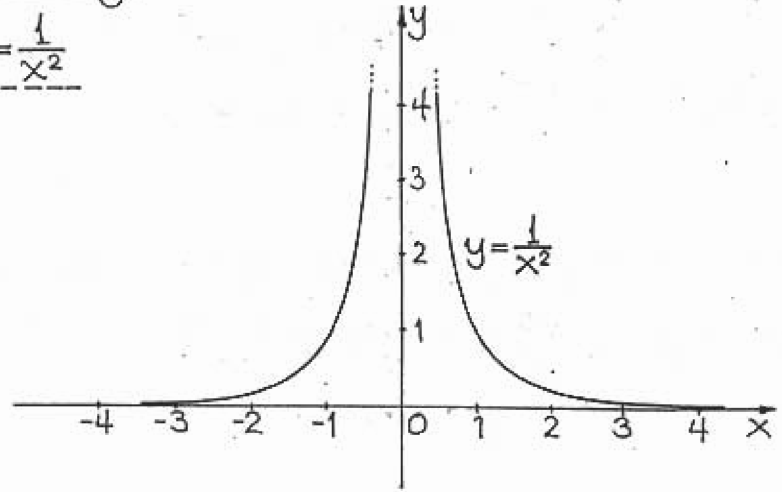
$\Rightarrow \cosh$ ej injektiv, dvs ej inverterbar.

3. Gränsvärden och kontinuitet

Testövning 3.1 (Sid. 127)

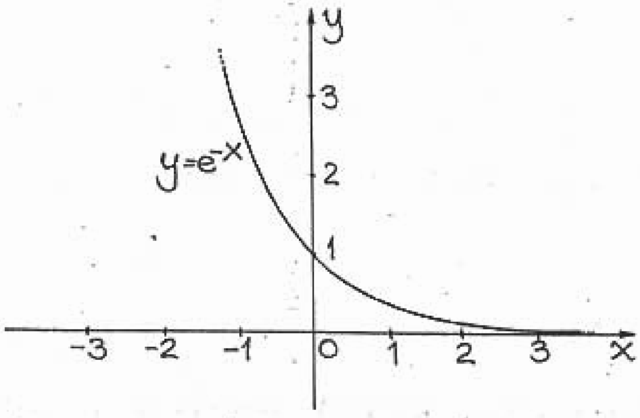
Lösning

a) $y=\frac{1}{x^2}$



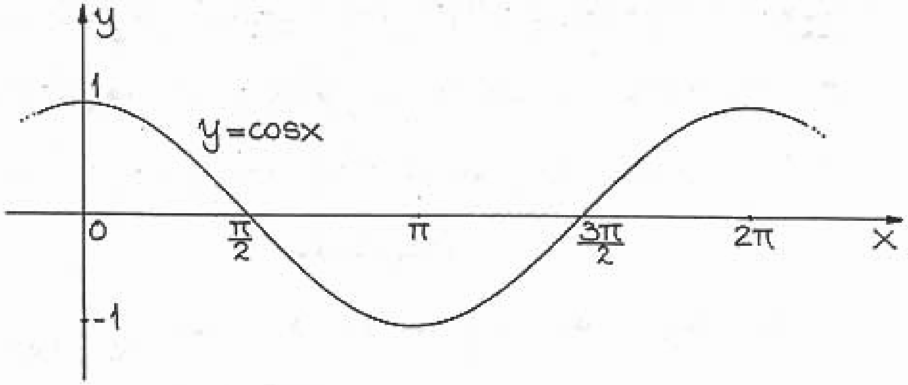
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

b) $y=e^{-x}$



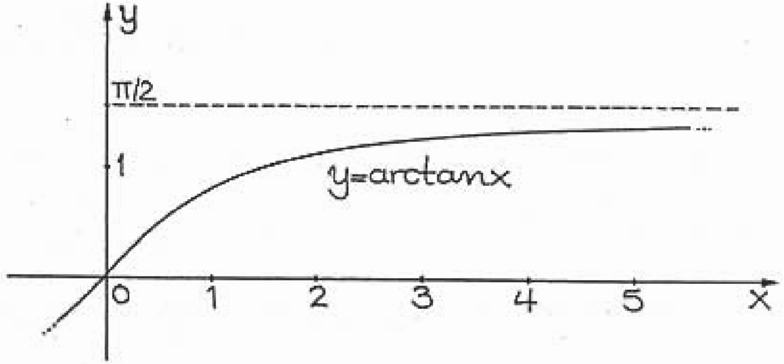
$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}=0.$$

c) $y=\cos x$



$\lim_{x\to\infty}\cos x$ existerar inte (grafen är oscillatorisk).

d) $y=\arctan x$



$$\lim_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

Övning 3.2 (Sid. 128)

Lösning

a) $\lim_{x\to0}\frac{4x^3+5x^2-7x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}(4x^2+5x-7)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to0}(4x^2+5x-7)=-7.$

b) För stora x är $\frac{x+2}{x^3+x} \approx \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \approx 0.$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^3+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(1+2/x)}{x^3(1+1/x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1+2/x}{1+1/x^2} = 0\cdot 1 = \underline{\underline{0}}.$$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\cos x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{\cos x}{x}\right) = 2+0 = \underline{\underline{2}}.$

Anm. $\left|\frac{\cos x}{x}\right| = \frac{|\cos x|}{x} \le \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x} = 0.$

d) $(1+x)^4-(1-x)^4 = ((1+x)^2-(1-x)^2)((1+x)^2+(1-x)^2) =$

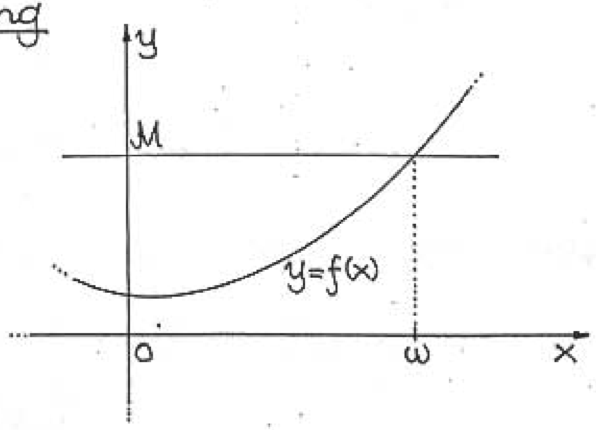
$= (1+x-(1-x))(1+x+1-x)(1+x^2+2x+1-2x+x^2) =$

$= 2x\cdot 2\cdot 2(1+x^2) = 8x(1+x^2) \Leftrightarrow \frac{(1+x)^4-(1-x)^4}{x} = 8(1+x^2);$

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^4-(1-x)^4}{x} = \lim_{x\to 0} 8(1+x^2) = \underline{\underline{8}}.$

Övning 3.3 (Sid. 131)

Lösning



$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M>0\,\exists\omega>0:\ x>\omega \Rightarrow f(x)>M.$

$\forall M>0\,\exists\omega>0$: utläses: "För varje positivt M existerar positivt ω så att".

Övning 3.4 (Sid. 131)

Lösning

$\left|\frac{1}{x-3}-0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \exists x>3: \frac{1}{x-3} < \varepsilon \Leftrightarrow x-3 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \underline{x>3+\frac{1}{\varepsilon}=\omega}.$

Resultat: $x>3+\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{x-3} < \varepsilon$

Övning 3.5 (Sid. 131)

Lösning

$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) = (x-1)(3+3(x-1)+(x-1)^2)$

$|x^3-1| = |x-1|\cdot|3+3(x-1)+(x-1)^2| \le |x-1|\cdot(3+3|x-1|+(x-1)^2);$

Låt $\varepsilon>0$ vara givet.

Tag $|x-1|<1$. Detta är alltid möjligt, så att

$$|x^3-1| \le |x-1|(3+3+1) = 7|x-1|.$$

Således gäller att om $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$, så fås att

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow |x^3-1|<\varepsilon.$$

ε kan tas godtyckligt litet, så att $\lim_{x\to 1} x^3 = 1.$

Anm. $t=x-1 \Leftrightarrow x=1+t \Rightarrow \underline{x^2+x+1} = (t+1)^2+(t+1)+1 =$

$= t^2+2t+1+t+1 = 3+3t+t^2 = \underline{3+3(x-1)+(x-1)^2}.$

Övning 3.6 (Sid. 131)

Lösning

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists\eta<0:\ x<\eta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$

Läs även författarnas lösningsförslag.

Testövning 3.7 (Sid. 135)

Lösning

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}(x+2)=\underline{3}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x-3}e^{-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x}(1+1/x)}{\cancel{x}(2-3/x)}e^{-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{3}{x}}\cdot e^{-2x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+1/x}{2-3/x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}e^{-2x}=\dfrac{1}{2}\cdot0=\underline{0}.$

c) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}\right)=(\infty+\infty)=\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}+\dfrac{2}{x^2-1}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-1+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{-1-1}=\underline{-\dfrac{1}{2}}.$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln 4x}{\ln x^4}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln4+\ln x}{4\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln4}{4\ln x}+\dfrac{1}{4}\right)=\underline{\dfrac{1}{4}}.$

Testövning 3.8 (Sid. 135)

Lösning

$\arctan x\leq f(x)\leq\arctan 2x\,;$

Jag kommer att använda Sats 3.3 (Sid 133).

a) $\dfrac{\pi}{2}\xleftarrow[x\to\infty]{}\arctan x\leq f(x)\leq\arctan 2x\xrightarrow[x\to\infty]{}\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\underline{\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{\pi}{2}}.$

b) $0\xleftarrow[x\to0]{}\arctan x\leq f(x)\leq\arctan 2x\xrightarrow[x\to0]{}0\Rightarrow$

$\Rightarrow\underline{\lim\limits_{x\to0}f(x)=0}.$

Testövning 3.9 (Sid. 135)

Lösning

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})=[t=-x;\ x\to-\infty\Rightarrow t\to+\infty]=$

$=\lim\limits_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t}-\sqrt{t^2+1})=[u=\tfrac{1}{t};\ t\to\infty\Rightarrow u\to0^+]=$

$=\lim\limits_{u\to0^+}\left(\sqrt{\dfrac{1}{u^2}-\dfrac{1}{u}}-\sqrt{\dfrac{1}{u^2}+1}\right)=\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\sqrt{1-u}-\sqrt{1+u^2}}{u}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$=\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{(\sqrt{1-u}-\sqrt{1+u^2})(\sqrt{1-u}+\sqrt{1+u^2})}{u(\sqrt{1-u}+\sqrt{1+u^2})}=\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{1-u-1-u^2}{u(\sqrt{1-u}+\sqrt{1+u^2})}=$

$=\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{-u(1+u)}{u(\sqrt{1-u}+\sqrt{1+u^2})}=\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{-(1+u)}{\sqrt{1-u}+\sqrt{1+u^2}}=\dfrac{-1}{1+1}=\underline{-\dfrac{1}{2}}.$

Övning 3.10 (Sid. 135)

Lösning

a) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-x-20}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\cancel{(x-5)}(x+4)}{\cancel{x-5}}=\lim\limits_{x\to5}(x+4)=5+4=\underline{9}.$

b) $x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2);$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\cancel{(x-1)}(x-2)}{-\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-2)}{-(x+1)}=\underline{\dfrac{1}{2}}.$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^3+x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=\frac{1+1+1+1}{1+1+1}=\underline{\frac{4}{3}}.$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\underline{\frac{1}{2}}.$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+5x-1}}{3x-7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}(3-\frac{7}{x})}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{7}{x}}=\underline{\frac{1}{3}}.$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}=[t=-x;\ x\to-\infty\Rightarrow t\to\infty]=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{3t^2+1}}=$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-2t}{t\sqrt{3+1/t^2}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{3+1/t^2}}=\underline{-\frac{2}{\sqrt{3}}}.$

Övning 3.11 (Sid. 136)

Lösning

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+1/x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1}=\underline{\frac{1}{2}}.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{-x(\sqrt{1+1/x}-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+1/x}-1}=$

$=-\frac{1}{1^+-1}=-\frac{1}{0^+}=-\infty.$

Anm $x<0\Rightarrow\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x^2(1+1/x)}=\sqrt{x^2}\sqrt{1+1/x}=$

$=|x|\sqrt{1+1/x}=-x\sqrt{1+1/x}.$

Övning 3.12 (Sid. 136)

Lösning (3.12)

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+x^3)}{\ln(x^2+x^4)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3(1+1/x^2))}{\ln(x^4(1+1/x^2))}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x^3+\ln(1+1/x^2)}{\ln x^4+\ln(1+1/x^2)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\ln x+\ln(1+1/x^2)}{4\ln x+\ln(1+1/x^2)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{(\ln x)}(3+(\ln(1+1/x^2))/\ln x}{\cancel{(\ln x)}(4+(\ln(1+1/x^2))/\ln x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+(\ln(1+1/x^2))/\ln x}{4+(\ln(1+1/x^2))/\ln x}=\frac{3}{4}$

Anm. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x^2)}{\ln x}\overset{!}{=}\frac{\ln(1+0)}{\infty}=\frac{\ln 1}{\infty}=0.$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+x^3)}{\ln(x^2+x^4)}=\left[x=\frac{1}{t};\ x\to 0^+\Leftrightarrow t\to+\infty\right]=$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\ln(t^{-1}(1+t^{-2}))}{\ln(t^{-2}(1+t^{-2}))}=$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\ln t^{-1}+\ln(1+t^{-2})}{\ln t^{-2}+\ln(1+t^{-2})}=$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-\ln t+\ln(1+t^{-2})}{-2\ln t+\ln(1+t^{-2})}=$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\cancel{(-\ln t)}(1-(\ln(1+t^{-2}))/\ln t)}{\cancel{(-\ln t)}(2-(\ln(1+t^{-2}))/\ln t}=$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1-(\ln(1+t^{-2}))/\ln t}{2-(\ln(1+t^{-2}))/\ln t}=\frac{1}{2}.$

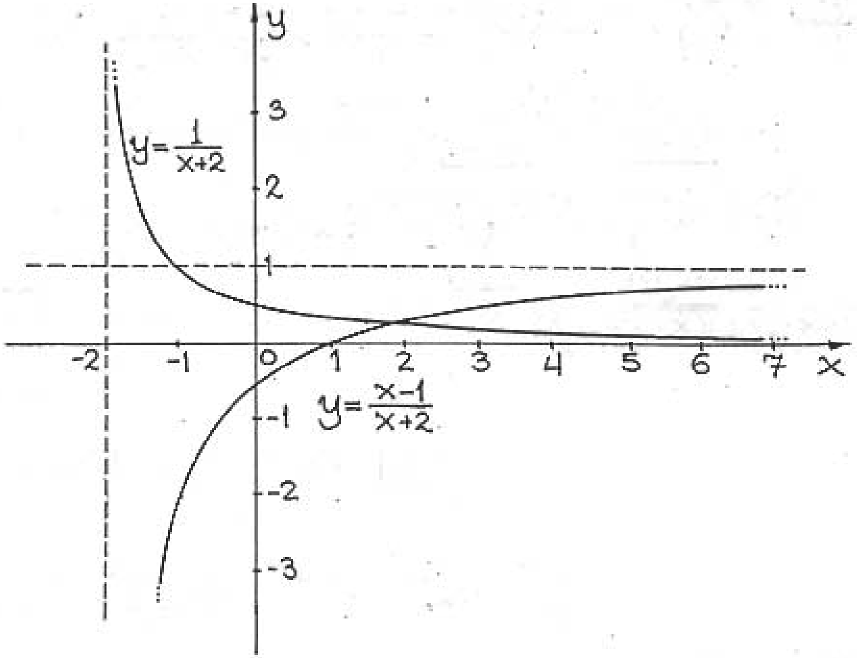
Anm. För stora x är $x+x^3\approx x^3$ och $x^2+x^4\approx x^4$; för små x är $x+x^3\approx x$ och $x^2+x^4\approx x^2$.

Övning 3.13 (Sid. 136)

Lösning

a) $f(x)=\frac{1}{x+2}$;

$$g(x)=\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+2-3}{x+2}=1-\frac{3}{x+2}$$



b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+2}=\underline{\underline{0}}$; $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x+2}=\underline{\underline{1}}$.

c) Man kan inte säga något om $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$;

Sats 3.3 kan inte åberopas i detta fall.

Testövning 3.14 (Sid. 136)

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

b) $g(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}=\frac{x+1}{x(x-2)}$.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
sgn(x+1)		−	0	+	¦	+	¦	+	
sgn(x)		−	−	−	¦	+	¦	+	
sgn(x−2)		−	−	−	¦	−	¦	+	
sgn(g(x))	0^-	−	0	+ $+\infty$	¦	$-\infty$ − $-\infty$	¦	$+\infty$ +	0^+

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\infty$ och $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-\infty$ (Se schemat.)

Testövning 3.15 (Sid. 137)

Lösning

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x-1}, & x>1\\ \frac{a(x^3-1)}{x^2-1}, & x<1\end{cases}$$

Jag inför $f^+(x)=\arctan\frac{1}{x-1}$ & $f^-(x)=\frac{a(x^3-1)}{x^2-1}$;

(1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f(1+\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f^+(1+\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\arctan\frac{1}{\varepsilon}=$

$=\arctan(\infty)=\frac{\pi}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f^-(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{a(x^3-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{a(x^2+x+1)}{x+1}=$

$=a\cdot\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3a}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow\frac{3a}{2}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{3}$.

Resultat: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{\pi}{2}$ om $a=\pi/3$.

Anm. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f(a+\varepsilon)$; $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f(a-\varepsilon)$.

Övning 3.16 (Sid. 137)

Lösning

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}}=\sqrt{\frac{1+3x}{x^2}}-\sqrt{\frac{1-3x}{x^2}}=\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}}{|x|};$$

(1) $x<0 \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}}{-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x})(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})}{-x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+3x-(1-3x)}{-x(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x})}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{6x}{-x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-6}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}}=\frac{-6}{2}=-3.$$

(2) $x>0 \Rightarrow |x|=x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{6}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}}=\frac{6}{2}=3.$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-3\neq 3=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existerar ej.

Testövning 3.17 (Sid. 144)

Lösning

a) f är kontinuerlig för $x>2$ och $x<2$ för sig.

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+1)=5\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)=3\end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=3\neq 5=\lim_{x\to 2^+} f(x)$$

så f är inte kontinuerlig i $x=2$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3=$

$=f(2) \Rightarrow f$ är kontinuerlig i $x=2$.

Testövning 3.18 (Sid. 144)

Lösning

$x^3-x^2+x-1=(x^2+1)(x-1)$;

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+1}=0;$$

för $a=0$ blir f kontinuerlig.

Övning 3.19 (Sid. 144)

Lösning

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2}=\left[t=\frac{1}{x^2};\ x\to 0 \Rightarrow t=\infty\right]=$

$$=\lim_{t\to\infty} e^{-t}=0.$$

$f(0)=a=0$ gör f kontinuerlig.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2})(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2})}{x(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x+2-(x^2-2x+2)}{x(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\underline{\underline{\sqrt{2}}}.$$

$f(0)=a=\sqrt{2}$ gör f kontinuerlig funktion.

Övning 3.20 (Sid. 144)

Lösning

$$\lim_{x\to n\pi}\frac{\sin 2x}{\sin x}=\lim_{x\to n\pi}\frac{2\cancel{\sin x}\cos x}{\cancel{\sin x}}=\lim_{x\to n\pi}2\cos x=2(-1)^n.$$

$$f(n\pi)=\begin{cases}-2, & n=2k+1\\ 2, & n=2k\end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Testövning 3.21 (Sid. 148)

Lösning

a) $f(x)=\dfrac{x^5-x^2+7}{x^2+1},\ -5\leqslant x\leqslant 5.$

$x^2+1\neq 0$ för alla x, så f är kontinuerlig för $-5\leqslant x\leqslant 5$; intervallet $[-5,5]$ är slutet och begränsat, så f antar sitt största och minsta värde i intervallet. (Sats 3.10).

b) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x+7}-\sqrt{x^2+x},\ x\geqslant 4.$

Intervallet $[4,\infty[$ är inte begränsat; villkoret i sats 3.10 är inte uppfyllt, så det är inte säkert att f antar sina extrema i $[4,\infty[$.

c) $f(x)=e^{-1/x^2}$

Definitionsmängden, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, är inget intervall; det är inte säkert att f antar några extrema.

d) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x}{x-7}, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] \dfrac{x\cos x}{x+1}, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases};$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/2^-}f(x)&=\lim_{x\to\pi/2^-}\frac{x\sin x}{x-7}=\frac{(\pi/2)\sin(\pi/2)}{(\pi/2)-7}=\frac{\pi}{\pi-14}\\ \lim_{x\to\pi/2^+}f(x)&=\lim_{x\to\pi/2^+}\frac{x\cos x}{x+1}=\frac{(\pi/2)\cos(\pi/2)}{(\pi/2)+1}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ är inte kontinuerlig i $[0,\pi]$, så det är inte säkert att f antar sina extrema där.

Testövning 3.22 (Sid. 149)

Lösning

$f(x)=x^3+x+1$

f är kontinuerlig i $[-1,0]$; $f(-1)\cdot f(1)<0$, så f byter tecken i $[-1,0]$; enligt sats 3.9 har f (minst) ett nollställe i $[-1,0]$.

Testövning 3.23 (Sid. 149)

Lösning

a) $\arccos x=\arctan x$

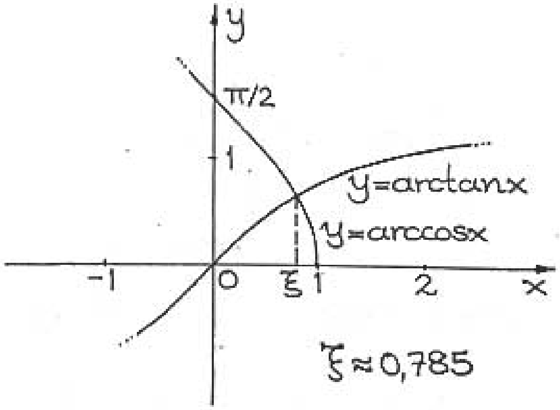
forts.

$f(x)=\arccos x-\arctan x,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$.

f är kontinuerlig, ty summa av kontinuerliga.

$\left.\begin{matrix}f(0)=\frac{\pi}{2}\\ f(1)=-\frac{\pi}{4}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ f byter tecken (minst) en gång i intervallet $[0,1]$. Det innebär att ekvationen har (minst) en lösning. (Studera figuren nedan).

b)



Av figuren framgår att ekvationen har en lösning (rot).

Övning 3.21 (Sid. 149)

Lösning

Satsen säger att f ska vara kontinuerlig i $[a,b]$.

$f(x)=\frac{1}{x}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, är inte kontinuerlig.

Övning 3.25 (Sid. 149)

Lösning

$f(x)=e^{2\sin x}-5\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant\pi/2.$

a) f är kontinuerlig; $f(0)\cdot f(\frac{\pi}{2})=-5<0\Rightarrow f$ växlar tecken i intervallet. Enligt satsen om mellanliggande värden har f minst ett nollställe i $]0,\frac{\pi}{2}[$. Alltså har ekvationen $e^{2\sin x}=5\cos x$ (minst) en rot i intervallet.

b) $\left.\begin{matrix}\phi(x)=e^{2\sin x},\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, \text{ är strängt växande}\\ \psi(x)=5\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, \text{ är strängt avtagande}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\phi$:s och ψ:s grafer har högst en punkt gemensam $\Rightarrow\phi(x)=\psi(x)$ har högst en lösning i intervallet $]0,\frac{\pi}{2}[$.

Övning 3.26 (Sid. 149)

Lösning

Sätt $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, $n=2k+1$.

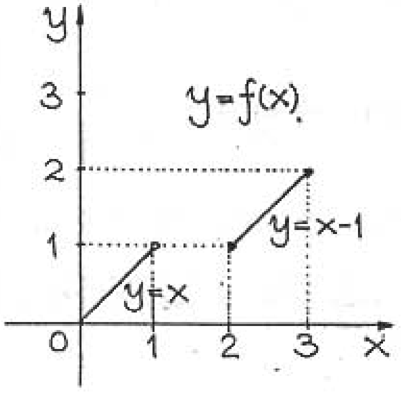
$f(x)=a_0x^n(1+\frac{a_1}{a_0x}+\cdots+\frac{a_0}{a_0x^n})$; det antas att $a_0\neq0$.

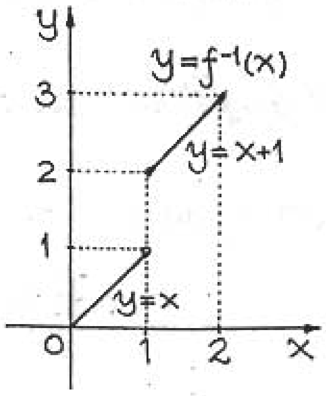
Här går funktionen inom parentesen mot 1, då $|x| \to \infty$, och är alltså säkert positiv då $|x|$ är tillräckligt stort. Faktorn a_0x^n har däremot olika tecken för negativa och positiva x. Härav följer att $f(x)$ har olika tecken för negativa och positiva x, om $|x|$ väljs tillräckligt stort. Enligt satsen om mellanliggande värden måste f anta värdet 0 minst en gång.

Övning 3.27 (Sid. 149)

Lösning

$$f(x)=\begin{cases} x & , 0\leq x<1 \\ x-1, & 2\leq x\leq 3 \end{cases};\quad f^{-1}(x)=\begin{cases} x & , 0\leq x<1 \\ x+1, & 1\leq x\leq 2 \end{cases}.$$





$y=f(x)$ är kontinuerlig i sin definitionsmängd. D_f består av två intervall.

$D_{f^{-1}}=V_f$ och $V_{f^{-1}}=D_f$.

$D_{f^{-1}}=[0,2]$ är ett (kompakt) intervall. Om f^{-1} var kontinuerlig så skulle även $V_{f^{-1}}$ vara det, vilket inte är fallet. Alltså är f^{-1} inte kontinuerlig.

Sats 3.10 kan konsulteras.

Testövning 3.28 (Sid. 155)

Lösning

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(e^x+1)=2.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 4x^2}{x\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 4x^2}{4x^2}\cdot\frac{4x^2}{x\ln(1+3x)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 4x^2}{4x^2}\cdot\frac{4x}{\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 4x^2}{4x^2}\frac{3x}{\ln(1+3x)}\cdot\frac{4}{3}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 4x^2}{4x^2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\right)^{-1}\cdot\frac{4}{3}=\underline{[u=4x^2, v=3x]}=$

$=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\tan u}{u}\cdot\left(\lim\limits_{v\to 0}\frac{\ln(1+v)}{v}\right)^{-1}=1\cdot 1\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}.$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\arctan 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{5x}\cdot\left(\frac{\arctan 3x}{3x}\right)^{-1}\cdot\frac{5}{3}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 5x}{5x}\cdot\left(\lim_{x\to0}\frac{\arctan 3x}{3x}\right)^{-1}\cdot\frac{5}{3}=\begin{bmatrix}u=5x\\ v=3x\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{\arcsin u}{u}\cdot\left(\lim_{v\to0}\frac{\arctan v}{v}\right)^{-1}\cdot\frac{5}{3}=1\cdot1\cdot\frac{5}{3}=\underline{\underline{\frac{5}{3}}}.$$

d) $$\lim_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot x\ln x\overset{!}{=}(a)+f))=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}x\cdot\ln x=1\cdot0=\underline{\underline{0}}.$$

e) $$\lim_{x\to0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot(-2)=$$

$$=\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot(-2)=1\cdot(-2)=\underline{\underline{-2}}.$$

f) $$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{x-\pi/2}=\left[t=x-\frac{\pi}{2};\ x\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow t\to0\right]=\lim_{t\to0}\frac{\cos(t+\pi/2)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot(-1)=1\cdot(-1)=\underline{\underline{-1}}.$$

Övning 3.29 (Sid. 156)

Lösning

a) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x+2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x(1+2x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{1+2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{5}{1+2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot5=[t=5x]=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot5=1\cdot5=\underline{\underline{5}}.$$

b) $$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{x}=\left[t=\sin 3x\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\arcsin t\right]=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{\frac{1}{3}\arcsin t}=\lim_{t\to0}3\cdot\frac{e^t-1}{t}\left(\frac{\arcsin t}{t}\right)^{-1}=3\cdot1\cdot1=\underline{\underline{3}}.$$

c) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x^3}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot\frac{x^3}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-3}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)^{-3}=\lim_{x^3\to0}\frac{\sin x^3}{x^3}=[t=x^3]=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=\underline{\underline{1}}.$$

d) $$\lim_{x\to0}(1+3x^2)^{1/x}=\lim_{x\to0}\exp\{\ln(1+3x^2)^{1/x}\}=$$

$$=\lim_{x\to0}\exp\{\tfrac{1}{x}\ln(1+3x^2)\}=\exp\{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x^2)}{x}\}=$$

$$=\exp\{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x^2)}{3x^2}\cdot3x\}=e^{1\cdot0}=1.$$

Anm. $\lim_{x\to a}f(g(x))=f(\lim_{x\to a}g(x))$;

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x^2)}{3x^2}=\lim_{3x^2\to0}\frac{\ln(1+3x^2)}{3x^2}=1.$$

$$\exp\{\phi(x)\}=e^{\phi(x)}.$$

e) $$\lim_{x\to0}\frac{2x}{\arctan 7x}=\left[t=7x\Leftrightarrow x=\frac{1}{7}t\right]=\lim_{t\to0}\frac{2t/7}{\arctan t}=$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\arctan t}{t}\right)^{-1}\cdot\frac{2}{7}=1\cdot\frac{2}{7}=\underline{\underline{\frac{2}{7}}}.$$

f) För små $|x|$ gäller $\sin x\approx\tan x\approx x$, så att

$$\frac{e^{x\cdot\sin 2x}-1}{\tan^2 x}\approx\frac{e^{x\cdot2x}-1}{x^2}=\frac{e^{2x^2}-1}{x^2}=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot(e^{x^2}+1)\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x\sin 2x}-1}{\tan^2 x}=\lim_{x^2\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot(e^{x^2}+1)=1\cdot2=\underline{\underline{2}}.$$

Om $\lim_{x\to0}\phi(x)=0$, så är $\lim_{x\to0}f(\phi(x))=\lim_{\phi(x)\to0}f(\phi(x))$.

Övning 3.30 (Sid. 156)

Lösning

$$f(x)=\begin{cases}\sin 4x/x, & x<0\\ Ax+B, & 0\leq x\leq \pi\ .\\ \cos x, & x>\pi\end{cases}$$

(1) Kontinuitet i $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 4x}{x}=B\Leftrightarrow$$

$$\overset{!}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}\cdot 4\cos x\cdot\cos 2x=B\Leftrightarrow B=4.$$

I $\overset{!}{\Leftrightarrow}$ underförstås följande:

$$\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x=4\sin x\cos x\cos 2x.$$

(2) Kontinuitet i $x=\pi$

$$f(x)=\begin{cases}\sin 4x/x, & x<0\\ Ax+4, & 0\leq x\leq \pi\ ;\\ \cos x, & x>\pi\end{cases}$$

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x)=\lim_{x\to \pi^-} f(x)=f(\pi)\Rightarrow \lim_{x\to \pi^+}\cos x=A\pi+4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1=A\pi+4\Leftrightarrow A\pi=-5\Leftrightarrow A=-\frac{5}{\pi}.$$

Svar: Ja, det kan man. $A=-5/\pi$, $B=4$.

Övning 3.31 (Sid. 156)

Lösning

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2=1^2=\underline{1}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}(e^{2x}-1)^2}{x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}(e^x-1)^2(e^x+1)^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{x^2}\cdot e^{2x}\cdot(e^x+1)^2=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}e^{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(e^x+1)^2=1^2\cdot 1\cdot 2^2=\underline{4}.$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{(\ln x)^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\exp\{\ln^2 x\}=$

$=\exp\{\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)^2\}=e^{\infty}=\underline{\infty}$ (Se Sats 3.11 f).)

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{1/\ln x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln x/\ln x}=e^1=\underline{e}.$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(2+x)-\ln x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln(1+\frac{2}{x})=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}2\cdot\frac{x}{2}\ln(1+\frac{2}{x})=[t=\frac{2}{x};\ x\to\infty\Rightarrow t\to 0^+]=$

$=\lim\limits_{t\to 0}2\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}=2\cdot 1=\underline{2}.$

f) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\pi-x}=[t=\pi-x;\ x\to\pi\Rightarrow t\to 0]=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{t}=\underline{3}.$

$\sin 3(\pi-t)=\sin(3\pi-3t)=\sin(\pi-3t)=\sin 3t;$

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{t}=\lim\limits_{3t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}\cdot 3=1\cdot 3=3.$

Testövning 3.32 (Sid. 159)

Lösning

$$\underline{f(x)=\frac{3^x+\ln|x|}{x^5+x^4}}.$$

a) Sats 3.13 b) konsulteras.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{3^x}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{x^5}=\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{3^x+\ln|x|}{x^5+x^4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3^x(1+\ln|x|/3^x)}{x^5(1+x^{-1})}=\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{x^5}\cdot\frac{1+\frac{\ln|x|}{3^x}}{1+\frac{1}{x}}=\infty\cdot 1=\infty.$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x+\ln|x|}{x^5+x^4}=\frac{1+(-\infty)}{0^+}=\frac{-\infty}{0^+}=\underline{-\infty}.$

<u>Anm.</u> $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^4+x^5)=\lim_{x\to 0}x^4(1+x)=0\cdot 1^+=0^+.$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\ln|x|=\ln 0^+=-\infty.$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{3^x+\ln|x|}{x^4+x^5}=[t=-x;\ x\to-\infty\Rightarrow t\to+\infty]=$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3^{-t}+\ln|t|}{t^4-t^5}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln|t|}{t^4(1-t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln|t|/t^4}{1-t}=0^-.$$

Testövning 3.33 (Sid. 160)

Lösning

a) $\displaystyle f(x)=\frac{x^3-4x^2+7}{x^2+x-3};$

$$\begin{array}{rl}
 & x-5 \\ \hline
x^3-4x^2+0x+7 & \boxed{x^2+x-3} \\
(-)\ \underline{x^3+\ x^2-3x+0} & \\
-5x^2+3x+7 & \\
(-)\ \underline{-5x^2-5x+15} & \\
8x-8 &
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{x\to\infty}(f(x)-(x-5))=\lim_{x\to\infty}\frac{8x-8}{x^2+x-3}=0^+ \\
\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x-5))=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x-8}{x^2+x-3}=0^-
\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{y=x-5.}$$

b) $\displaystyle g(x)=\frac{2-x}{x+5}e^{-x}+x\arctan 2x.$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-x}{x^2+5x}e^{-x}+\lim_{x\to\infty}\arctan 2x=\frac{\pi}{2};$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(g(x)-\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2-x}{x+5}e^{-x}+\lim_{x\to\infty}x\left(\operatorname{atn}2x-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=0-\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan 2x\right)\overset{(*)}{=}-\lim_{x\to\infty}x\cdot\arctan\frac{1}{2x}=$$

$$=\left[t=\frac{1}{2x};\ x\to\infty\Rightarrow t\to 0\right]=-\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\frac{\arctan t}{t}=-\frac{1}{2}.$$

$y=\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2}$ är en (sned) asymptot i $+\infty$.

(*) Jag har utnyttjat formeln (2.67) sid 114.

Någon (annan) asymptot i $-\infty$ finns inte, ty

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{x^2+5x}e^{-x}+\lim_{x\to-\infty}\arctan 2x=\infty.$$

Övning 3.34 (Sid. 160)

Lösning

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-\sqrt{x}}=[x=t^2;\ x\to\infty\Rightarrow t\to\infty]=\lim_{t\to\infty}t^4e^{-t}=0$

Se sats 3.13 (b).

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+x\cdot\sin x}{2e^x+x^2\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{e^x}(x\cdot e^{-x}\sin x+1)}{\cancel{e^x}(2+x^2e^{-x}\ln x)}=\frac{1}{2}.$

$$\left.\begin{array}{l}
(1)\ \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x\sin x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x/2}}\cdot\frac{\sin x}{e^{x/2}}=0\cdot 0=0 \\
(2)\ \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\ln x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x/2}}\cdot\frac{\ln x}{e^{x/2}}=0\cdot 0=0
\end{array}\right]:\ \underline{\text{Sats } 3.13}.$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{7x}=\left[t=\frac{1}{5x}\Leftrightarrow 7x=\frac{7}{5t}\right]=\lim\limits_{t\to 0^+}(1+t)^{\frac{7}{5t}}=$

$=\left(\lim\limits_{t\to 0^+}(1+t)^{1/t}\right)^{7/5}=e^{7/5}.$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\ln(e^{2x}+x)}{\sqrt{x}+e^{1+\ln x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\ln e^{2x}(1+xe^{-2x})}{\sqrt{x}+e\cdot e^{\ln x}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\ln e^{2x}+\ln(1+xe^{-2x})}{\sqrt{x}+e\cdot x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\ln(1+xe^{-2x})}{\sqrt{x}+e.x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}(3+(\ln(1+xe^{-2x}))/x)}{\cancel{x}(e+1/\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+(\ln(1+xe^{-2x}))/x}{e+1/\sqrt{x}}=$

$=\frac{3+0}{e+0}=\underline{\underline{\frac{3}{e}}}.$

Övning 3.35 (Sid. 160)

Lösning

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(\exp\{hc/\lambda kT\}-1)}=\left[u=\frac{hc}{\lambda kT}\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{kT}{hc}\cdot u\right]=$

$=\lim\limits_{u\to\infty}2\pi hc^2\cdot\frac{k^5.T^5}{h^5c^5}\cdot\frac{u^5}{e^u-1}=\lim\frac{2\pi k^5T^5}{h^4c^3}\cdot\frac{u^5}{e^u}=0$

Övning 3.36 (Sid. 160)

Lösning

a) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+2x+x^2-3x^3}{x^3-4x^2+x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}(5/x^3+2/x^2+1/x-3)}{\cancel{x^3}(1-4/x+1/x^2)}=\left[t=\frac{1}{x};\ x\to\infty\Rightarrow t\to 0\right]=$

$=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{5t^3+2t^2+t-3}{t^2-4t+1}=\frac{0+0-3}{0-0+1}=-3;$

$m=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(-3x))=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5+2x+x^2-3x^3}{x^2-4x+1}+3x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+2x+x^2-3x^3+3x(x^2-4x+1)}{x^2-4x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+2x+x^2-3\cancel{x^3}+3\cancel{x^3}-12x^2+3x}{x^2-4x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+5x-11x^2}{1-4x+x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}(5/x^2+5/x-11)}{\cancel{x^2}(1/x^2-4/x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5/x^2+5x-11}{1/x^2-4/x+1}=-11.$

Den sökta asymptotens ekvation är $y=-3x-11$.

b) $g(x)=3x+\ln(x+1)-\ln(2x-3)=3x+\ln(x+1)-$

$-\ln 2(x-\frac{3}{2})=3x-\ln 2+\ln\frac{x+1}{x-2/3}\xrightarrow[x\to\infty]{}3x-\ln 2.$

Den efterfrågade asymptoten är $y=3x-\ln 2$.

__Anm.__ $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{x+1}{x-3/2}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{\cancel{x}(1+1/x)}{x(1-3/2x)}=\ln 1=\underline{\underline{0}}.$

Testövning 3.37 (Sid. 165)

Lösning

a) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2-4})(n+\sqrt{n^2-4})}{\sqrt{n^2-4}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-(n^2-4)}{n+\sqrt{n^2-4}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n+\sqrt{n^2-4}}=0.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{2}{n+1}=(-1)^n\cdot\sin 0=0.$

$(-1)^n$ "oscillerar" mellan 1 º -1; det ändrar inget.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{n-1})^n = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{1-1/n})^n = \lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^{-n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \exp\{\ln(1-\frac{1}{n})^{-n}\} = \lim\limits_{n\to\infty} \exp\{\frac{\ln(1-1/n)}{-1/n}\} =$

$= [t = -\frac{1}{n};\ n\to\infty \Rightarrow t\to 0^-] = \lim\limits_{t\to 0} \exp\{\frac{\ln(1+t)}{t}\} =$

$= \exp\{\lim\limits_{t\to 0^-} \frac{\ln(1+t)}{t}\} = e^1 = e.$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{3})^k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1-(1/3)^n}{1-1/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-1/3} = \underline{\frac{1}{2}}.$

Testövning 3.38 (Sid. 165)

Lösning

$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n^2+n}{2};$

$\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+5} - \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n+5} - \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{n+5} - \frac{n}{2} =$

$= \frac{n}{2}(\frac{n+1}{n+5} - 1) = \frac{n}{2}\frac{n+1-(n+5)}{n+5} = \frac{n}{2}\cdot\frac{-4}{n+5} = -2\frac{n}{n+5} = -2\frac{1}{1+5/n};$

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+5} - \frac{n}{2}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2}{1+5/n} = \frac{-2}{1} = \underline{-2}.$

Testövning 3.39 (Sid. 165)

Lösning

$\forall n \geq 1:\ a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n} < \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \cdots + \frac{2^n}{3^n} =$

$= \frac{2}{3}(1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + \cdots + (\frac{2}{3})^{n-1}) = \frac{2}{3}\frac{1-(2/3)^n}{1-2/3} = 2(1-(\frac{2}{3})^n) < 2$

$(a_n)_1^\infty$ är växande & begränsad, dvs konvergent.

Övning 3.40 (Sid. 165)

Lösning

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n(n-\sqrt{n^2-4}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-\sqrt{n^2-4})(n+\sqrt{n^2-4})}{n+\sqrt{n^2-4}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n^2-(n^2-4))}{n+\sqrt{n^2-4}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n}{n+\sqrt{n^2-4}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n}{n(1+\sqrt{1-4/n^2})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{1+\sqrt{1-4/n^2}} = \frac{4}{1+1} = 2.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{(n+1)^2}{n-1} - \frac{(n-1)^2}{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)(n-1)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+3n+1-(n^3-3n^2+3n-1)}{n^2-1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2+2}{n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(6+2/n^2)}{\cancel{n^2}(1-1/n^2)} = \frac{6}{1} = 6.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{2n})^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \exp\{\ln(1-\frac{1}{2n})^{n^2}\} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \exp\{n^2 \cdot \ln(1-\frac{1}{2n})\} = (t = -\frac{1}{2n}) =$

$= \lim\limits_{t\to 0^-} \exp\{\frac{1}{4t}\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}\} = \exp((-\infty)\cdot 1) = 0^+.$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{2n})^{n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{2n})^{(-2n)(-\frac{1}{2})} \cdot (1-\frac{1}{2n})^5 =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} ((1-\frac{1}{2n})^{-2n})^{(-1/2)} = (m = -1/2n) =$

$= \lim\limits_{m\to 0^-} ((1+m)^{1/m})^{-1/2} = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}.$

Anm. För alla reella a gäller:

$$\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{a}{n})^n = e^a = \lim\limits_{n\to -\infty} (1+\frac{a}{n})^n.$$

Övning 3.41 (Sid. 165)

Lösning

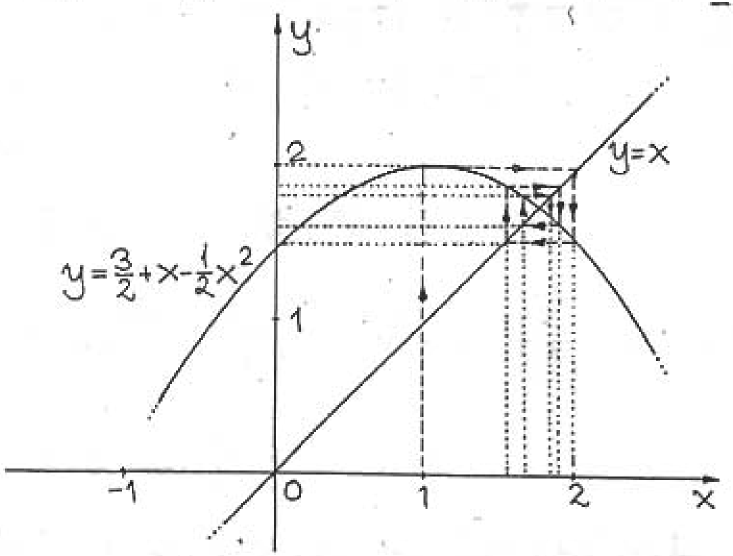
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases}\frac{1}{1-x}, & |x|<1\\ \infty, & |x|>1\end{cases}.$$

Testövning 3.42 (Sid. 171)

Lösning

a) $\underline{a_{n+1} = \frac{3}{2} + a_n - \frac{1}{2}a_n^2, \quad a_0 = 1.}$

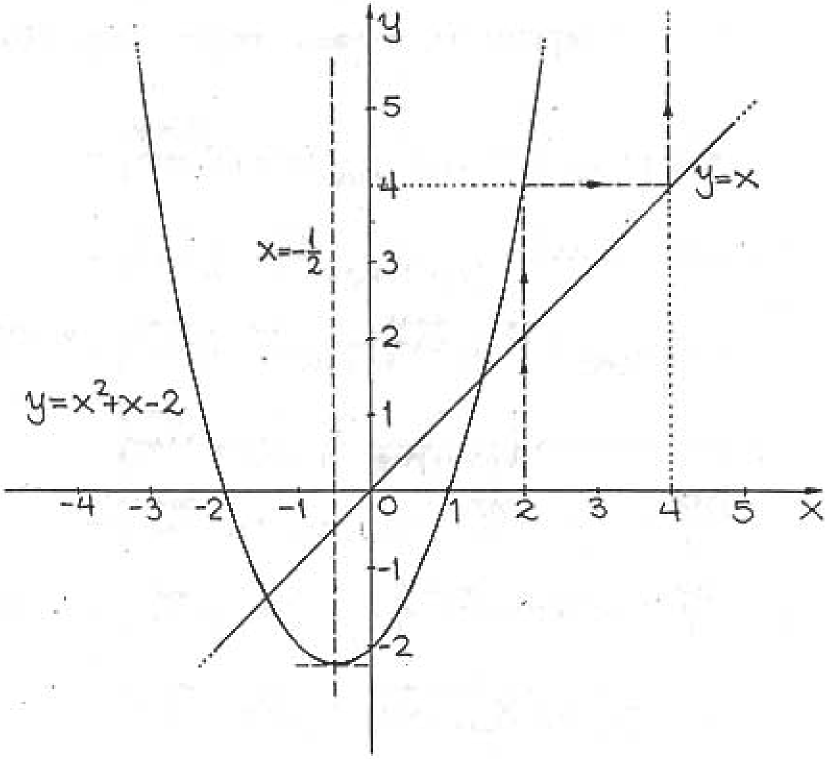
$\frac{3}{2} + x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}(x^2-2x-3) = -\frac{1}{2}((x-1)^2-4) = \underline{2-\frac{1}{2}(x-1)^2}.$



$a_0=1$, $a_2=2$, $a_3=\frac{3}{2}$, $a_4=\frac{15}{8}$, $a_5=\frac{207}{128}$ osv.

b) $\underline{a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 2, \ a_0 = 2.}$

$x^2+x-2 = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$; (se fig.)



$a_0=2$, $a_1=4$, $a_2=18$, $a_3=340$, $a_4=115938$, osv.

Testövning 3.43 (Sid. 171)

Lösning

$\underline{a_{n+1}=\sqrt{5a_n}, \ n=1,2,3,\dots; \ a_1=1.}$

a) $a_1=1<5$; $a_2=\sqrt{5a_1}<\sqrt{5\cdot 1}=\sqrt{5}<5$; $a_3=\sqrt{5a_2}<$
$<\sqrt{5\cdot 5}=5$; $a_4=\sqrt{5a_4}<\sqrt{5\cdot 5}=5$ osv

Antag att $a_\nu<5$ för ett $\nu>1$; (ν = ny).

$a_{\nu+1} = \sqrt{5a_\nu} < \sqrt{5 \cdot 5} = 5$; induktionen är därmed genomförd. Således är $0 < a_n < 5$, för alla n.

b) $a_{n+1} - a_n = \sqrt{5a_n} - a_n = \dfrac{(\sqrt{5a_n} - a_n)(\sqrt{5a_n} + a_n)}{\sqrt{5a_n} + a_n} =$

$$= \frac{5a_n - a_n^2}{\sqrt{5a_n} + a_n} = \frac{a_n(5 - a_n)}{\sqrt{5a_n} + a_n} > 0 \Leftrightarrow a_n < a_{n+1}.$$

c) Följden $(a_n)_1^\infty$ är strängt växande och uppåt begränsad; den är alltså konvergent (Sats 3.16).

Kalla gränsvärdet $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Detta ger att

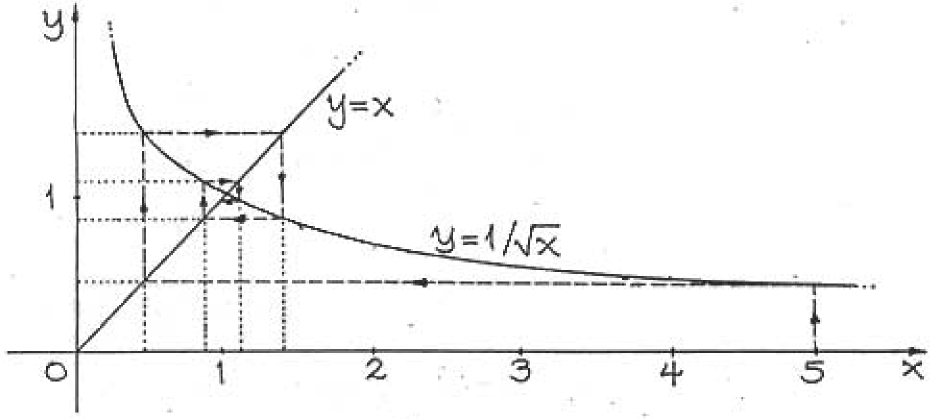
$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{5a_n} \Leftrightarrow A = \sqrt{5 \cdot A} \Leftrightarrow A^2 = 5A \Leftrightarrow \underline{A = 5}.$$

Testövning 3.44 (Sid. 171)

Lösning

$\underline{a_{n+1} = 1/\sqrt{a_n},\ a_0 = 5}$

a)



b) $a_0, a_2, a_4, \ldots$ är avtagande; $a_1, a_3, a_5, \ldots$ är växande; från situationsbilden framgår det att båda delföljder konvergerar mot 1. Detta kan visas explicit: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{a_n}} \Leftrightarrow$

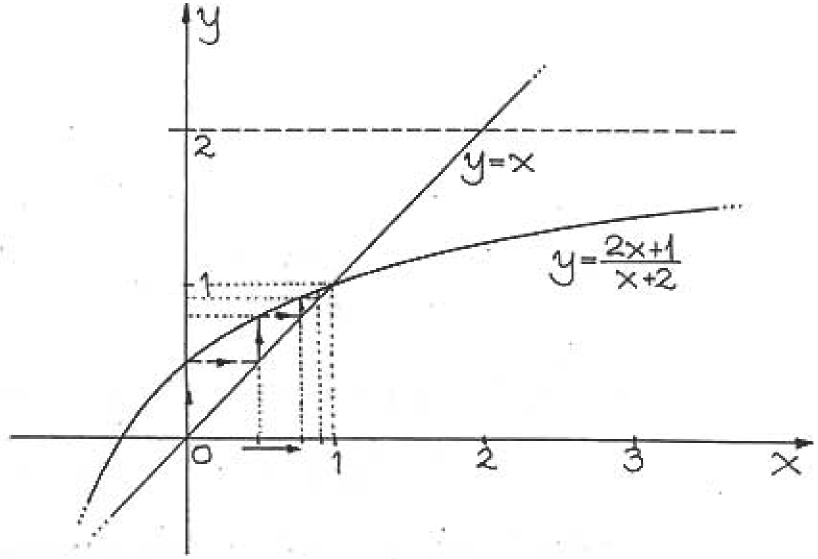
$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\sqrt{A}} \Leftrightarrow A^2 = \frac{1}{A} \Leftrightarrow A^3 = 1 \Leftrightarrow \underline{A = \lim_{n\to\infty} a_n = 1}.$$

Övning 3.45 (Sid. 171)

Lösning

a) $\underline{a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 2},\ n \geq 1;\ a_0 = 0.}$

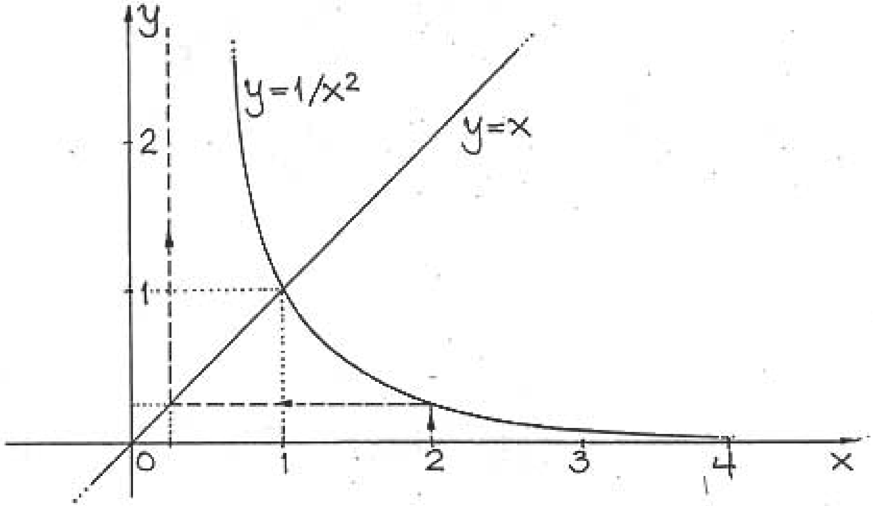
$$y = \frac{2x+1}{x+2} = \frac{2x+4-3}{x+2} = \frac{2(x+2)-3}{x+2} = 2 - \frac{3}{x+2},\ x \geq 0.$$



Ur situationsbilden ovan drar vi slutsatsen att $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) $a_1=2,\ a_{n+1}=1/a_n^2,\ n\geq 1.$

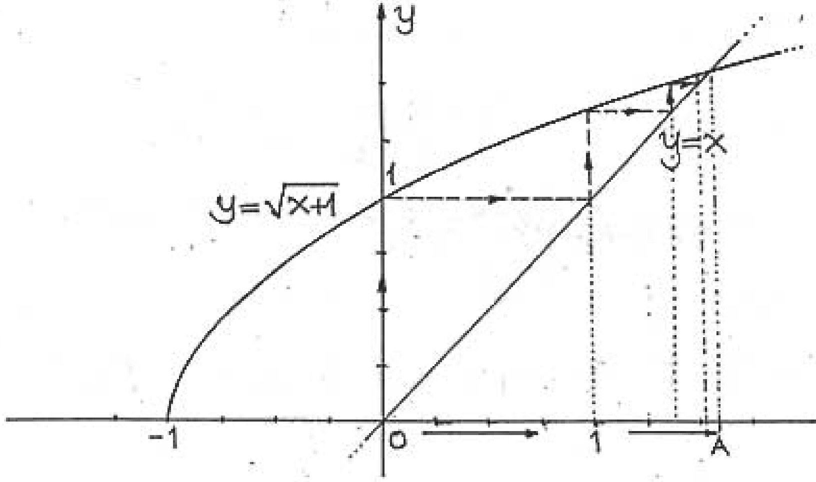
$y=1/x^2,\ x>0$



$a_1=2 \Rightarrow a_2=1/4 \Rightarrow a_3=16 \Rightarrow a_4=1/256 \Rightarrow \cdots$

Gränsvärde saknas.

c) $a_1=0,\ a_{n+1}=\sqrt{1+a_n},\ n\geq 1.$

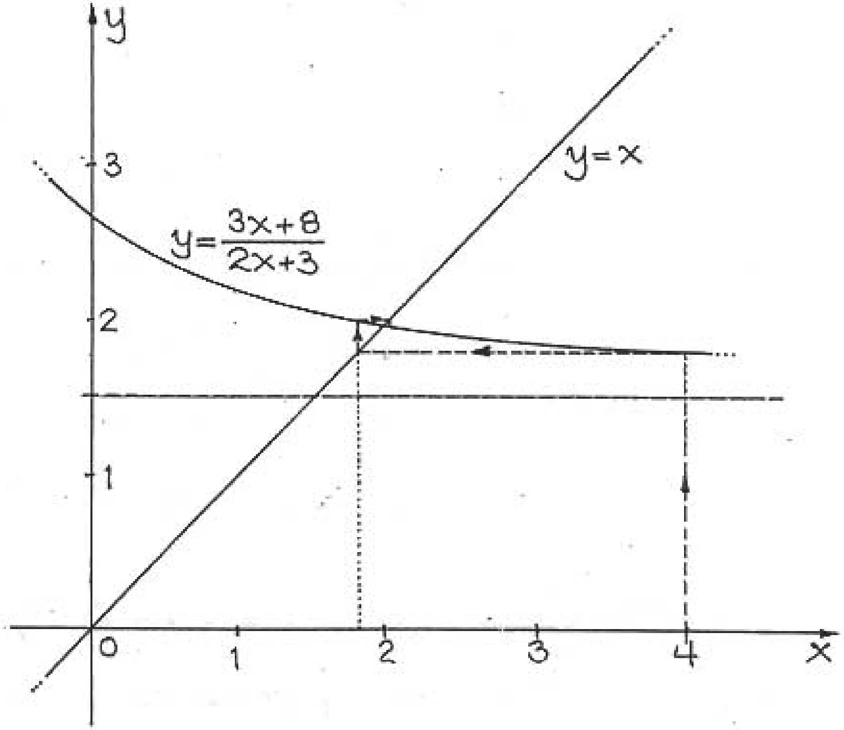


Följden $(a_n)_1^\infty$ är strängt växande och uppåt begränsad, så den är konvergent (Sats 3.16).

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+a_n} \Leftrightarrow A=\sqrt{1+A} \Leftrightarrow A^2=A+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^2-A-1=0 \Leftrightarrow A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\lim\limits_{n\to\infty} a_n.$

d) $a_1=4,\ a_{n+1}=\frac{3a_n+8}{2a_n+3},\ n\geq 1.$



Det tycks som om $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$, för ngt $A>0$.

$\frac{3A+8}{2A+3}=A \Leftrightarrow 3A+8=A(2A+3)=2A^2+3A \Leftrightarrow 2A^2=8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^2=4 \Leftrightarrow A=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2.$

Övning 3.46 (Sid. 172)

Lösning

$$P(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$$=a_mx^m\left(1+\frac{a_{m-1}}{a_m}\cdot\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_1}{a_m}\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{a_0}{a_m}\frac{1}{x^m}\right)=$$

$$=\underline{a_mx^b\cdot(1+f(x))};$$

$$Q(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0=$$

$$=b_nx^n\left(1+\frac{b_{n-1}}{b_n}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{b_1}{b_n}\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{b_0}{b_n}\frac{1}{x^n}\right)=$$

$$=\underline{b_nx^n(1+g(x))};$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_mx^m(1+f(x))}{b_nx^n(1+g(x))}=x^{m-n}\cdot\frac{a_m}{b_n}\cdot\frac{1+f(x)}{1+g(x)};$$

a) $\mathrm{grad}P>\mathrm{grad}Q\Leftrightarrow m>n\Leftrightarrow m-n>0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x^{m-n}\cdot\frac{a_m}{a_n}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+f(x)}{1+g(x)}=(+\infty)\cdot\frac{a_m}{b_n}\cdot 1;$ (*)

Om $\mathrm{sgn}(a_m)=\mathrm{sgn}(b_n)$ så är $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=+\infty;$

Om $\mathrm{sgn}(a_m)\neq\mathrm{sgn}(b_n)$ så är $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=-\infty.$

b) $\mathrm{grad}P=\mathrm{grad}Q\Leftrightarrow m=n\overset{(*)}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_m}{b_m}.$

c) $\mathrm{grad}P<\mathrm{grad}Q\Leftrightarrow m<n\overset{(*)}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=0.$

Anm Signumfunktionen, sgn, har definierats tidigare; $\mathrm{sgn}\,x=+1$ om $x>0$, $\mathrm{sgn}\,x=-1$, om $x<0$.

Övning 3.47 (Sid. 172)

Lösning

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+5}{x^2-1}=(\mathrm{grad}P=\mathrm{grad}Q=2)=\frac{3}{1}=\underline{3.}$

Jar refererar till föregående övning.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3\sqrt{x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}(2+3/\sqrt{x})}{\cancel{x}(1/x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+3/\sqrt{x}}{1/x-1}=\frac{2}{-1}=\underline{-2.}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{2+1/x^2}}{\cancel{x}(2-1/x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+1/x^2}}{2-1/x}=\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2+1/x^2}}{x(2-1/x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2+1/x^2}}{2-1/x}=\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$

Anm. $\sqrt{2x^2+1}=\sqrt{x^2(2+1/x^2)}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{2+1/x^2}=|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}.$

Övning 3.48 (Sid. 172)

Lösning

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})\cdot\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})}{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-(x^2-x)}{x^2+2x-(x^2-2x)}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}(\sqrt{1+2/x}+\sqrt{1-2/x})}{\cancel{x}(\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1-1/x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cancel{x}}{4\cancel{x}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+2/x}+\sqrt{1-2/x}}{\sqrt{1+1/x}-\sqrt{1-1/x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+1}{1+1}=\frac{1}{2}\cdot 1=\underline{\frac{1}{2}}.$$

Jag har tillgripit förlängning med konjugerade uttryck och konjugatregeln.

Övning 3.49 (Sid. 172)

Lösning

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{4x}+e^{5x})}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln e^{5x}(1+e^{-x})}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln e^{5x}+\ln(1+e^{-x})}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+\ln(1+e^{-x})}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(5+\frac{\ln(1+e^{-x})}{x})=5+\frac{\ln 1}{\infty}=\underline{5}.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^{4x}+e^{5x})}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln e^{4x}(1+e^{x})}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln e^{4x}+\ln(1+e^{x})}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x+\ln(1+e^{x})}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(4+\frac{\ln(1+e^{x})}{x})=4+\frac{\ln 1}{-\infty}=\underline{4}.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x(e^{2/x}-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{e^{2/x}-1}=[t=\frac{1}{x};\ x\to\infty\Rightarrow t\to 0^+]=$

$=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t}{e^{2t}-1}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t}{(e^{t}-1)(e^{t}+1)}=\lim\limits_{t\to 0^+}(\frac{e^{t}-1}{t})^{-1}\cdot\frac{1}{e^{t}+1}=\underline{\frac{1}{2}}.$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x(e^{2/x}-1)}=[t=\frac{1}{x};\ x\to 0^+\Rightarrow t\to\infty]=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{2t}-1}=\underline{0}.$

Övning 3.50 (Sid. 172)

Lösning

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln(5x^2+2x)-\ln(4x^2+3x))=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{5x^2+2x}{4x^2+3x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{\cancel{x^2}(5+2/x)}{\cancel{x^2}(4+3/x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{5+2/x}{4+3/x}=\underline{\ln\frac{5}{4}}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(5x^2+2x)-\ln(4x^2+3x))=\lim\limits_{x\to 0}\ln\frac{5x^2+2x}{4x^2+3x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\ln\frac{(5x+2)\cancel{x}}{(4x+3)\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\ln\frac{5x+2}{4x+3}=\underline{\ln\frac{2}{3}}.$

Övning 3.51 (Sid. 173)

Lösning

$t=x-1\Leftrightarrow x=1+t\Rightarrow 6x^2-5ax+a^2=6(1+t)^2-5a(1+t)+$

$+a^2=6(1+2t+t^2)-5a(1+t)+a^2=6t^2+(12-5a)t+6-5a+$

$+a^2=6(x-1)^2+(12-5a)(x-1)+a^2-5a+6;$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}\frac{6(x-1)^2+(12-5a)(x-1)+a^2-5a+6}{x-1}=$

$=b\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}(6(x-1)+12-5a+\frac{(a-2)(a-3)}{x-1}=b\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\a=3\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b=2\lor b=-3.$

<u>Svar</u>: $a=2, b=2$ eller $a=3, b=-3$.

Övning 3.52 (Sid. 173)

Lösning

a) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\arctan x\cdot\arctan\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{atn}\,x\cdot x\,\mathrm{atn}\frac{1}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x\cdot\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\mathrm{atn}\frac{1}{x}=$

$=[t=\frac{1}{x};\ x\to\infty\Rightarrow t\to 0^+]=\frac{\pi}{2}\cdot\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\arctan t}{t}=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\pi-2\arctan x)=\lim\limits_{x\to\infty}2x\underbrace{(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}_{\arctan(1/x)}=$

$$=\lim_{x\to\infty} 2x\arctan\frac{1}{x}=\left[t=\frac{1}{x};\ x\to\infty\Rightarrow t\to 0^+\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0^+} 2\frac{\arctan t}{t}=2\cdot 1=\underline{2.}$$

c) $$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)\cdot\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot x\ln x=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}x\ln x=1\cdot 0=\underline{0.}$$

Övning 3.53 (Sid. 173)

Lösning

a) $\underline{f(x)=\sqrt{x^2+x+2}.}$

$$\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{x^2(1+1/x+2/x^2)}=|x|\sqrt{1+1/x+2/x^2}\ ;\quad (*)$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+1/x+2/x^2}=1\ ;$$

$$m=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-x)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+2}-x)(\sqrt{x^2+x+2}+x)}{\sqrt{x^2+x+2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x^2}+x+2-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}(1+2/x)}{\cancel{x}(\sqrt{1+1/x+2/x^2}+1)}=$$

Asymptoten i $+\infty$ är $y=x+1/2.$

$$k'=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{1+1/x+2/x^2})=\underline{-1};$$

$$m'=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+2}+x)=[t=-x]=$$

$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+2}-t)=\cdots=\underline{-1/2.}$$

Asymptoten i $-\infty$ är $y=-x-1/2.$

b) $\underline{f(x)=\frac{x^3-2x^2+1}{x^2+1}-xe^x}$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-2x^2+1}{x^3+x}-e^x\right)=1-\infty=-\infty\,!$$

Någon asymptot i $+\infty$ finns inte.

$$k'=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x^3}(1-2/x+1/x^3)}{\cancel{x^3}(1+1/x^2)}-e^x\right)=1-0=1\ ;$$

$$m'=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-k'x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-2x^2+1}{x^2+1}-x-xe^x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-2x^2+1-x^3-x}{x^2+1}-xe^x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2-x+1}{x^2+1}-xe^x)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}(-2-1/x+1/x^2)}{\cancel{x^2}(1+1/x^2)}-xe^x\right)=-2.$$

Asymptoten i $-\infty$ är $y=x-2.$

c) $\underline{f(x)=\arctan 2x+\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).}$

$D_f=D_{\ln}=\mathbb{R}_+$, så någon asymptot i $-\infty$ finns inte i det här fallet.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\arctan 2x}{x}+\frac{1}{2x}\ln\frac{x^2}{x^2+1}\right)=$$

$$=\frac{\pi/2}{\infty}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0\ ;$$

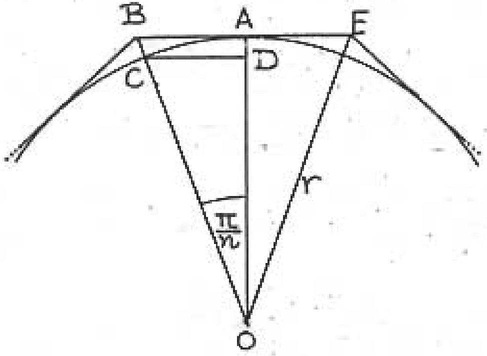
$$m=\lim_{x\to\infty}(f(x)-0)=\lim_{x\to\infty}\left(\arctan 2x-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{\pi}{2};$$

f:s enda asymptot är $y=\frac{\pi}{2}$ i $+\infty$.

Asymptot är något som har med funktionsgrafen att göra.

Övning 3.54 (Sid. 173)

Lösning



$\underline{\Delta OAB \sim \Delta ODC}$ ($\sim$ anger likformighet).

$CD = r \cdot \sin\frac{\pi}{n}$, $OD = r\cos\frac{\pi}{n}$;

$\frac{BA}{CD} = \frac{OA}{OD} \Leftrightarrow BA = \frac{OA}{OD} \cdot CD = \frac{r}{r\cos\frac{\pi}{n}} \cdot r\sin\frac{\pi}{n} = r \tan\frac{\pi}{n} \Rightarrow$

$|\Delta OBE| = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot 2BA \cdot OA = r^2 \tan\frac{\pi}{n}$;

Den omskrivna n-hörningens area är

$$A_n = nr^2 \cdot \tan\frac{\pi}{n}.$$

$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \pi r^2 \frac{\tan(\pi/n)}{\pi/n} = [t = \frac{\pi}{n}] = \pi r^2 \lim_{t\to 0^+} \frac{\tan t}{t} = \underline{\pi r^2}.$

Övning 3.5 (Sid. 173)

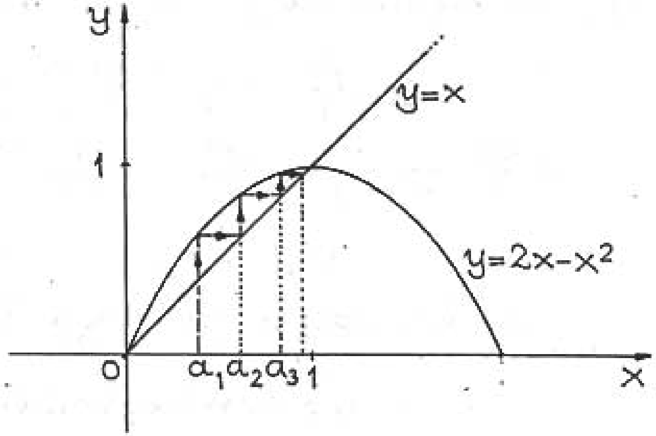
Lösning

$\underline{a_1 = a,\ a_{n+1} = 2a_n - a_n^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots}$

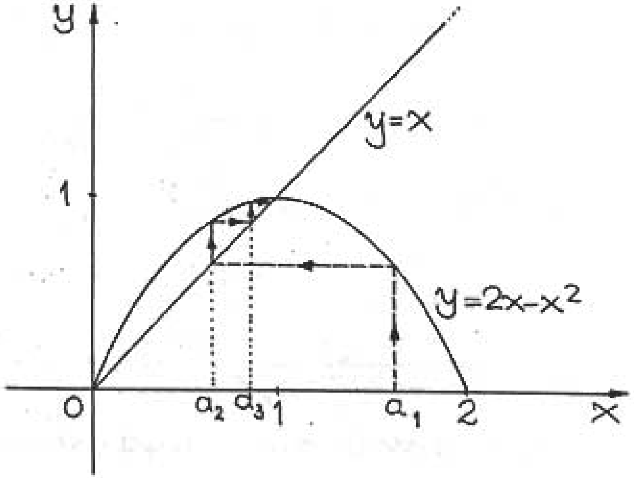
a) $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(2a_n - a_n^2) \Leftrightarrow A = 2A - A^2 \Leftrightarrow A^2 - A = 0$

$\Leftrightarrow A(A-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{A=0} \vee \underline{A=1}.$

b) Situationsbilden är enligt följande:



c)



Anm. $0<a<2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$ (enl. b) och c))

$a=0$ och $a=2$ är "fixpunkter."

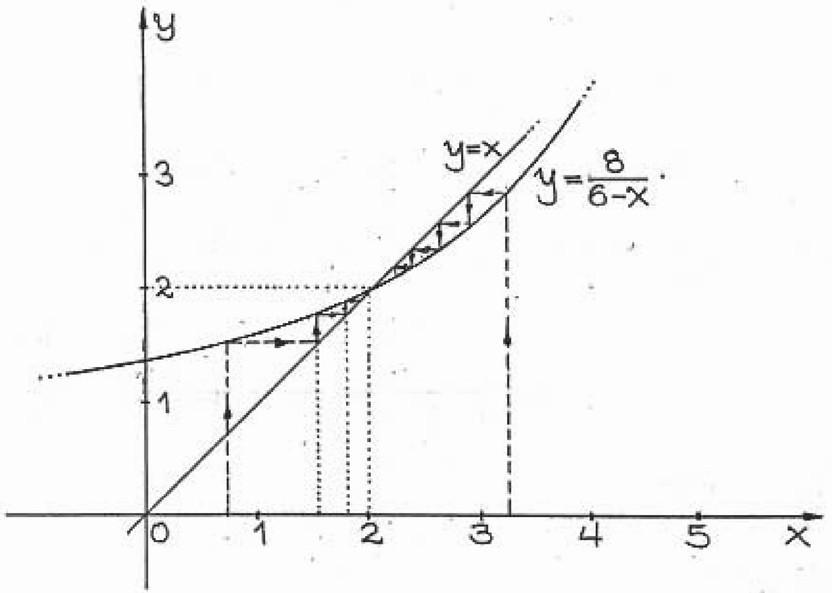
$a<0$ och $a>2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (divergent).

Övning 3.56 (Sid. 173)

Lösning

$$a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{8}{6-a_n},\ n\geq 1.$$

Situationsbilden är enligt följande:



$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{6-a_n}\Leftrightarrow A=\frac{8}{6-A}\Leftrightarrow A^2-6A+8=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A=3\pm1 \Leftrightarrow A=2 \vee A=4.$$

Ur situationsbilden ovan framgår att

$$\lim_{n\to\infty} a_n=2.$$

4. Derivator

Testövning 4.1 (Sid. 179)

Lösning

$$f(x)=2x^2,\ P_0:(-1,2)$$

Tangentens ekvation: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Normalens ekvation: $x-x_0=-f'(x_0)(y-y_0)$.

(1) $f'(x)=2\cdot 2x=4x \Rightarrow f'(x_0)=4x_0=4(-1)=-4$.

(2) $y-2=-4(x-(-1))=-4(x+1)=-4x-4 \Leftrightarrow y=-4x-2$.

(3) $x-(-1)=-(-4)(y-2)=4(y-2)=4y-8 \Leftrightarrow x=4y-9$.

Resultat: Tangentens ekvation i punkten $(-1,2)$ är $4x+y+2=0$; normalens ekvation i samma punkt är $x-4y+9=0$.

Testövning 4.2 (Sid. 179)

Lösning

a) $f(x)=x^3 \Rightarrow f(x+h)=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3=$

$=f(x)+h(3x^2+3xh+h^2)\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2+3hx+h^2$

$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=\underline{\underline{3x^2}}$

b) $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f(x+h)=\frac{1}{x+h} \Rightarrow f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=$

$=\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}=-\frac{h}{x(x+h)} \Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\frac{1}{x(x+h)} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{x(x+h)}\right)=\underline{-\frac{1}{x^2}}.$

c) $f(x)=\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1} \Rightarrow f(x+h)-f(x)=1-\frac{1}{x+h+1}-$

$-\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+h+1}=\frac{x+h+1-(x+1)}{(x+1)(x+h+1)}=\frac{h}{(x+1)(x+h+1)}$

$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+1)(x+h+1)}=\underline{\frac{1}{(x+1)^2}}.$

Testövning 4.3 (Sid. 180)

Lösning

$f(0+h)-f(0)=f(h)=h+h^2\cos\frac{1}{h} \Rightarrow \frac{f(h)-f(0)}{h}=1+h\cos\frac{1}{h}$

$\Rightarrow f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(1+h\cos\frac{1}{h}\right)=1.$

Anm. $|h\cdot\cos\frac{1}{h}|=|h|\cdot|\cos\frac{1}{h}|\leq|h|\xrightarrow[h\to 0]{}0.$

Testövning 4.4 (Sid. 182)

Lösning

$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=\infty.$

Derivatan i fråga existerar inte; y-axeln är en tangent till kurvan $y=\sqrt{x}$ i (0,0).

Testövning 4.5 (Sid. 184)

Lösning

a) $y=f(x)=x^3 \Rightarrow dy=f'(x)dx=3x^2\cdot dx.$

b) $y=f(x)=\frac{x}{x+1} \Rightarrow dy=f'(x)dx=\frac{1}{(x+1)^2}dx.$

Övning 4.6 (Sid. 184)

Lösning

a) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x+h)-f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+h}}=$

$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+h})(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+h}\,(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=\frac{x-(x+h)}{\sqrt{x(x+h)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=$

$=\frac{-h}{\sqrt{x(x+h)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} \Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-1}{\sqrt{x^2+hx}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$

$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{x^2+hx}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=$

$=\frac{-1}{\sqrt{x^2}(\sqrt{x}+\sqrt{x})}=-\frac{1}{2|x|\sqrt{x}}=\underline{-\frac{1}{2x^{3/2}}},\ x>0.$

b) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x} \Rightarrow f(x+h)=\frac{\sqrt{x+h+1}}{x+h} \Rightarrow f(x+h)-f(x)=$

$=\frac{\sqrt{x+h+1}}{x+h}-\frac{\sqrt{x+1}}{x}=\frac{x\sqrt{x+h+1}-(x+h)\sqrt{x+1}}{x(x+h)}=$

$=\frac{(x\sqrt{x+h+1}-(x+h)\sqrt{x+1})(x\sqrt{x+h+1}+(x+h)\sqrt{x+1})}{x(x+h)(x\sqrt{x+h+1}+(x+h)\sqrt{x+1})}=$

$=\frac{x^2(x+h+1)-(x+h)^2\cdot(x+1)}{x\cdot(x+h)(x\sqrt{x+h+1}+(x+h)\sqrt{x+1})};$ forts

$$f(x+h)-f(x)=\frac{x^3+x^2+x^2h-(x+1)(x^2+2xh+h^2)}{x(x+h)(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}=$$

$$=\frac{\cancel{x^3}+\cancel{x^2}+x^2h-\cancel{x^3}-2x^2h-xh^2-\cancel{x^2}-2hx-h^2}{x(x+h)(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}=$$

$$=\frac{h(-x^2-xh-2x-h^2)}{x(x+h)(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}$$

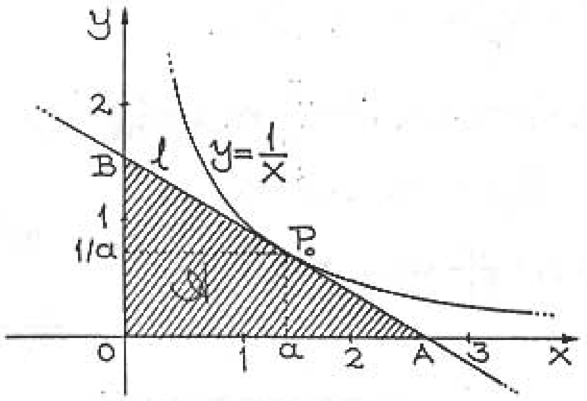
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-x^2-2x-xh-h^2}{x(x+h)(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}=$$

$$=\frac{-x^2-2x}{x\cdot x\cdot(2\sqrt{x+1})}=-\frac{x(x+2)}{x^2\cdot 2\sqrt{x+1}}=-\frac{x+2}{2x\sqrt{x+1}}.$$

Övning 4.7 (Sid. 185)

Lösning

$\underline{f(x)=\frac{1}{x},\ x>0;\quad P_0:(a,\frac{1}{a}).}$



$$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(a)=-\frac{1}{a^2};$$

$$l:\ y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)=-\frac{1}{a^2}x+\frac{1}{a}\Leftrightarrow \underline{y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}};\ (*)$$

Koordinaten till A fås om i (*) sätts $y=0$.

$$0=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}\Leftrightarrow\frac{1}{a}x=2\Leftrightarrow x=2a\Rightarrow \underline{A:(2a,0).}$$

Koordinaten till B fås om i (*) sätts $x=0$. Det leder till $B:(0,\frac{2}{a})$.

$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{2}{a}=\underline{2\text{ ae.}}$, oberoende av $a>0$.

Övning 4.8 (Sid. 185)

Lösning

$\underline{f(x)\approx\sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)}$ (linjär approximation).

$f(x)\approx 5+\frac{1}{10}(x-25)$;

(1) $f(26)\approx 5+\frac{1}{10}=5{,}1$; $(\sqrt{26}=5{,}099)$.

(2) $f(27)\approx 5+\frac{1}{5}=5{,}2$; $(\sqrt{27}=5{,}196)$.

(3) $f(28)\approx 5+\frac{3}{10}=5{,}3$; $(\sqrt{28}=5{,}292)$.

(4) $f(35)\approx 5+1=6$; $(\sqrt{35}=5{,}916)$.

Testövning 4.9 (Sid. 187)

Lösning

a) $f(x)=3x^5-4x^2+6x\Rightarrow f'(x)=15x^4-8x+6.$ (C-kurs)

b) $f(x)=\frac{3x^3-4x^2+2x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(9x^2-8x+2)(x^2+1)-2x(3x^3-4x^2+2x)}{(x^2+1)^2}=$

$$=\frac{9x^4+9x^2-8x^3-8x+2x^2+2-6x^4+8x^3-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^4+7x^2-8x+2}{(x^2+1)^2}.$$

Testövning 4.10 (Sid. 192)

Lösning

a) $y=(2x^2+3x)^{10}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} y=u^{10}\Rightarrow\frac{dy}{du}=10u^9\\ u=2x^2+3x\Rightarrow\frac{du}{dx}=4x+3\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=10u^9\cdot(4x+3)=\underline{10(2x^2+3x)^9\cdot(4x+3).}$

b) $y=\ln(1+\cos^2x)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} y=\ln u\Rightarrow\frac{dy}{du}=\frac{1}{u}\\ u=1+t^2\Rightarrow\frac{du}{dt}=2t\\ t=\cos x\Rightarrow\frac{dt}{dx}=-\sin x\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{u}\cdot 2t\cdot(-\sin x)=\frac{2\cos x}{1+\cos^2x}\cdot(-\sin x)=$

$=\underline{-\frac{\sin 2x}{1+\cos^2x}.}$

c) $y=x^x=e^{x\ln x}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} y=e^u\Rightarrow\frac{dy}{du}=e^u\\ u=x\ln x\Rightarrow\frac{du}{dx}=\ln x+1\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=e^u\cdot(\ln x+1)=e^{x\ln x}(\ln x+1)=\underline{x^x(\ln x+1).}$

Testövning 4.11 (Sid. 192)

$y=a^x=(e^{\ln a})^x=e^{x\ln a}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} y=e^u\Rightarrow\frac{dy}{du}=e^u\\ u=x\ln a\Rightarrow\frac{du}{dx}=\ln a\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=e^u\ln a=e^{x\ln a}\ln a=\underline{a^x\ln a.}$

Testövning 4.12 (Sid. 194)

Lösning

a) $y=\arcsin(e^{\sqrt{x}})\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} y=\arcsin u\Rightarrow\frac{dy}{du}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\\ u=e^t\Rightarrow\frac{du}{dt}=e^t\\ t=\sqrt{x}\Rightarrow\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot e^t\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{1-e^{2\sqrt{x}}}}e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

b) $\underline{f(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1).}$

$f'(x)=1\cdot\arctan x+x\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}=\arctan x.$

Anm. $\frac{d}{dx}\ln\phi(x)=\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}.$

Testövning 4.13 (Sid. 194)

Lösning

$y=\sqrt{x}\Rightarrow x=y^2=(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})\Rightarrow\frac{d}{dx}x=\frac{d}{dx}(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x})\overset{!}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 1=(\frac{d}{dx}\sqrt{x})\sqrt{x}+\sqrt{x}\frac{d}{dx}\sqrt{x}=2\sqrt{x}\frac{d}{dx}\sqrt{x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\underline{\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

I $\overset{!}{\Rightarrow}$ underförstås "produktregeln".

Testövning 4.14 (Sid. 195)

Lösning

$\underline{f(x)=x^5+x+1}$

f är summan av de växande funktionerna x^5 och $x+1$, så den är (strängt) växande. Mot varje värde på y svarar ett och endast ett värde på x. (Sats 3.9 konsulteras.)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=1 \Leftrightarrow x=0 \Leftrightarrow 0=f^{-1}(1) \\ f(x)=3 \Leftrightarrow x=1 \Leftrightarrow 1=f^{-1}(3) \end{array}\right] ;$$

$$f'(x)=5x^4+1 \Rightarrow \begin{cases} f'(0)=1 \\ f'(1)=6 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(0)}=1 \\ (f^{-1})'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6} \end{array} \right\}.$$

Testövning 4.15 (Sid. 197)

Lösning

$$y^3+(x^2+1)y=x \Rightarrow \frac{d}{dx}(y^3+(x^2+1)y)=1 \Rightarrow 3y^2y'+$$
$$+2x\cdot y+(x^2+1)y'=1 \Leftrightarrow (3y^2+x^2+1)y'=1-2xy \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \underline{y'=\frac{1-2xy}{1+x^2+3y^2}}.$$

$y=y(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=y'(x)$; man skriver y' isf. $y'(x)$.

Testövning 4.16 (Sid. 197)

Lösning

(1) $U=R\cdot I \Rightarrow \frac{dU}{dt}=\frac{dR}{dt}\cdot I+R\frac{dI}{dt} \Rightarrow 0=20\cdot I+\frac{dI}{dt}\cdot 100 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 100\frac{dI}{dt}=-20I \Leftrightarrow \frac{dI}{dt}=-0,2I.$

(2) Vid tidpunkten i fråga är strömmen $\frac{1,5}{100}$ A.
Det innebär att $\frac{dI}{dt}=-0,2\cdot 0,015=\underline{-0,003\ A/s}$.

Svar: Strömmen minskar med 3mA/s.

Testövning 4.17 (Sid. 198)

Lösning

(1) $f(x)\cdot g(x)=(u+iv)(s+it)=us-vt+i(vs+ut)$;

(2) $\frac{d}{dx}(us-vt+i(vs+ut))=\frac{d}{dx}(us-vt)+i\frac{d}{dx}(vs+ut)=$
$=\frac{d}{dx}(us)-\frac{d}{dx}(vt)+i(\frac{d}{dx}(vs)+\frac{d}{dx}(ut))=$
$=\underline{\frac{du}{dx}\cdot s+u\cdot\frac{ds}{dx}-\frac{dv}{dx}\cdot t-v\frac{dt}{dx}+i(\frac{dv}{dx}\cdot s+v\frac{ds}{dx}+\frac{du}{dx}t+u\frac{dt}{dx})}$;

(3) $(\frac{d}{dx}f(x))g(x)+f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)=(\frac{d}{dx}(u+iv))\cdot(s+it)+$
$+(u+iv)\frac{d}{dx}(s+it)=(\frac{du}{dx}+i\frac{dv}{dx})\cdot(s+it)+(u+iv)(\frac{ds}{dx}+i\frac{dt}{dx})=$
$=\frac{du}{dx}\cdot s+i\frac{du}{dx}\cdot t+i\frac{dv}{dx}\cdot s-\frac{dv}{dx}\cdot t+u\frac{ds}{dx}+iu\frac{dt}{dx}+iv\frac{ds}{dx}-v\frac{dt}{dx}=$
$=\underline{\frac{du}{dx}\cdot s-\frac{dv}{dx}t+u\frac{ds}{dx}-v\frac{dt}{dx}+i(\frac{du}{dx}\cdot t+\frac{dv}{dx}\cdot s+u\frac{dt}{dx}+v\frac{ds}{dx})}$;

Ur (2) och (3) följer produktregeln för komplexvärda funktioner f och g, nämligen:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Övning 4.18 (Sid. 198)

Lösning

(1) $e^{cx}=\exp\{(a+ib)x\}=\exp\{ax+ibx\}=e^{ax}\cdot e^{ibx}=$

$=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)=\underline{e^{ax}\cos bx+ie^{ax}\sin bx}$;

(2) $\frac{d}{dx}e^{cx}=\frac{d}{dx}e^{ax}\cos bx+i\frac{d}{dx}e^{ax}\sin bx=$

$=\underline{ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx+i(ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx)}$;

(3) $ce^{cx}=(a+ib)e^{(a+ib)x}=(a+ib)(e^{ax}\cos bx+ie^{ax}\sin bx)=$

$=\underline{ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx+i(be^{ax}\cos bx+ae^{ax}\sin bx)}$.

Ur (2) och (3) följer att $\frac{d}{dx}e^{cx}=c\cdot e^{cx}$; $c\in\mathbb{C}$.

Övning 4.19 (Sid. 198)

Lösning

a) $y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=u^{1/2}\Rightarrow\frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u^{-1/2}\\ u=1-x^2\Rightarrow\frac{du}{dx}=-2x\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=$

$=\frac{1}{2}u^{-1/2}\cdot(-2x)=-x/\sqrt{u}=\underline{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$. $(y=f(x)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=f'(x))$.

b) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\Leftrightarrow(x+1)^2\cdot f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow\frac{d}{dx}(x+1)^2f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x+1)f(x)+(x+1)^2f'(x)=(x+1)(2f(x)+(x+1)f'(x))=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow 2f(x)+(x+1)f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(x+1)}\Leftrightarrow(x+1)f'(x)=-2f(x)+$

$+\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}=\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}-2\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\frac{x+1-4x}{2\sqrt{x}\cdot(x+1)^2}=\frac{1-3x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow\underline{f'(x)=\frac{1-3x}{2\sqrt{x}(x+1)^3}}$.

c) $f(x)=\ln\frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}=\ln(x+1)^3-\ln x^{1/2}=3\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln x$

$f'(x)=\frac{d}{dx}3\ln(x+1)-\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln x=3\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x}=\underline{\frac{5x-1}{2x(x+1)}}$.

Se anm. till Testövning 4.12 b).

d) $f(x)=x\ln|x|-x\Rightarrow f'(x)=\frac{d}{dx}(x\ln|x|)-1=1\cdot\ln x+$

$+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln|x|+1-1=\underline{\ln|x|}$.

e) $f(x)=e^{\sin^2x}\Rightarrow f'(x)=\frac{d}{dx}e^{\sin^2x}=e^{\sin^2x}\frac{d}{dx}\sin^2x=$

$=e^{\sin^2x}\cdot 2\sin x\frac{d}{dx}\sin x=e^{\sin^2x}\cdot 2\sin x\cos x=$

$=\underline{e^{\sin^2x}\cdot\sin 2x}$.

f) $\underline{f(x)=\ln(e^{\cos x}+1)}\Leftrightarrow e^{f(x)}=e^{\cos x}+1\Leftrightarrow\frac{d}{dx}e^{f(x)}=$

$=\frac{d}{dx}e^{\cos x}\Leftrightarrow e^{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)=e^{\cos x}\frac{d}{dx}\cos x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(e^{\cos x}+1)f'(x)=e^{\cos x}\cdot(-\sin x)\Leftrightarrow\underline{f'(x)=\frac{-\sin x}{e^{\cos x}+1}e^{\cos x}}$.

Man kan variera reglerna vid behov.

Övning 4.20 (Sid. 198)

Lösning

$f(x)=\cot x=(\tan x)^{-1} \Rightarrow f'(x)=-(\tan x)^{-2}\cdot\frac{d}{dx}\tan x=$

$=-(\tan x)^{-2}\frac{1}{\cos^2 x}=-(\cot x)^2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=$

$=\underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\underline{-1-\cot^2 x}.$

Övning 4.21 (Sid. 198)

Lösning

a) $y=\arcsin 2x \Leftrightarrow \sin y=2x \wedge -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2};$

$\frac{d}{dx}\sin y=2 \Leftrightarrow \cos y\frac{dy}{dx}=2 \Leftrightarrow \sqrt{1-\sin^2 y}\,\frac{dy}{dx}=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-4x^2}\,\frac{dy}{dx}=2 \Leftrightarrow \underline{\frac{d}{dx}\arcsin 2x=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}.$

b) $\frac{d}{dx}(x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2})=\frac{d}{dx}(x\arcsin x)+\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}=$

$=1\cdot\arcsin x+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\underline{\arcsin x}.$

Se f.ö. 4.19 a).

c) $\frac{d}{dx}\arctan\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{1+(\sqrt{x^2-1})^2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2-1)^{1/2}=$

$=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2}(x^2-1)^{-1/2}\cdot 2x=\underline{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ |x|>1}.$

d) $\frac{d}{dx}\sin(\arccos x)=\cos(\arccos x)\frac{d}{dx}\arccos x=\underline{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}.$

Övning 4.22 (Sid. 198)

Lösning

$\underline{y=\arccos x} \Leftrightarrow \underline{\cos y=x \wedge 0\leq y\leq\pi};$

$\frac{d}{dx}\cos y=1 \Leftrightarrow -\sin y\,\frac{dy}{dx}=1 \Leftrightarrow -\sqrt{1-\cos^2 y}\,\frac{dy}{dx}=1$

$\Leftrightarrow -\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}=1 \Leftrightarrow \underline{\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$

Testövning 4.23 (Sid. 205)

Lösning

a) $f(x)=\frac{x+2}{x^2+5} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+5)-2x(x+2)}{(x^2+5)^2}=\frac{-x^2-4x+5}{(x^2+5)^2}=$

$=\frac{-(x^2+4x-5)}{(x^2+5)^2}=\frac{-(x+5)(x-1)}{(x^2+5)^2}=\frac{(x+5)(1-x)}{(x^2+5)^2};\quad \underline{(x^2+5)^2>0}.$

		−5		1		x
sgn(x+5)	−	0	+	+	+	
sgn(1−x)	+	+	+	0	−	
sgn f′(x)	−	0	+	0	−	
f(x)	↘	-0,1	↗	0,5	↘	

Resultat: f är växande för $-5<x<1$ (se ovan) och avtagande för $x<-5$ och $x>1$. $(-5,-\frac{1}{10})$ är en lokal minimipunkt; $(1,\frac{1}{2})$ är en lokal maximipunkt.

b) $\underline{f(x)=x^2+2|x-1|}$

$f(x)=2x^2+x^2\sin\frac{1}{x}=x^2(2+\sin\frac{1}{x})\geq 0$, för alla x och $f(0)=0$, så $f(0)=0$ är ett lokalt minimum.

Övning 4.26 (Sid. 209)

Lösning

a) $f(u)=\cos u \Rightarrow f'(u)=-\sin u$;

Medelvärdessatsen $\Rightarrow \cos x-\cos y=(-\sin\xi)(x-y)$, där $x<\xi<y$; det gäller som bekant att $D_{\sin}=[-1,+1]$

$\Rightarrow |\cos x-\cos y|=|-\sin\xi\cdot(x-y)|=|\sin\xi|\cdot|x-y|\leq|x-y|$

b) $-\frac{\pi}{6}\leq\xi\leq\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\leq\sin\xi\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow|\sin\xi|\leq\frac{1}{2}$;

$-\frac{\pi}{6}<x<\xi<y<\frac{\pi}{6}\Rightarrow|\cos x-\cos y|=|\sin\xi|\,|x-y|\leq\frac{1}{2}|x-y|$.

Testövning 4.27 (Sid. 213)

Lösning

a) $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-2}$.

(1) f är definierad för alla x utom $x\neq 2$.

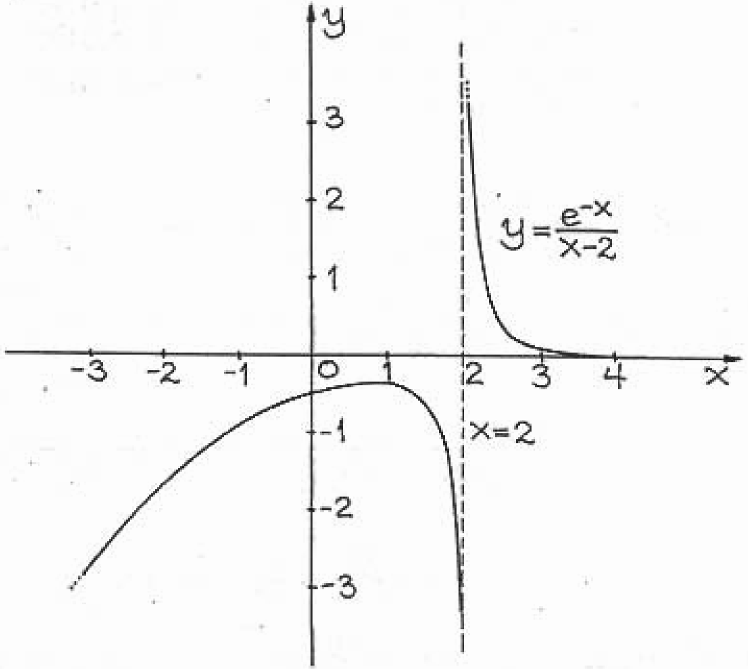
(2) $\lim_{x\to 2^-}f(x)=-\infty$ och $\lim_{x\to 2^+}f(x)=\infty$, så linjen $x=2$ är en lodrät asymptot.

(3) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x-2}=\frac{0^+}{+\infty}=0^+\Rightarrow$ x-axeln (vågrät) asymptot i $+\infty$. Andra asymptoter finns inte.

(4) $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-e^{-x}}{x-2}-\frac{e^{-x}}{(x-2)^2}=\frac{1-x}{(x-2)^2}e^{-x}$.

x	$-\infty$		1		2		∞
$\operatorname{sgn} f'(x)$	$-\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty \mid -\infty$	$-$	0^-
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-e^{-1}$	↘	$-\infty \mid \infty$	↘	0^+

x	-2	-1	0	$0{,}5$	$1{,}5$	$2{,}5$	3	$3{,}5$
y	$-1{,}8$	$0{,}9$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}5$	$0{,}2$	$0{,}05$	≈ 0



b) $f(x)=\frac{x^2+5}{|x-1|+1}$.

(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+5}{x-1+1}, & x\geq 1\\ \frac{x^2+5}{-x+1+1}, & x<1\end{cases}=\begin{cases}\frac{x^2+5}{x}, & x\geq 1\\ \frac{x^2+5}{2-x}, & x<1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{x^2-5}{x^2}, & x>1\\ \frac{-x^2+4x+5}{(2-x)^2}, & x<1\end{cases}$;

Observera att f är en kontinuerlig funktion.

(2) $\underline{x>1}$: $f'(x)=\frac{x^2-5}{x^2}=\frac{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{x^2}=\frac{x+\sqrt{5}}{x^2}\cdot(x-\sqrt{5})$;

$\underline{x<1}$: $f'(x)=\frac{-x^2+4x+5}{(2-x)^2}=-\frac{x^2-4x-5}{(2-x)^2}=-\frac{(x+1)(x-5)}{(2-x)^2}$;

(3) Finns det några asymptoter månne?

$x>1 \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+5}{x}=x+\frac{5}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0$

$\Rightarrow y=x$ (sned) asymptot i ∞.

$x<1 \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+5}{2-x}=-x-2+\frac{9}{2-x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-x-2))=$

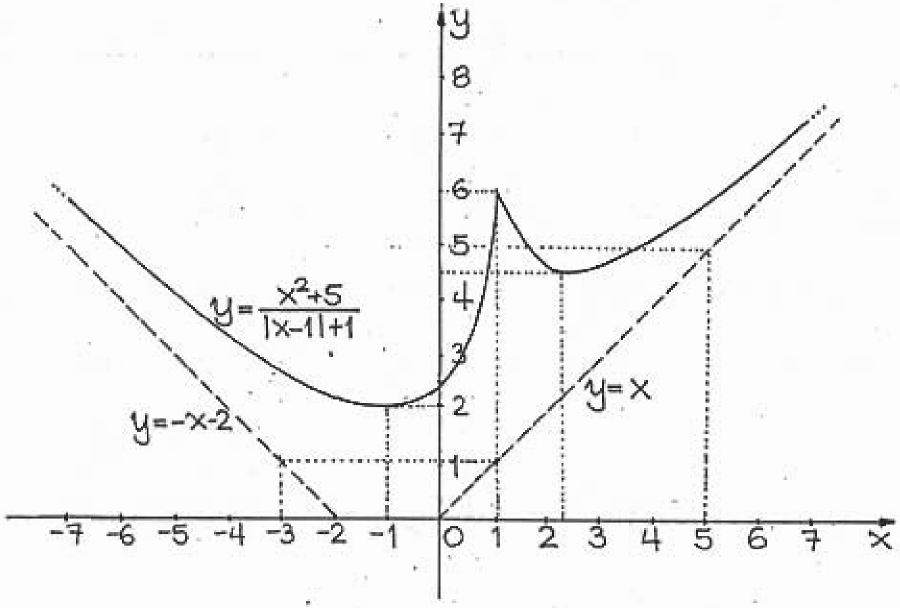
$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-9}{x-2}=0^+ \Rightarrow \underline{y=-x-2 \text{ sned a-tot i } -\infty}$.

(4)

x	$-\infty$		-1		1		$\sqrt{5}$		∞
$\text{sgn} f'(x)$	-1^+	$-$	0	$+$	$8 \mid -4$	$-$	0	$+$	1^-
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	6	↘	$2\sqrt{5}$	↗	∞

(5)

x	-5	-3	-2	0,5	1,5	3	4	6
y	4,3	2,8	2,3	3,5	4,8	4,7	5,2	6,8



Övning 4.28 (Sid. 215)

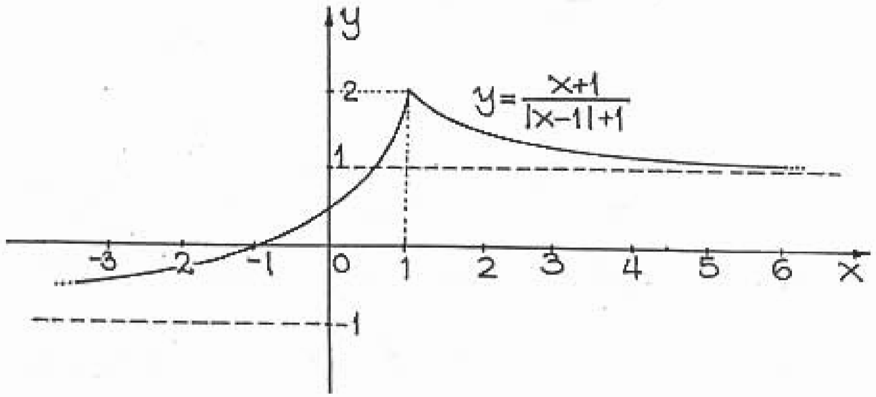
Lösning

$$f(x)=\frac{x+1}{|x-1|+1}=\begin{cases}\frac{x+1}{x-1+1}, & x\geq 1\\ \frac{x+1}{-x+1+1}, & x<1\end{cases}=\begin{cases}\frac{x+1}{x}, & x\geq 1\\ \frac{x+1}{2-x}, & x<1\end{cases}=\begin{cases}1+\frac{1}{x}, & x\geq 1\\ -1-\frac{3}{x-2}, & x<1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}, & x>1\\ \frac{3}{(x-2)^2}, & x<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f \text{ strängt avtagande i } x>1\\ f \text{ strängt växande i } x<1\end{cases}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\text{sgn}(f'(x))$	0^+	$+$	$3 \mid -1$	$-$	0^-
$f(x)$	-1^+	↗	2	↘	1^+

x	-4	-3	-2	-1	0	2	3	4
y	-0,5	-0,4	-0,25	0	0,5	1,5	1,3	1,25



a) $f_{max}=f(1)=2$, f_{min} antas inte (eg. saknas)

b) $f_{max}=f(1)=2$, $f_{min}=f(0)=1/2$.

Problemet kan lösas grafiskt (utan derivator).

Testövning 4.29 (Sid. 216)

Lösning

Betrakta funktionen f given av $f(x)=VL-HL$;

(1) $f(x)=\arctan x-(x-\frac{x^3}{3})=\arctan x-x+\frac{1}{3}x^3$;

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+x^2=\frac{1-(1+x^2)(1-x^2)}{1+x^2}=\frac{1-(1-x^4)}{1+x^2}=\frac{x^4}{1+x^2}\geq 0$$

$\Rightarrow$ f strängt växande.

(2) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ och $\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty$.

(3) f antar alla reella värden exakt en gång!

$f(0)=0 \Rightarrow f(x)>0$ för alla positiva reella tal.

Resultat: $\arctan x \geq x-\frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow x\geq 0$.

Anm. Att visa att $g(x)\geq h(x)$ är detsamma som att visa att $f(x)=g(x)-h(x)\geq 0$.

Testövning 4.30 (Sid. 217)

Lösning

Funktionen $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x>0$, studeras. Uppgiften kommer att lösas grafiskt, dvs i samma koordinatsystem uppritas grafen till $y=f(x)$ och linjen $y=k$, för olika k.

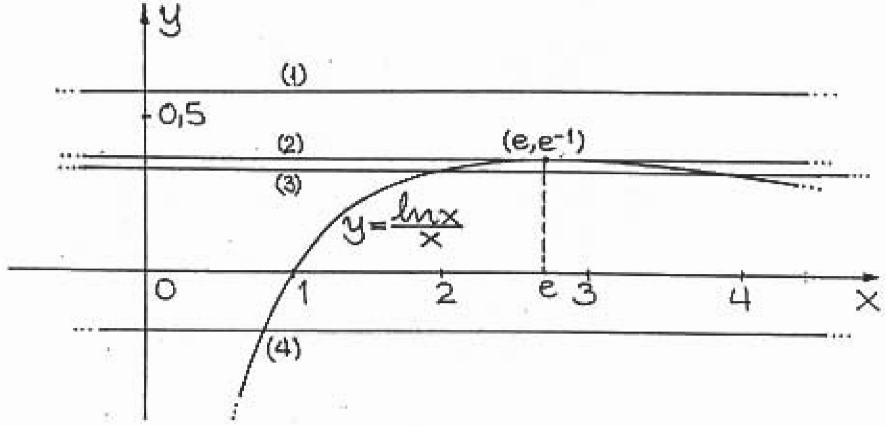
$$f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e;$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0<x<e \Leftrightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f \text{ strängt växande} \\ x>e \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f \text{ strängt avtagande} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)\leq f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}=f_{max}$ (globalt maximum).

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty \Rightarrow$ y-axeln a-tot i $-\infty$.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+ \Rightarrow$ x-axeln a-tot i $+\infty$.



Antalet rötter till ekvationen $\ln x=kx$ är lika med antalet skärningspunkter mellan graferna till $y=\frac{\ln x}{x}$ och $y=k$; det finns 4 olika fall.

Resultat: (1) $k>e^{-1}$: 0 rötter; (2) $k=e^{-1}$: en dubbelrot; (3) $0<k<e^{-1}$: 2 olika rötter; (4) $k\leq 0$: 1 rot.

Övning 4.31 (Sid. 217)

Lösning

a) $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x+1}=x-2+\frac{4}{x+1},\ x\neq -1$

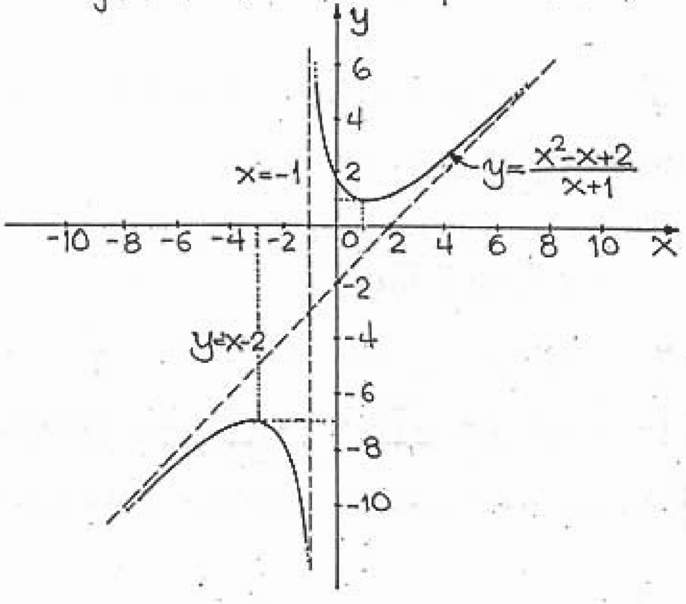
$$(1)\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow x=-1 \text{ lodrät asymptot i } \pm\infty.$$

$$(2)\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(x-2))=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x+1}=0^-\\ \lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)-(x-2))=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{4}{x+1}=0^-\end{cases}\Rightarrow y=x-2 \text{ är}$$

en (global) asymptot (en tvåsidig a-tot).

$$(3)\ f'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-2^2}{(x+1)^2}=\frac{(x+1+2)(x+1-2)}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2};$$

x	$-\infty$		-3		-1		1		∞
sgn $f'(x)$	1^-	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	1^-
$f(x)$	$-\infty$	↗	-7	↘	$-\infty \| \infty$	↘	1	↗	



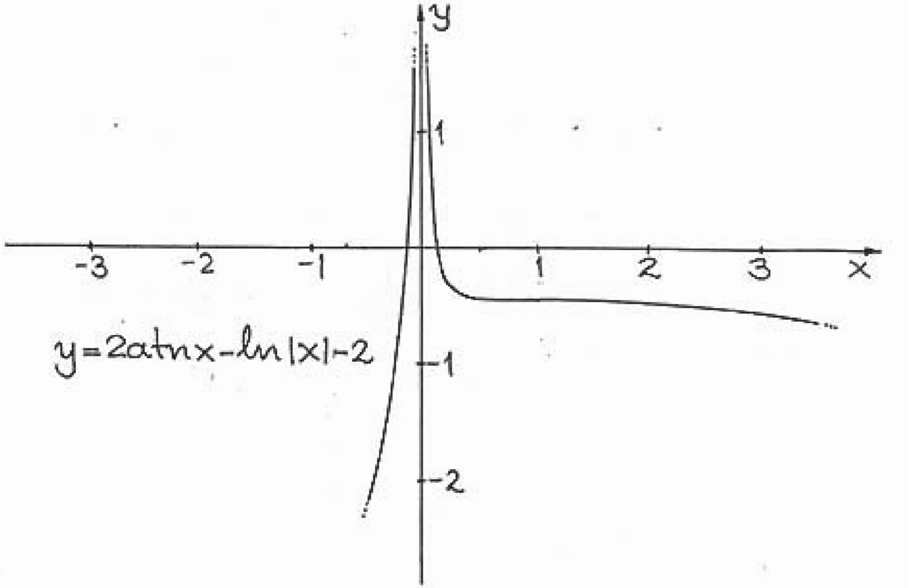
b) $f(x)=2\arctan x-\ln|x|-2,\ x\neq 0.$

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2x-(x^2+1)}{x(x^2+1)}=\frac{-(x-1)^2}{x(x^2+1)};$$

$$\begin{cases}x<0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f \text{ strängt växande}\\ x>0\Rightarrow f'(x)\leq 0\Rightarrow f \text{ strängt avtagande}\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f(1)=\frac{\pi}{2}-2$ inget extremum ($x=1$ terrasspunkt).

x	-2	-1	-0,5	-0,3	0,2	0,5	1,5	2	2,5	3
y	-4,91	-3,57	-2,23	-1,37	0,004	-0,38	-0,44	-0,48	-0,5	-0,6



Övning 4.32 (Sid. 217)

Lösning

$f(x)=\sin x\cos x+\cos x,\ 0\leq x\leq 2\pi.$

$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x\Rightarrow f'(x)=\cos 2x-\sin x;$

$f'(x)=0 \Rightarrow 1-2\sin^2 x-\sin x=0 \Leftrightarrow \sin^2 x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}=\frac{-1\pm 3}{4} \Leftrightarrow \sin x=-1 \vee \sin x=\frac{1}{2}$

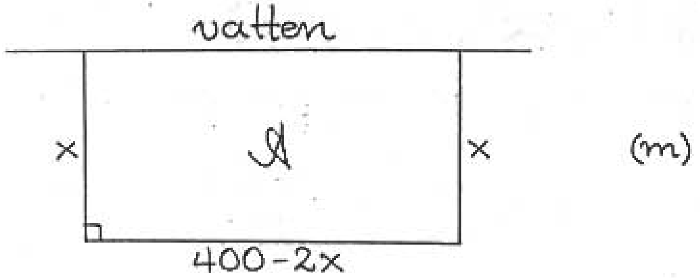
$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2} \vee x=\frac{\pi}{6} \vee x=\frac{5\pi}{6}$ (Obs! $0\leq x\leq 2\pi$).

x	0	$\pi/6$	$5\pi/6$	$3\pi/2$	2π
y	1	$3\sqrt{3}/4$	$-3\sqrt{3}/4$	0	1

Resultat: Största värdet $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ antas i $x=\frac{\pi}{6}$; minsta värdet $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ antas i $x=\frac{5\pi}{6}$.

Övning 4.33 (Sid. 217)

Lösning



$\mathcal{A}=f(x)=x(400-2x)=400x-2x^2,\ 0<x<200$

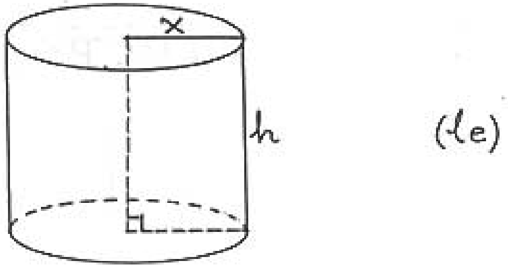
$f'(x)=400-4x=0 \Leftrightarrow x=100;$

$f''(x)=-4<0 \Rightarrow \mathcal{A}_{max}=f(100)=20000\ m^2.$

Resultat: Störst area fås om sidornas dimensioner är 100m resp. 200m. F.ö. se ovan.

Övning 4.34 (Sid. 218)

Lösning



$\mathcal{A}=2\cdot\pi x^2+2\pi x h=2\pi x(x+h) \Leftrightarrow h=\frac{\mathcal{A}}{2\pi x}-x;$

Jag sätter $\lambda=\frac{\mathcal{A}}{2\pi}$ (= konstant)

$V=\pi x^2 h=\pi x^2\left(\frac{\lambda}{x}-x\right)=\pi(\lambda x-x^3);$ (*)

$f(x)=\lambda x-x^3 \Rightarrow f'(x)=\lambda-3x^2=-3\left(x-\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right);$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=\sqrt{\lambda/3}$; (den negtiva roten ratas).

$f''(x)=-6x \Rightarrow f''\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right)=-6\sqrt{\frac{\lambda}{3}}<0.$ (max antas)

$f_{max}=f\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right)=\lambda\sqrt{\frac{\lambda}{3}}-\frac{\lambda}{3}\sqrt{\frac{\lambda}{3}}=2\cdot\frac{\lambda}{3}\sqrt{\frac{\lambda}{3}}=2\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{3/2} \overset{(*)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \underline{V_{max}=2\pi\left(\frac{\mathcal{A}}{6\pi}\right)^{3/2}}.$

Övning 4.35 (Sid. 218)

Lösning

Betrakta funktionen ($HL-VL=f(x)$):

$f(x)=\arctan x-\ln(1+x)+\frac{x^2}{2},\ x>-1.$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}+x=\frac{x-x^2}{(x+1)(x^2+1)}+x=\frac{x-x^2+x(x+1)(x^2+1)}{(x+1)(x^2+1)}=$$

$$=\frac{x-x^2+x(x^3+x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{x-\cancel{x^2}+x^4+x^3+\cancel{x^2}+x}{(x+1)(x^2+1)}=$$

$$=\frac{x^4+x^3+2x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{x^3+x+2}{(x+1)(x^2+1)}\cdot x\ ;\ \left(\frac{x^3+x+2}{(x+1)(x^2+1)}>0\right).$$

$$\left.\begin{cases}-1<x<0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f \text{ avtagande}\\ x>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f \text{ växande}\end{cases}\right\} \Rightarrow f(x) \geq f(0)=0.$$

$f(x)>0 \Leftrightarrow \underline{-1<x<0 \vee x>0}.$

Övning 4.36 (Sid. 218)

Lösning

$f(x)=x^3-9x^2+24x-15 \Rightarrow f'(x)=3x^2-18x+24=$

$=3(x^2-6x+8)=3(x-2)(x-4)\ ;\ (*)$

$$0<x<1 \Rightarrow \begin{cases}-2<x-2<-1\\ -4<x-4<-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-2<0\\ x-4<0\end{cases} \overset{(*)}{\Rightarrow} f'(x)>0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f strängt växande $\Rightarrow$ f antar alla värden i intervallet $]f(0), f(1)[\,=\,]-15, 1[$ exakt en gång. 0 ligger i detta intervall, så $f(x)=0$ har exakt en rot.

Anm. $f(x)<0 \Leftrightarrow 2<x<4$ s.a. $0<x<1 \Rightarrow f'(x)>0$.

Övning 4.37 (Sid. 218)

Lösning

a) $2+x-x^2=k \Leftrightarrow x^2-x=2-k \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2-k}=$

$=\frac{1\pm\sqrt{9-4k}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{\Delta}}{2}\ ;\ \Delta=9-4k$, diskriminanten.

(1) $\Delta>0 \Leftrightarrow 9-4k>0 \Leftrightarrow k<\frac{9}{4} \Rightarrow$ 2 olika rötter.

(2) $\Delta=0 \Leftrightarrow k=\frac{9}{4} \Rightarrow$ 1 (dubbel) rot.

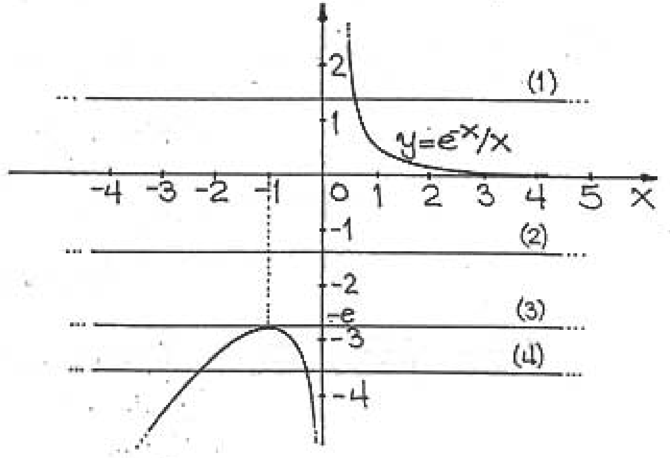
(3) $\Delta<0 \Leftrightarrow k>\frac{9}{4} \Rightarrow$ inga reella rötter.

Anm. Man kan lösa uppgiften grafiskt...

b) $\underline{f(x)=\frac{e^{-x}}{x},\ x\neq 0.}$

$f'(x)=\frac{-e^{-x}}{x}-\frac{e^{-x}}{x^2}=\frac{-(x+1)}{x^2}e^{-x}\ ;$

	$-\infty$		-1		0		∞
sgn f'(x)	∞	$+$	0	$-$	$-\infty \mid -\infty$	$-$	0^-
f(x)	$-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty \mid +\infty$	↘	0^+



vg vänd

Resultat: (1) $k>0$: 1 rot ; (2) $-e<k\leq 0$: 0 rötter ; (3) $k=-e$: 1 dubbelrot ; (4) $k<-e$: 2 olika rötter.

Testövning 4.38 (Sid. 221)

Lösning

a) $f(x)=e^{-x^2}$;

$f'(x)=e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2xe^{-x^2}=-2xf(x)$;

$f''(x)=-2f(x)-2xf'(x)=-2f'(x)-2x(-2xf(x))=(4x^2-2)f(x)$;

$f'''(x)=8xf(x)+(4x^2-2)f'(x)=8xf(x)+(4x^2-2)(-2xf(x))=$

$=8xf(x)+(4x-8x^3)f(x)=(12x-8x^3)f(x)$.

Resultat: $f'(x)=-2xe^{-x^2}$, $f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2}$ och

$f'''(x)=(12x-8x^3)e^{-x^2}$.

b) $f(x)=x\cdot\arctan x$;

$f'(x)=1\cdot\arctan x+x\cdot\frac{1}{x^2+1}=\arctan x+\frac{x}{x^2+1}$;

$f''(x)=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-x^2+1}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{(x^2+1)^2}$;

$f'''(x)=-4(1+x^2)^{-3}\cdot 2x=-\frac{8x}{(1+x^2)^3}$.

Resultat: $f'(x)=\arctan x+x/(x^2+1)$, $f'(x)=\frac{2}{(x^2+1)^2}$

och $f'''(x)=-\frac{8x}{(x^2+1)^3}$.

Testövning 4.39 (Sid. 221)

Lösning

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

(1) $x\neq 0 \Rightarrow f'(x)=1+2x\cos\frac{1}{x}+x^2(-\sin\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})=1+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$

$$f'(x)=\begin{cases} 1+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases};$$

(2) $x\neq 0 \Rightarrow f''(x)=2\cos\frac{1}{x}+2x(-\sin\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})+\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})=$

$=2\cos\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}=(2-\frac{1}{x^2})\cos\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x}$.

$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}(2\cos\frac{1}{h}+\frac{1+\sin(1/h)}{h})$;

$f''(0)$ existerar inte.

Svar: $f''(x)=\begin{cases} (2-x^{-2})\cos\frac{1}{x}+2x^{-1}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ \text{(existerar inte för } x=0) \end{cases}$

Övning 4.40 (Sid. 221)

Lösning

a) $f(x)=xe^{-x}$;

$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x(-e^{-x})=-(x-1)e^{-x}$;

forts

$f''(x) = (-1)e^{-x} - (x-1)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x} = (-1)^2(x-2)e^{-x};$

$f'''(x) = 1e^{-x} + (x-2)(e^{-x}\cdot(-1)) = (3-x)e^{-x} = (-1)^3(x-3)e^{-x};$

Påstående: $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{-x}$

Bevis: Jag tillgriper induktionsbevis.

(1) Antag att $f^{(\nu)}(x) = (-1)^\nu(x-\nu)e^{-x}$, för ett $\nu \geq 1$.

$f^{(\nu+1)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(\nu)}(x) = \frac{d}{dx}(-1)^\nu(x-\nu)e^{-x} = (-1)^\nu e^{-x} +$

$+ (-1)^\nu(x-\nu)(-e^{-x}) = (-1)^\nu(\nu-x+1)e^{-x} = (-1)^\nu(\nu+1-x)e^{-x} =$

$= (-1)^\nu(-1)(x-(\nu+1))e^{-x} = (-1)^{\nu+1}(x-(\nu+1))e^{-x}.$

(2) $f^{(1)}(x) = f'(x) = -(x-1)e^{-x} = (-1)^1\cdot(x-1)e^{-x}.$

Induktionen är därmed genomförd.

Anm. Det finns en formel för den n:te derivatan av en produkt (Leibniz' formel):

$$D^n f\cdot g = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}.$$

$D^n(xe^{-x}) = D^n(e^{-x}\cdot x) = (D^n e^{-x})x + (D^{n-1}e^{-x})\cdot 1\cdot n =$

$= (-1)^n e^{-x}\cdot x + (-1)^{n-1}e^{-x}\cdot n =$

$= (-1)^n x e^{-x} - (-1)^n n e^{-x} =$

$= (-1)^n(x-n)e^{-x}.$

Det gäller som bekant att $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$.

b) $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x)$, $-1<x<1$.

$f'(x) = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = (x-1)^{-1} - (x+1)^{-1}$

$f''(x) = (-1)\cdot(x-1)^{-2} - (-1)(x+1)^{-2};$

$f'''(x) = (-1)(-2)(x-1)^{-3} - (-1)(-2)(x+1)^{-3};$

$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4} - (-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4} =$

$= (-1)(-2)(-3)((x-1)^{-4} - (x+1)^{-4}) =$

$= (-1)^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot((x-1)^{-4} - (x+1)^{-4}) =$

$= (-1)^3\cdot 3!((x-1)^{-4} - (x+1)^{-4}) =$

$= (-1)^{4-1}\cdot(4-1)!((x-1)^{-4} - (x+1)^{-4}).$

Allmänt gäller $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!((x-1)^{-n} - (x+1)^{-n})$. Detta bevisas med induktion...

Övning 4.41 (Sid. 221)

Lösning

$$f(x) = \begin{cases} x^4\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(1) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^4\cos\frac{1}{x} = 0 = f(0) \Rightarrow f$ kontinuerlig.

Anm. $x \neq 0 \Rightarrow |x^4\cos\frac{1}{x}| = x^4|\cos\frac{1}{x}| \leq x^4 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, så $\lim_{x\to 0} x^4\cos\frac{1}{x} = 0$ (instängningsregeln).

(2) $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx} x^4 \cos\frac{1}{x} = 4x^3 \cos\frac{1}{x} + x^4(-\sin\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) =$

$= 4x^3 \cos\frac{1}{x} + x^2 \sin\frac{1}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h^3 \sin\frac{1}{h} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} 4x^3\cos\frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 = f'(0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'$ kontinuerlig (f kontinuerligt deriverbar)

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} + 4x^3\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(3) $x \neq 0 \Rightarrow f''(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 \cos\frac{1}{x} + x^2 \sin\frac{1}{x}) =$

$= 12x^2 \cos\frac{1}{x} + 4x^3(-\sin\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) +$

$+ 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2}) =$

$= (12x^2 - 1)\cos\frac{1}{x} + 6x \sin\frac{1}{x}$;

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h \sin\frac{1}{h} + 4h^2 \cos\frac{1}{h}) = 0 = f''(0)$.

Resultat: $f''(x) = \begin{cases} (12x^2-1)\cos\frac{1}{x} + 6x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Anm. $\lim\limits_{x\to 0} f''(x)$ existerar inte.

Övning 4.42 (Sid. 221)

$f(x) = e^x + \cos 2x - \sin x \Rightarrow f''(x) = e^x - 4\cos 2x + \sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(0) = 1 - 4 + 0 = -3 < 0 \Rightarrow f(0) = 2$ lok/max.

Sats 4.12 konsulteras.

Testövning 4.43 (Sid. 224)

Lösning

a) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x > 0$, för alla x.

f är strängt konvex för alla x.

b) $f(x) = \ln|x| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$;

f är strängt konkav för $x<0$ och $x>0$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(x) =$

$= \frac{-2x}{(1+x^2)2} - \frac{4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3} =$

$= \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$;

…		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		→ x
sgn$(x+\sqrt{3})$	−	0	+	+	+	+	+	
sgn(x)	−	−	−	0	+	+	+	
sgn$(x-\sqrt{3})$	−	−	−	−	−	0	+	
sgn $f''(x)$	−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	∩	$\frac{-\sqrt{3}}{4}$	∪	0	∩	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	∪	

f är strängt konvex för $-\frac{\sqrt{3}}{4} < x < 0$ och $x > \frac{\sqrt{3}}{4}$

och strängt konkav för $x < -\frac{\sqrt{3}}{4}$ och $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Övning 4.44 (Sid. 225)

Lösning

a) $f(x)=\frac{1}{x^2+3} \Rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+3)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{-2}{(x^2+3)^2}+\frac{8x^2}{(x^2+3)^3}=$
$=\frac{8x^2-2(x^2+3)}{(x^2+3)^3}=\frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}=\frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$;

…		-1		1		$\rightarrow x$
sgn$(x+1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
sgn$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
sgn$(f''(x))$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\cup$	$\frac{1}{4}$	$\cap$	$\frac{1}{4}$	$\cup$	

$x=-1$ och $x=1$ är f:s inflexionspunkter.

f är strängt konvex för $x<-1$ och $x>1$ och strängt konkav för $-1<x<1$.

b) $f(x)=2x^5-10x^4+15x^3-11x \Rightarrow f'(x)=10x^4-40x^3+45x^2-11$
$\Rightarrow f''(x)=40x^3-120x^2+90x=40x(x^2-3x+\frac{9}{4})=40x(x-\frac{3}{2})^2$.

…		0		$3/2$		$\rightarrow x$
sgn$(40x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
sgn$(x-1{,}5)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	
sgn $f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$\cap$	0	$\cup$	$-10{,}4$	$\cup$	

$x=0$ är en inflexionspunkt.

f är strängt konvex för $x>0$ och strängt konkav för $x<0$.

Övning 4.45 (Sid. 225)

Lösning

f strängt konvex på $I \Rightarrow f'(x)>0$ på I, ty $f''(x)=(f'(x))'>0$. Men $f'(a)=0$ innebär att $f'(x)<0$ för $x<a$, $x\in I$, och $f'(x)>0$ för $x>a$, $x\in I$. För lokalt minimum gäller som bekant $-0+$ för förstaderivatan i a; $f(a)$ är således det minsta värdet på I.

Testövning 4.46 (Sid. 227)

Lösning (medelst intervallhalvering)

$f(x)=x^3+x-1$.

(1) $f(0)=-1 \wedge f(1)=1 \Rightarrow 0<x_0<1$;

(2) $f(0)=-1 \wedge f(\frac{1}{2})=-\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}<x_0<1$;

(3) $f(\frac{1}{2})=-\frac{3}{4} \wedge f(\frac{3}{4})=\frac{11}{64} \Rightarrow \frac{1}{2}<x_0<\frac{3}{4}$;

(4) $f(\frac{1}{2})=-\frac{3}{4} \wedge f(\frac{5}{8})=-\frac{67}{512} \Rightarrow \frac{5}{8}<x_0<\frac{3}{4}$;

(5) $f(\frac{5}{8})=-\frac{67}{512} \wedge f(\frac{11}{16})=\frac{51}{4096} \Rightarrow \frac{5}{8}<x_0<\frac{11}{16}$;

(6) $f(\frac{5}{8})=-\frac{67}{512} \wedge f(\frac{21}{32})=-\frac{2003}{32768} \Rightarrow \frac{21}{32}<x_0<\frac{11}{16}$;

(7) $f(\frac{21}{32})=-0{,}0611 \wedge f(\frac{43}{64})=-0{,}0248 \Rightarrow \frac{43}{64}<x_0<\frac{11}{16}$;

Mittpunkten på intervallet $]\frac{43}{64}, \frac{11}{16}[$, nämligen $\frac{87}{128} \approx 0,6796875$ duger, ty $f(\frac{87}{128})=0,006$.

Svar: $x=0,68$ (med intervallhalvering).

Testövning 4.47 (Sid. 231)

Lösning

(1) $f(x)=x^3-a=0; \quad f'(x)=3x^2;$

$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3-a}{3x_n^2}=\frac{2x_n^3+a}{3x_n^2}, \; n=1,2,3.$

(2) $x_{n+1}=\frac{2x_n^3+2}{3x_n^2}, \; x_1=1;$

(3) $x_2=\frac{4}{3} \Rightarrow x_3=\frac{91}{72} \Rightarrow x_4=\frac{2253638}{1788696}=1,259933493.$

Övning 4.48 (Sid. 231)

Lösning

$f(x)=x^m-a=0; \quad f'(x)=mx^{m-1};$

$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^m-a}{mx_n^{m-1}}=\frac{mx_n^m-x_n^m+a}{mx_n^{m-1}}=\frac{(m-1)x_n^m+a}{mx_n^{m-1}}, m>0.$

Övning 4.49 (Sid. 231)

Lösning

$f(x)=x^2+x-1=0; \; f'(x)=2x+1; \; x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2+x_n-1}{2x_n+1},$

(1) $x_{n+1}=\frac{x_n^2+1}{2x_n+1} \quad x_1=1;$

$x_2=\frac{2}{3}, \; x_3=\frac{4/9+1}{4/3+1}=\frac{9(4/9+1)}{9(2/3+1)}=\frac{13}{21}=0,\overline{619047}.$

(2) $x_{n+1}=\frac{x_n^2+1}{2x_n+1}, \; x_1=-2;$

$x_2=\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}; \; x_3=\frac{25/9+1}{-10/3+1}=\frac{34}{-21}=-\frac{34}{21}=-1,\overline{619047}.$

(3) $x^2+x=1 \Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dessa kan jämföras med de approximativt funna avn:

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0,618034 \; (0,619048); \quad \hat{x}_1 \approx 0,62.$

$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=-1,618034 \; (-1,619048). \quad \hat{x}_2 \approx -1,62.$

Testövning 4.50 (Sid. 235)

Lösning

a) $z=x^2+2xy+3y^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=2x+2y & (y \text{ 'konstant'}) \\ \frac{\partial z}{\partial y}=2x+6y & (x \text{ 'konstant'}). \end{cases}$

b) $z=\frac{x+y}{x-y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot 1}{(x-y)^2}=\frac{x-y-x-y}{(x-y)^2}=-\frac{2y}{(x-y)^2}. \\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1(x-y)-(x+y)(-1)}{(x-y)^2}=\frac{x-y+x+y}{(x-y)^2}=\frac{2x}{(x-y)^2}. \end{cases}$

c) $u=xy^2z^3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3 & (y,z \text{ 'konstanter'}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}=x\cdot 2y\cdot z^3=2xyz^3 & (x;z \text{ 'konstanter'}). \\ \frac{\partial u}{\partial z}=xy^2\cdot 3z^2=3xy^2z^2 & (x,y \text{ 'konstanter'}) \end{cases}$

Testövning 4.51 (Sid. 237)

Lösning

$\underline{f(x,y)=x^2+y^2} \Rightarrow f'_x(x,y)=2x \wedge f'_y(x,y)=2y;$

$f(x,y)=f(1,2)+f'_x(1,2)(x-1)+f'_y(1,2)(y-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow z=5+2(x-1)+4(y-2) \Leftrightarrow \underline{2x+4y-z=5}.$

Testövning 4.52 (Sid. 238)

Lösning

a) $$z=\arctan\frac{x}{y} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{1}{1+(x/y)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{1}{1+(x/y)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy=\underline{\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}}.$$

b) $u=xyz \Rightarrow du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=\underline{yzdx+}$

$\underline{+xzdy+xydz}.$

Övning 4.53 (Sid. 238)

Lösning

a) $$z=e^{x/y} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}e^{x/y}=e^{x/y}\frac{\partial}{\partial x}(x/y)=\frac{1}{y}e^{x/y} \\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}e^{x/y}=e^{x/y}\frac{\partial}{\partial y}e^{x/y}=-\frac{x}{y^2}e^{x/y} \end{aligned}\right.$$

Anm. $\frac{\partial}{\partial x}f(g(x,y))=f'(g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}$ osv.

b) $$u=\frac{1}{x+y^2+z^3} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}&=-\frac{1}{(x+y^2+z^3)^2}\cdot 1=-\frac{1}{(x+y^2+z^3)^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{1}{(x+y^2+z^3)^2}\cdot 2y=\frac{-2y}{(x+y^2+z^3)^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial z}&=-\frac{1}{(x+y^2+z^3)^2}\cdot 3z^2=\frac{-3z^2}{(x+y^2+z^3)^2}; \end{aligned}\right.$$

Övning 4.54 (Sid. 238)

Lösning

$z=f(x,y)=e^{x/y} \Rightarrow f(1,1)=e^{1/1}=e.$

De partiella derivatorna har bestämts i Övning 4.53 a).

$z-f(1,1)=f'_x(1,1)(x-1)+f'_y(1,1)(y-1) \Rightarrow z-e=$

$=e(x-1)-e(y-1)=e(x-y) \Leftrightarrow \underline{z=e(1+x-y)}.$

Övning 4.55 (Sid. 238)

Lösning

a) $\underline{f(x,y)=x^3+2xy-y^3}.$

$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+2y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2x-3y^2;$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2+2y)=6x;$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2x-3y^2)=-6y;$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2x-3y^2)=2=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2+2y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$

b) Testövning 4.50 b) konsulteras.

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2y}{(x-y)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2x}{(x-y)^2}.$$

Anm. $y=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow y'=\frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2y}{(x-y)^2}\right)=-2y\frac{\partial}{\partial x}(x-y)^{-2}=\frac{4y}{(x-y)^3}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2y}{(x-y)^2}\right)=-\frac{2}{(x-y)^2}+\frac{4y}{(x-y)^3}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{(x-y)^2}\right)=\frac{2}{(x-y)^2}-\frac{4x}{(x-y)^3}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2y}{(x-y)^2}\right)=-\frac{2}{(x-y)^2}+\frac{4y}{(x-y)^3}.$$

Övning 4.56 (Sid. 239)

Lösning

a) $f(x)=\frac{x^2}{x+1},\ x\neq-1.$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{(x+h)^2}{x+h+1}-\frac{x^2}{x+1}=\frac{(x+1)(x+h)^2-x^2(x+h+1)}{(x+1)(x+h+1)}=$$

$$=\frac{(x+1)(x^2+2xh+h^2)-x^2(x+h+1)}{(x+1)(x+h+1)}=$$

$$=\frac{x^3+2x^2h+xh^2+x^2+2xh+h^2-x^3-x^2h-x^2}{(x+1)(x+h+1)}=$$

$$=\frac{x^2h+2xh+xh^2+h^2}{(x+1)(x+h+1)}=\frac{h(x^2+2x+xh+h)}{(x+1)(x+h+1)}\Rightarrow f'(x)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2x+xh+h}{(x+1)(x+h+1)}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

b) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow$

$+\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}=$ $(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ / $\sqrt{x+h}+$

$=\frac{x+h-x}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}+$ $(\sqrt{x}-\sqrt{x+h}$ / $\sqrt{x}\sqrt{x+h}($

$+\frac{x-(x+h)}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=$

$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}$ $f(x+h)-f($ / h

$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}.$

c) $f(x)=e^{x^2}\Rightarrow f(x+h)=e$

$\Rightarrow f(x+h)-f(x)=e^{x^2}\cdot e^{2}$

$\Rightarrow\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=e^{x^2}\cdot$ e

$=(2x+h)e^{x^2}\cdot$ $e^{2xh+h^2}-$ / $2xh+h^2$

Anm. I $\xrightarrow{!}$ under

Övning 4.57 (Sid.

Lösning

a) $\frac{d}{dx}\frac{x^3}{x^2+1}=$ $3x^2(x^2+1)-2x\cdot$ / $(x^2+1)^2$

b) $\frac{d}{dx}x\cdot\arctan\frac{1}{x}=\arctan$

Räkningarna har

c) $\frac{d}{dx}\ln(2+\sin e^x)=\frac{1}{2+\sin e^x}\frac{d}{dx}(2+\sin e^x)=$

$=\frac{1}{2+\sin e^x}\cdot(\cos e^x\cdot e^x)=\frac{e^x\cdot\cos.e^x}{2+\sin e^x}$

d) $\frac{d}{dx}(x^x)^x=\frac{d}{dx}(e^{x\ln x})^x=\frac{d}{dx}e^{x^2\ln x}=e^{x^2\ln x}\frac{d}{dx}x^2\ln x=$

$=e^{x^2\ln x}\cdot(2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x})=x^{x^2}\cdot x(2\ln x+x)=$

$=\underline{x^{x^2+1}\cdot(2\ln x+x)}.$

e) $\frac{d}{dx}x^x=\frac{d}{dx}e^{x\ln x}=e^{x\ln x}\frac{d}{dx}x\ln x=x^x(\ln x+1);$ (*)

$\frac{d}{dx}x^{(x^x)}=\frac{d}{dx}e^{x^x\ln x}=e^{x^x\ln x}\cdot\frac{d}{dx}x^x\cdot\ln x=$

$=e^{x^x\ln x}\cdot((\frac{d}{dx}x^x)\ln x+x^x\cdot\frac{1}{x})=$ (Se (*) ovan) $=$

$=\underline{x^{(x^x)}(x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1})}.$

f) $\frac{d}{dx}\arcsin\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\frac{d}{dx}(1-x^2)^{1/2}=$

$=\frac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}\cdot(-2x)=-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}},\ 0<|x|<1;$

$$\begin{cases}0<x<1\Rightarrow|x|=x\\-1<x<0\Rightarrow|x|=-x\end{cases}\Rightarrow\frac{d}{dx}\arcsin\sqrt{1-x^2}=\begin{cases}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},&0<x<1\\\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},&-1<x<0\end{cases}$$

Övning 4.58 (Sid. 239)

Lösning

(1) $f(x)=x+1+\arctan x\Rightarrow f'(x)=1+\frac{1}{x^2+1}>0\Rightarrow f$ är strängt växande, dvs inverterbar. Alltså

$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)\Rightarrow 1=\frac{d}{dx}f^{-1}(y)=(f^{-1})'(y)y'$

$\Leftrightarrow(f^{-1}(y))f'(x)=1\Leftrightarrow(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{x^2+1}{x^2+2};$

(2) $f(x)=1\Leftrightarrow x+1+\arctan x=1\Leftrightarrow x=0\Rightarrow\begin{cases}(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}\\f^{-1}(1)=0\end{cases}$

Övning 4.59 (Sid. 240)

Lösning

$$f(x)=\begin{cases}5x+x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq0\\0, & x=0\end{cases}$$

$x\neq0\Rightarrow f'(x)=5+2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+x^2(-\sin\frac{1}{x^2})\cdot(-\frac{2}{x^3})=$

$=5+2x\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}$

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to0}(5+h\cos\frac{1}{h^2})=5.$

$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}(5+2x\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2})$ existerar inte, ty $\lim_{x\to0}\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}$ existerar inte.

Resultat: $f'(x)=\begin{cases}5+2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq0\\0, & x=0\end{cases}$

$\lim_{x\to0}f'(x)$ existerar inte; f ej kont. deriverbar.

Övning 4.60 (Sid. 240)

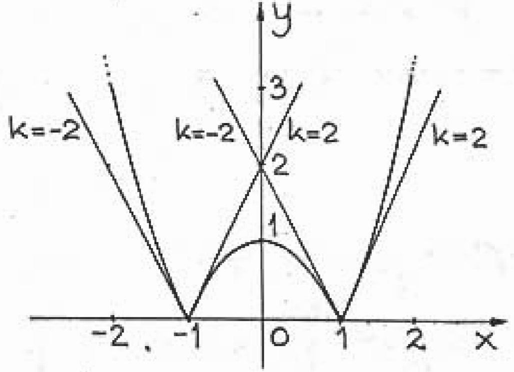
Lösning

$$f(x)=|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1, & x^2-1>0\\ -(x^2-1), & x^2-1<0\end{cases}=\begin{cases}x^2-1, & |x|\geq 1\\ -x^2+1, & |x|<1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x, & x>1 \vee x<-1\\ -2x, & -1<x<1\end{cases}=\begin{cases}2x, & x>1\\ -2x, & -1<x<1\\ 2x, & x<-1\end{cases};$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} f'(x)&=\lim_{x\to -1^-}(2x)=-2\\ \lim_{x\to -1^+} f'(x)&=\lim_{x\to -1^+}(-2x)=2\end{aligned}\right\} f \text{ ej deriverbar i } x=-1.$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f'(x)&=\lim_{x\to 1^-}(-2x)=-2\\ \lim_{x\to 1^+} f'(x)&=\lim_{x\to 1^+}(2x)=2\end{aligned}\right\} f \text{ ej deriverbar i } x=1.$$



<u>Resultat</u>: f saknar derivata i punkterna $x=\pm 1$. f:s graf uppvisar där "spetsar". Ensidesderivator ges ovan.

Övning 4.61 (Sid. 240)

Lösning

$f(x)=\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$; $g(x)=\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

(1) $f'(x)=\frac{d}{dx}\cosh x=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^x+e^{-x})=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\sinh x.$

(2) $g'(x)=\frac{d}{dx}\sinh x=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^x-e^{-x})=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x.$

Övning 4.62 (Sid. 240)

Lösning

$V(t)=h^2+2h$, $h=h(t)$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt}=(2h+2)\frac{dh}{dt}\Rightarrow 2=2(h+1)\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{1}{h+1}.$$

Övning 4.63 (Sid. 240)

Lösning

a) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

(1) f är definierad för $0<x<1$ och $x>1$.

(2) $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}=[x=e^t;\ x\to 0^+\Rightarrow t\to -\infty]=\lim_{t\to -\infty}\frac{e^t}{t}=0^-.$

$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{\ln x}=-\infty$; $\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\ln x}=+\infty$; $x=1$ asymptot.

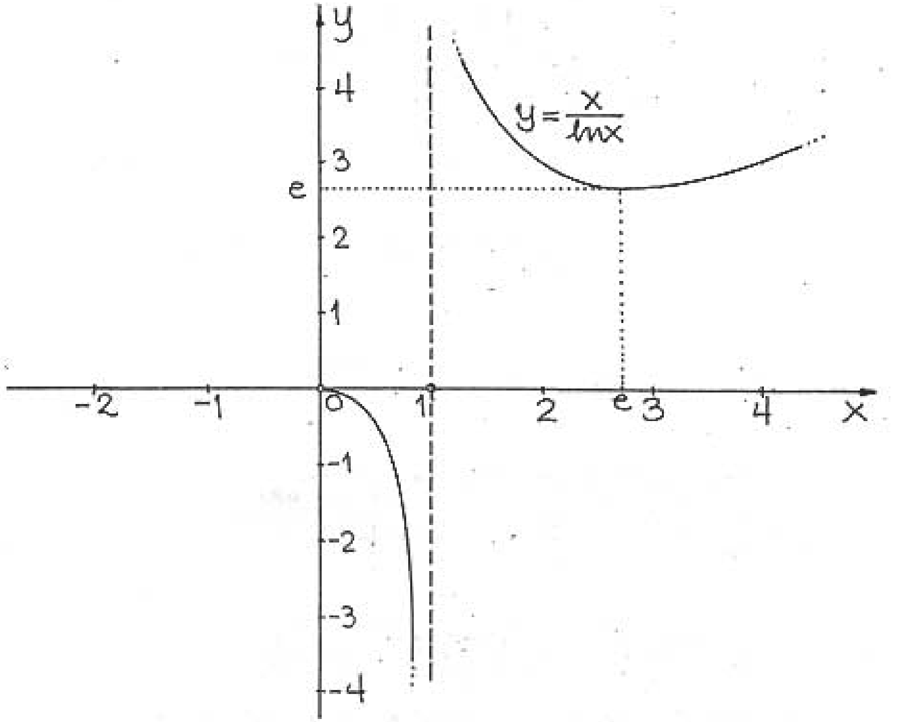
(3) $f'(x)=\frac{\ln x-x\cdot x^{-1}}{\ln^2 x}=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}.$

forts

x	0		1		e	
$\operatorname{sgn} f'(x)$	0^-	$-$	$-\infty \mid -\infty$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0^-	↘	$-\infty \mid \infty$	↘	e	↗

(4)

x	0,5	0,8	1,2	1,5	2	3	3,5
y	-0,7	-3,6	6,6	3,7	2,9	2,7	2,8



b) $\underline{f(x)=\frac{x^2-|x+1|}{x-2},\ x\neq 2.}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-(x+1)}{x-2}; & x+1\geq 0\\ \frac{x^2+(x+1)}{x-2}, & x+1<0\end{cases}=\begin{cases}x+1+\frac{1}{x-2}, & x\geq -1\\ x+3+\frac{7}{x-2}, & x<-1\end{cases};$$

(2) $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(x+1))=0^+ \Rightarrow \underline{y=x+1 \text{ asymptot i } +\infty}.$

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x+3))=0^- \Rightarrow \underline{y=x+3 \text{ asymptot i } -\infty}.$

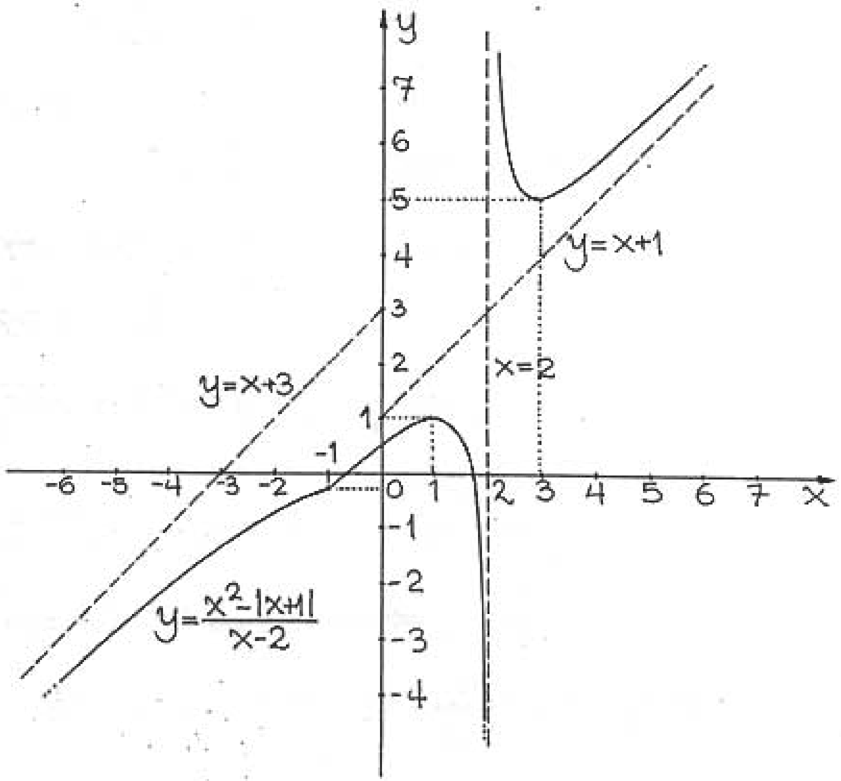
$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ och $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\infty \Rightarrow \underline{x=2 \text{ asymptot}}.$

(3) $$f'(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{(x-2)^2}, & x>-1\\ 1-\frac{7}{(x-2)^2}, & x<-1\end{cases}=\begin{cases}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}, & x>-1\\ \frac{(x-2+\sqrt{7})(x-2-\sqrt{7})}{(x-2)^2}, & x<-1\end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		2		3		∞
$\operatorname{sgn} f'(x)$	1	$+$	$\frac{2}{9} \mid \frac{8}{9}$	$+$	0	$-$	$-\infty \mid -\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-1/3$	↗	1	↘	$-\infty \mid \infty$	↘	5	↗	∞

(4)

x	-4	-3	-2	0	1,5	2,5	3,5	4	5	6
y	-2,2	-1,4	-0,75	0,5	0,5	5,5	5,2	5,5	6,3	7,3



Övning 4.64 (Sid. 240)

Lösning

$f(x)=\frac{1}{x}+\ln\sqrt{x}+\arctan x\,,\ x>0.$

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln x+\arctan x \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2+1}=$$

$$=\frac{-1}{x^2(x^2+1)}+\frac{1}{2x}=\frac{-2}{2x^2(x^2+1)}+\frac{x}{2x^2}=\frac{-2+x(x^2+1)}{2x^2(x^2+1)}=$$

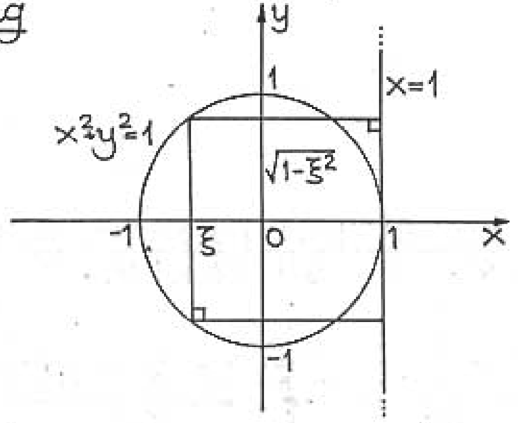
$$=\frac{x^3+x-2}{2x^2(x^2+1)}=\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{2x^2(x^2+1)}=\frac{x^2+x+2}{2x^2(x^2+1)}\cdot(x-1);$$

…	0		1		∞ → x
$\arg f'(x)$	$-\infty$	−	0	+	∞
$f(x)$	∞	↘	$1+\pi/4$	↗	∞

Resultat: $f_{min}=f(1)=1+\pi/4.$

Övning 4.64 (Sid. 240)

Lösning



$\mathcal{A}=f(\xi)=(1-\xi)\cdot2\sqrt{1-\xi^2}=2(1-\xi)\sqrt{1-\xi^2},\ -1<\xi<1;$

$$f'(\xi)=-2\sqrt{1-\xi^2}+2(1-\xi)\cdot\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=-2\cdot\frac{1-\xi^2+\xi-\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}}=2\frac{2\xi^2-\xi-1}{\sqrt{1-\xi^2}};$$

$f'(\xi)=0\Rightarrow 2\xi^2-\xi-1=0\Leftrightarrow\xi=-\frac{1}{2}$ (ger maximum).

$\mathcal{A}_{max}=f(-\frac{1}{2})=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ae.

Övning 4.66 (Sid. 240)

Lösning

Låt oss studera funktionen

$$f(x)=x+\ln\cos x\,,\ 0<x\leq\pi/3.$$

$f'(x)=1-\tan x=0\Leftrightarrow\tan x=1\Leftrightarrow x=\pi/4.$

$$\begin{cases}0<x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f \text{ strängt växande}\\ \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{3}\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f \text{ strängt avtagande}\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln2>0$ lokalt maximum.

…	0		$\pi/4$		$\pi/3$ → x
$\operatorname{sgn} f'(x)$	1	+	0	−	
$f(x)$	0^+	↗	$f(\frac{\pi}{4})$	↘	$\pi/3-\ln2$

$f(x)=x+\ln\cos x=\ln e^x\cos x>0\Leftrightarrow e^x\cos x>1$ VSV.

Övning 4.67 (Sid. 240)

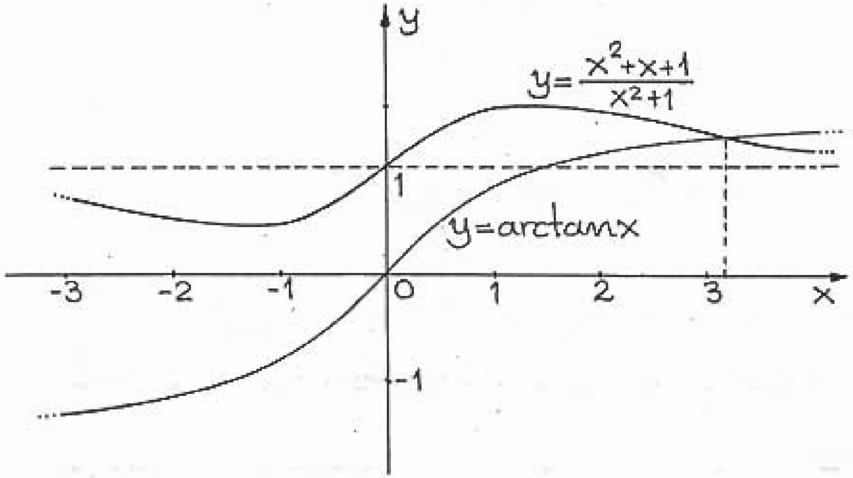
Lösning

Låt oss studera funktionen $f(x)=\frac{1+x+x^2}{1+x^2}.$

$f(x)=1+\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$;

x	$-\infty$		-1		1		∞
sgn $f'(x)$	0^-	$-$	0	$+$	0	$-$	0^-
$f(x)$	1^-	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1^+

x	−4	−3	−2	0	2	3	4
y	0,8	0,7	0,6	1	1,4	1,3	1,2



Roten i fråga är något större än 3 ($x \approx 3{,}1$).

<u>Anm</u> $\mathcal{F}(x)=\arctan x-1-\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \mathcal{F}'(x)=\frac{2x^2}{(x^2+1)^2} \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ strängt växande i hela $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathcal{F}(x)=-\frac{\pi}{2}-1$ och $\lim\limits_{x\to\infty}\mathcal{F}(x)=\frac{\pi}{2}-1 \Rightarrow \mathcal{F}$ antar alla värden mellan $-\frac{\pi}{2}-1$ och $\frac{\pi}{2}-1$ exakt en gång; $\mathcal{F}$ antar alltså värdet 0 någonstans.

$\mathcal{F}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}-1-\frac{\sqrt{3}}{4}<0$, så roten är $>\sqrt{3}$, VSV.

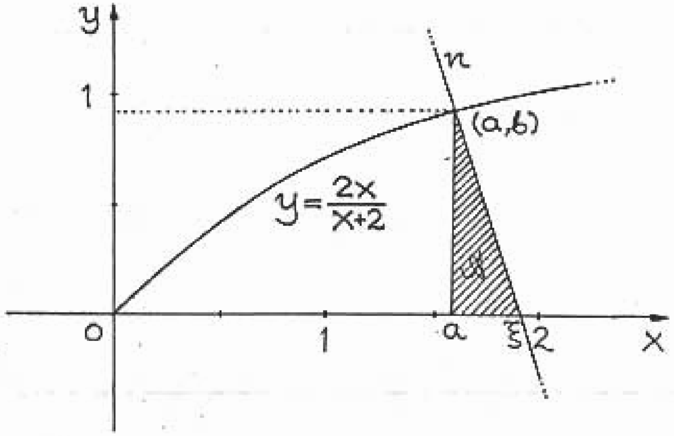
<u>Övning 4.68 (Sid. 240)</u>

<u>Lösning</u>

$f(x)=\frac{2x}{x+2}$, $x>0$.

$f'(x)=\frac{4}{(x+2)^2}>0 \Rightarrow$ strängt växande för alla x.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0,4	0,7	0,9	1	1,1	1,2



n: $\underline{x-a=-f'(a)(y-b)} \Leftrightarrow x-a=\frac{-4}{(a+2)^2}\left(y-\frac{2a}{a+2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \xi-a=\frac{8a}{(a+2)^3} \Rightarrow \mathcal{A}=\frac{1}{2}(\xi-a)\cdot\frac{2a}{a+2}=\frac{8a^2}{(a+2)^4}$, $a>0$.

Låt oss studera funktionen

$$f(x)=\frac{8x^2}{(x+2)^4},\ x>0.$$

$f'(x)=\frac{16x}{(x+2)^4}-\frac{32x^2}{(x+2)^5}=\frac{16x\cdot(x+2)-32x^2}{(x+2)^5}=\frac{16x(2-x)}{(x+2)^2}=0$

$\Rightarrow x=2$ ger max; $\mathcal{A}_{max}=f(2)=1/8$.

5 Primitiva funktioner

Testövning 5.1 (Sid. 246)

Lösning

a) $\int (x^3 - \frac{2}{x^4})dx = \int (x^3 - 2x^{-4})\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^{-3}}{-3} + C =$

$= \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3x^3} + C = \underline{\frac{3x^7+8}{12x^3} + C}.$

b) $\int \frac{3}{x^2+16}dx = \int \frac{3}{x^2+4^2}dx = 3 \cdot \frac{1}{4}\arctan\frac{x}{4} + C = \underline{\frac{3}{4}\operatorname{atn}\frac{x}{4} + C}.$

c) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx = \int (\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}})dx = \int (x^{1/2} + 2x^{-1/2})\,dx =$

$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + 2\frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + 4x^{1/2} + C = \underline{\frac{2}{3}(x+6)\sqrt{x} + C}.$

d) $\int \sin x \cos x\, dx = \int \frac{1}{2}\sin 2x\, dx = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\cos 2x) + C =$

$= \underline{-\frac{1}{4}\cos 2x + C}.$

Övning 5.2 (Sid. 246)

Lösning

$\frac{d}{dx}\arcsin\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\frac{d}{dx}(\frac{x}{a}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2/a^2}} \cdot \frac{1}{a} =$

$= \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)/a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

Anm $\sqrt{a^2} = |a| = a$, ty $a > 0$.

Övning 5.3 (Sid. 246)

Lösning

a) $\int (\cos 3x + 5e^{-x/2})dx = \frac{1}{3}\sin 3x + 5\frac{e^{-x/2}}{-1/2} + C = \underline{\frac{1}{3}\sin 3x -}$

$\underline{-10e^{-x/2} + C}.$

b) $\int \tan 2x\, dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx = \int \frac{(-1/2)(-2\sin 2x)}{\cos 2x}dx =$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(\cos 2x)'}{\cos 2x}dx = \underline{-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C}.$

c) $\int \frac{x}{2+4x^2}dx = \int \frac{(1/8)\cdot 8x}{2+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x}{2+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{(2+4x^2)'}{2+4x^2}dx =$

$= \underline{\frac{1}{8}\ln(2+4x^2) + C}.$

Inga beloppstecken här, ty $2+4x^2 > 0$.

d) $\int x(1+4x^2)^3\,dx = \frac{1}{8}\int (1+4x^2)^3 \cdot (8x)\,dx =$

$= \frac{1}{8}\int (1+4x^2)^3 \cdot (1+4x^2)'\,dx = \frac{1}{8} \cdot \int (\frac{1}{4}(1+4x^2)^4)'\,dx =$

$= \underline{\frac{1}{32}(1+4x^2)^4 + C}.$

Övning 5.4 (Sid. 246)

Lösning

$\frac{d}{dx}\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+(x/a)^2}\frac{d}{dx}(\frac{x}{a}) = \frac{1}{a}\frac{1}{1+x^2/a^2}\frac{1}{a} =$

$= \frac{1}{a^2}\frac{1}{1+x^2/a^2} = \frac{1}{a^2(1+x^2/a^2)} = \frac{1}{a^2+x^2}.$

Anm. $\int f(x)dx = \mathcal{F}(x) \Rightarrow \int f(ax) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(ax).$

Testövning 5.5 (Sid. 250)

Lösning

a) $\int (x+1)e^{4x}dx = \int e^{4x}\cdot(x+1)dx = \left[\begin{array}{l|l} f(x)=e^{4x} & g(x)=x+1 \\ F(x)=\frac{1}{4}e^{4x} & g'(x)=1 \end{array}\right] =$

$= \frac{1}{4}e^{4x}\cdot(x+1) - \frac{1}{4}\int e^{4x}\cdot 1\,dx = \frac{1}{4}e^{4x}(x+1) - \frac{1}{16}e^{4x} + C =$

$= \underline{\frac{1}{16}e^{4x}(4x+3)+C.}$

b) $\int \arctan x\,dx = \int 1\cdot\arctan x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} f(x)=1 & g(x)=\mathrm{atn}x \\ F(x)=x & g'(x)=\frac{1}{x^2+1} \end{array}\right] =$

$= x\cdot\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{x^2+1}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx =$

$= \underline{x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.}$

c) $\int x(\sin x - \ln x)dx = \int(x\sin x - x\ln x)dx =$

$= \int \sin x\cdot x\,dx - \int x\ln x\,dx;$

(1) $\int \sin x\cdot x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} f(x)=\sin x & g(x)=x \\ F(x)=-\cos x & g'(x)=1 \end{array}\right] = -x\cdot\cos x +$

$+\int\cos x\,dx = \underline{-x\cos x + \sin x + C_1};$

(2) $\int x\cdot\ln x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} f(x)=x & g(x)=\ln x \\ F(x)=\frac{x^2}{2} & g'(x)=\frac{1}{x} \end{array}\right] = \frac{1}{2}x^2\ln x -$

$-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \underline{\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2};$

Resultat: $\int x(\sin x - \ln x)dx = -x\cos x + \sin x -$

$-\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$

Testövning 5.6 (Sid. 250)

Lösning

(1) $\int e^{(3+2i)x}dx = \frac{1}{3+2i}e^{(3+2i)x} = \frac{e^{3x}}{13}(3-2i)e^{2ix} =$

$= \frac{1}{13}e^{3x}(3-2i)(\cos 2x + i\sin 2x) =$

$= \frac{1}{13}e^{3x}(3\cos 2x + 2\sin 2x + i(3\sin 2x - 2\cos 2x)) =$

$= \frac{1}{13}e^{3x}(3\cos 2x + 2\sin 2x) + i\frac{1}{13}e^{3x}(3\sin 2x - 2\cos 2x)$

$\Leftrightarrow \int e^{3x}\left\{\begin{array}{l}\cos 2x \\ \sin 2x\end{array}\right\}dx = \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{13}e^{3x}(3\cos 2x + 2\sin 2x) \\ \frac{1}{13}e^{3x}(3\sin 2x - 2\cos 2x)\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int(5\cos 2x - 3\sin 2x)e^{3x}dx = 5\int e^{3x}\cos 2x\,dx -$

$-3\int e^{3x}\sin 2x\,dx = \frac{5}{13}e^{3x}(3\cos 2x + 2\sin 2x) -$

$-\frac{3}{13}e^{3x}(3\sin 2x - 2\cos 2x) = \frac{1}{13}e^{3x}(15\cos 2x + 10\sin 2x -$

$-9\sin 2x + 6\cos 2x) = \frac{1}{13}e^{3x}(21\cos 2x + \sin 2x) + C.$

Övning 5.7 (Sid. 251)

Lösning

a) $\int x\cos x\,dx = \int\cos x\cdot x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} f(x)=\cos x & g(x)=x \\ F(x)=\sin x & g'(x)=1 \end{array}\right] =$

$$= x\sin x - \int \sin x\,dx = \underline{x\sin x + \cos x + C.}$$

b) $$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \left[\begin{array}{l|l} f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} & g(x)=\ln x \\ F(x)=2\sqrt{x} & g'(x)=\frac{1}{x}\end{array}\right] = 2\sqrt{x}\cdot\ln x -$$

$$-2\int\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \underline{2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C.}$$

c) $$\int \arcsin x\,dx = \int 1\cdot\arcsin x\,dx \left[\begin{array}{l|l} f(x)=1 & g(x)=\mathrm{asn}\,x \\ F(x)=x & g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{array}\right] =$$

$$= x\cdot\arcsin x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \underline{x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.}$$

Övning 5.8 (Sid. 251)

Lösning

a) $$f(x) = \int f'(x)dx = \int e^x\sin x\,dx = (A\cos x + B\sin x)e^x + C$$

$$\Leftrightarrow e^x\sin x = \frac{d}{dx}(A\cos x + B\sin x)e^x = (-A\sin x +$$

$$+B\cos x)e^x + (A\cos x + B\sin x)e^x = ((A+B)\cos x +$$

$$+(-A+B)\sin x)e^x \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1/2 \\ B=1/2\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C \Rightarrow f(0) = -\frac{1}{2} + C\ ;$$

$$f(0)=1 \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{3}{2}.$$

Resultat: $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + \frac{3}{2}.$

b) Om f är udda, så är f' jämn, f'' udda osv.

$f'(x) = x^2\cos x$ är jämn, så f är udda!

Ansats: $$\int x^2\cos x\,dx = Ax^2\sin x + Bx\cos x + C\sin x$$

$$= (Ax^2+C)\sin x + Bx\cos x\ (+Ç);$$

$$x^2\cos x = \frac{d}{dx}(Ax^2+C)\sin x + \frac{d}{dx}Bx\cos x =$$

$$= 2Ax\sin x + (Ax^2+C)\cos x + B\cos x - Bx\sin x =$$

$$= (2Ax - Bx)\sin x + (Ax^2+B+C)\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ax^2+B+C = x^2 \\ 2A-B=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B+C=0 \\ B=2A\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=-2\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2-2)\cos x + 2x\sin x + Ç \Rightarrow f(0) = -2 + Ç\ ;$$

$$f(0)=1 \Rightarrow -2+Ç = 1 \Leftrightarrow Ç = 3.$$

Resultat: $f(x) = (x^2-2)\cos x + 2x\sin x + 3.$

Testövning 5.9 (Sid. 254)

Lösning

a) $$\int x^2\sqrt{5-x^3}\,dx = \int\sqrt{5-x^3}\cdot x^2dx \left[\begin{array}{l} t=5-x^3 \\ dt=-3x^2dx\end{array}\right] =$$

$$= \left\{\int\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)dt\right\}_{t=5-x^3} = \left\{-\frac{1}{3}\int t^{1/2}dt\right\}_{t=5-x^3} = \left\{\frac{-1}{3}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{2}{9}t^{3/2} + C\right\}_{t=5-x^3} = \underline{-\frac{2}{9}(5-x^3)^{3/2} + C.}$$

Räkningarna har mening för $x \leqslant \sqrt[3]{5}$.

b) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{1}{(e^x)^2+1}e^x dx = \begin{bmatrix} t=e^x \\ dt=e^x dx \end{bmatrix} = \{\int \frac{dt}{t^2+1}\}_{t=e^x} =$

$= \{\arctan t + C\}_{t=e^x} = \underline{\arctan(e^x)+C.}$

c) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x} = \begin{bmatrix} u=\ln x \\ du=\frac{dx}{x} \end{bmatrix} = \{\int \frac{1}{u}du\}_{u=\ln x} =$

$= \{\ln|u|+C\}_{u=\ln x} = \underline{\ln|\ln x|+C.}$

d) $\int \cos\sqrt{x}\,dx = \begin{bmatrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{bmatrix} = \{\int 2t\cos t\,dt\}_{t=\sqrt{x}}$; (*)

$\int t\cos t\,dt = At\sin t + B\cos t\ (+C) \Rightarrow t\cos t =$

$= \frac{d}{dt}(At\sin t + B\cos t) = A\sin t + At\cos t - B\sin t =$

$= At\cos t + (A-B)\sin t \Leftrightarrow A=B=1 \Rightarrow 2\int t\cos t\,dt =$

$= 2(t\sin t + \cos t) + C \overset{(*)}{=} \underline{2(\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}) + C.}$

Anm. $\int t\cos t\,dt = \int \cos t \cdot t\,dt = \left[\begin{array}{c|c} f(t)=\cos t & g(t)=t \\ F(t)=\sin t & g'(t)=1 \end{array}\right] =$

$= t\sin t - \int \sin t\,dt = \underline{t\sin t + \cos t + C}.$ (Jfr 5.7 a)).

Testövning 5.10 (Sid. 254)

Lösning

$t = x+\sqrt{x^2+1} \Rightarrow dt = \frac{dt}{dx}dx = (1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})dx = \frac{t}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$\Leftrightarrow \frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \underline{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C.}$

Inga beloppstecken, ty $x+\sqrt{x^2+1} > 0$, för alla x.

Övning 5.11 (Sid. 254)

Lösning

a) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \begin{bmatrix} t=1+e^{2x} \\ dt=2e^{2x}dx \end{bmatrix} = \{\int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt\}_{t=1+e^{2x}} =$

$= \{\frac{1}{2}\ln t + C\}_{t=1+e^{2x}} = \underline{\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C.}$

b) $\int x^3 e^{x^2}dx = \int x^2 e^{x^2}\cdot x\,dx = \begin{bmatrix} t=x^2 \\ dt=2xdx \end{bmatrix} = \{\int te^t\cdot\frac{1}{2}dt\} =$

$= \{\frac{1}{2}(t-1)e^t + C\}_{t=x^2} = \underline{\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+C.}$

Anm. $\int te^t dt = (At+B)e^t\ (+C) \Rightarrow te^t = Ae^t +$

$+ (At+B)e^t = (At+A+B)e^t \Leftrightarrow At+A+B = t \Leftrightarrow A=1$

$\wedge\ B+A=0 \Leftrightarrow A=1=-B \Rightarrow \int te^t dt = (t-1)e^t + C.$

c) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}dx = \begin{bmatrix} t=1+\cos^2 x \\ dt=-2\sin x\cos x\,dx \end{bmatrix} = \{\int \frac{1}{t}(-\frac{1}{2})dt\} =$

$= \{-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}\}_{t=1+\cos^2 x} = \underline{-\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)+C.}$

Inga beloppstecken här heller.

d) $\int \frac{dx}{x(5+(\ln x)^2)} = \begin{bmatrix} t=\ln x \\ dt=\frac{dx}{x} \end{bmatrix} = \{\int \frac{1}{5+t^2}dt\}_{t=\ln x} =$

$= \{\frac{1}{\sqrt5}\arctan\frac{t}{\sqrt5}+C\}_{t=\ln x} = \underline{\frac{1}{\sqrt5}\arctan\frac{\ln x}{\sqrt5}+C.}$

e) $\int \sin\sqrt{x}\,dx = \begin{bmatrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{bmatrix} = \{\int \sin t \cdot 2tdt\}_{t=\sqrt{x}} =$

$= \{2\int \sin t \cdot tdt\}_{t=\sqrt{x}}$; (*)

$\int \sin t \cdot tdt = \left[\begin{array}{c|c} f(t)=\sin t & g(t)=t \\ F(t)=-\cos t & g'(t)=1 \end{array}\right] = -t\cos t + \int \cos t dt =$

$= -t\cos t + \sin t + C$;

$\therefore \int \sin\sqrt{x}\,dx = (*) = \underline{2(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x})+C.}$

f) $\int x(e^{\sqrt{x}} - e^{-3x^2})dx = \int xe^{\sqrt{x}}dx + \int e^{-3x^2}(-x)dx = I_1 + I_2.$

$I_1 = \int xe^{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{bmatrix} = \{\int t^2e^t \cdot 2tdt\}_{t=\sqrt{x}} =$

$= \{2\int t^3e^t dt\}_{t=\sqrt{x}}$; (*)

$\int t^3e^t dt = (At^3+Bt^2+Ct+D)e^t (+\text{Ç}) \Rightarrow t^2e^t =$

$= \frac{d}{dt}(At^3+Bt^2+Ct+D)e^t = (3At^2+2Bt+C)e^t + (At^3+$

$+Bt^2+Ct+D)e^t = (At^3+(3A+B)t^2+(2B+C)t+C+D)e^t$

$\Leftrightarrow At^3+(3A+B)t^2+(2B+C)t+C+D = t^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A=1 \wedge 3A+B=2B+C=C+D=0 \Leftrightarrow A=1 \wedge B=-3$

$\wedge C=6 \wedge D=-6 \Leftrightarrow \int t^3e^t dt = t^3-3t^2+6t-6+\text{Ç}_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{\int xe^{\sqrt{x}}dx = 2(x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-6)e^{\sqrt{x}}+\text{Ç}_1}$

$I_2 = \int e^{-3x^2}(-x)dx = \begin{bmatrix} t=-3x^2 \\ dt=-6xdx \end{bmatrix} = \{\int e^t \cdot \frac{1}{6}dt\}_{t=-3x^2} =$

$= \underline{\frac{1}{6}e^{-3x^2}+\text{Ç}_2}.$

$\therefore \underline{\int x(e^{\sqrt{x}} - e^{-3x^2})dx = 2(x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-6)e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{6}e^{3x^2}+C.}$

Testövning 5.12 (Sid. 255)

Lösning

a) $\int(\frac{3}{(x+4)^5} - \frac{1}{2x})dx = 3\int(x+4)^{-5}dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx = 3\cdot\frac{(x+5)^{-4}}{-4}-$

$-\frac{1}{2}\ln|x| + C = \underline{-\frac{3}{4(x+4)^4} - \frac{1}{2}\ln|x|+C.}$

b) $\int\frac{2x-5}{x^2+16}dx = \int\frac{2x}{x^2+16}dx - 5\int\frac{1}{x^2+16}dx = \int\frac{(x^2+16)'}{x^2+16}dx -$

$-5\int\frac{1}{x^2+4^2}dx = \underline{\ln(x^2+16) - \frac{5}{4}\arctan\frac{x}{4}+C.}$

c) $\int\frac{x+1}{x^2+4x+5}dx = \int\frac{x+1}{(x+2)^2+1}dx = \begin{bmatrix} t=x+2 \\ dt=dx \end{bmatrix} = \int\frac{t-1}{t^2+1}dt =$

$= \frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+1}dt - \int\frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int\frac{(t^2+1)'}{t^2+1}dt - \int\frac{1}{t^2+1}dt =$

$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - \arctan t + C = \underline{\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - \mathrm{atn}(x+2)+C.}$

d) $\int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx = \underline{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C}.$

Testövning 5.13 (Sid. 258)

Lösning

a) $\frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}.$

b) $\frac{2x+3}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+4}.$

c) $\frac{x^2-7}{(x-3)^3(x^2+1)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{(x-3)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$

Testövning 5.14 (Sid. 258)

Lösning

a) $\frac{x+2}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A-B}{(x-1)(x+3)}$

$\Leftrightarrow (A+B)x+3A-B = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 & ① \\ 3A-B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 4A=3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{4}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{(x-1)(x+3)} = \frac{3}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{x+3}.$

b) $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-B}{(x-1)(x+1)}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}}.$

Att memorera: $\alpha \neq \beta \Rightarrow \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}\right).$

Övning 5.15 (Sid. 258)

Lösning

a) $\frac{x}{x^2-1} = \frac{x-1+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} =$

$= \underline{\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}}.$

b) $\frac{x^2+6x}{(x^2+4)(x-2)} = \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+(x-2)(Bx+C)}{(x-2)(x^2+4)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x^2+4)+(x-2)(Bx+C) = x^2+6x; \quad (*)$

$x=2 \overset{(*)}{\Rightarrow} 8A=16 \Leftrightarrow A=2 \overset{(*)}{\Rightarrow} (x-2)(Bx+C) = x^2+6x-$

$-2(x^2+4) = -x^2+6x-8 = -(x-2)(x-4) \Leftrightarrow \underline{Bx+C=-(x-4)}.$

$\therefore \frac{x^2+6x}{(x^2+4)(x-2)} = \frac{2}{x-2}-\frac{x}{x^2+4}+\frac{4}{x^2+4}.$

c) $\frac{6+8x-x^2}{x^3-3x-2} = \frac{6+8x-x^2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}+$

$+\frac{C}{x-2} = \frac{(A(x+1)+B)(x-2)+C(x+1)^2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)(x-2)+B(x-2)+C(x+1)^2}{(x-2)(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow \underline{A(x+1)(x-2)+B(x-2)+C(x+1)^2 = 6+8x-x^2}; \quad (*)$

$x=2 \overset{(*)}{\Rightarrow} 9C=18 \Leftrightarrow \underline{C=2} \overset{(*)}{\Rightarrow} A(x+1)(x-2)+B(x-2) =$

$= 6+8x-x^2-2(x+1)^2 = 6-2+8x-4x-x^2-2x^2 = 4+4x-3x^2 =$

$= (x-2)(2-3x) \Leftrightarrow A(x+1)+B = 2-3x \Leftrightarrow Ax+A+B = 2-3x$

$\Leftrightarrow A=-3 \wedge A+B=2 \Leftrightarrow \underline{A=-3} \wedge \underline{B=5}.$

$\therefore \frac{6+8x-x^2}{x^3-3x-2} = \frac{5}{(x+1)^2}-\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x-2}.$

Övning 5.16 (Sid. 260)

Lösning

a) $t = x-2 \Leftrightarrow x = t+2 \Rightarrow x^2-5x+10 = (t+2)^2-5(t+2)+10 =$

$= t^2+4t+4-5t-10+10 = t^2-t+4 = (x-2)^2-(x-2)+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{x^2-5x+10}{x-2}dx = \int (x-3+\frac{4}{x-2})dx = \underline{\frac{1}{2}(x-3)^2+4\ln|x-2|+C.}$

b) $\frac{x+8}{x^2+x-6} = \frac{x+8}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A+B)x+3A-2B = x+8 \Leftrightarrow A+B=1 \wedge 3A-2B=8$

$\Leftrightarrow A=2 \wedge B=-1 \Rightarrow \frac{x+8}{x^2+x-6} = \frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+3}.$

$\int \frac{x+8}{x^2+x-6}dx = 2\int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x+3} = \underline{\ln(x-2)^2 - \ln|x+3|+C.}$

c) $x^3-x^2-x+1 = x^2(x-1)-(x-1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x-7}{x^3-x^2-x+1} = \frac{x-7}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1} =$

$= \frac{A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2 = x-7}; \quad (*)$

$x=1 \overset{(*)}{\Rightarrow} 2B=-6 \Leftrightarrow \underline{B=-3} \overset{(*)}{\Rightarrow} A(x-1)(x+1)+C(x-1)^2 =$

$= x-7+3(x+1) = 4(x-1) \Rightarrow A(x+1)+C(x-1) = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{A=2} \wedge \underline{C=-2.}$

$\int \frac{x-7}{x^3-x^2-x+1}dx = 2\int \frac{1}{x-1}dx - 3\int \frac{1}{(x-1)^2}dx - 2\int \frac{1}{x+1}dx =$

$= 2\ln|x-1| + \frac{3}{x+1} - 2\ln|x+1| + C = \underline{2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{3}{x+1}+C.}$

d) $\frac{3x^2-8}{x^3+4x^2+8x} = \frac{3x^2-8}{x(x^2+4x+8)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+8} =$

$= \frac{A(x^2+4x+8)+x(Bx+C)}{x(x^2+4x+8)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{A(x^2+4x+8)+x(Bx+C) = 3x^2-8}; \quad (*)$

$x=0 \overset{(*)}{\Rightarrow} 8A=-8 \Leftrightarrow \underline{A=-1} \overset{(*)}{\Rightarrow} x(Bx+C) = 3x^2-8+x^2+4x+8 =$

$= 4x^2+4x = x(4x+4) \Leftrightarrow \underline{Bx+C = 4x+4.}$

$\frac{3x^2-8}{x^3+4x^2+8x} = -\frac{1}{x}+\frac{4x+8-4}{(x+2)^2+4} = -\frac{1}{x}+2\frac{(x^2+4x+8)'}{x^2+4x+8}-\frac{4}{(x+2)^2+4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{3x^2-8}{x^3+4x^2+8x}dx = -\int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{(x^2+4x+8)'}{x^2+4x+8}dx - 2\int \frac{2}{(x+2)^2+4}dx =$

$= \underline{-\ln|x| + 2\cdot\ln(x^2+4x+8) - 2\arctan\frac{x+2}{2} + C.}$

Testövning 5.17 (Sid. 264)

Lösning

a) $\frac{x-5}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-4)}{(x-4)(x+1)} \Leftrightarrow x-5 =$

$= A(x+1)+B(x-4) \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow -5B=-6 \\ x=4 \Rightarrow 5A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1/5 \\ B=6/5 \end{cases}.$

b) $\frac{10}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(x+3)(Bx+C)}{(x+3)(x^2+1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{A(x^2+1)+(x+3)(Bx+C) = 10}; \quad (*)$

$x=-3 \overset{(*)}{\Rightarrow} 10A=10 \Leftrightarrow A=1 \overset{(*)}{\Rightarrow} (x+3)(Bx+C) = 10-x^2-1 =$

$= -(x^2-9) = -(x-3)(x+3) \Leftrightarrow \underline{Bx+C=-(x-3)}.$

Konstanterna är $A=1, B=-1$ och $C=3$.

Övning 5.18 (Sid. 264)

Lösning

a) $\frac{4x^2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)=4x^2}; \quad (*)$

$x=1 \overset{(*)}{\Rightarrow} 4A=4 \Leftrightarrow \underline{A=1} \overset{(*)}{\Rightarrow} B(x-1)(x+1)+C(x-1) = 4x^2-$

$-(x+1)^2 = (2x-x-1)(2x+x+1) = (x-1)(3x+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{B(x+1)+C=3x+1} \Rightarrow (x=-1) \Rightarrow \underline{C=-2} \Rightarrow B(x+1) =$

$= 3x+3 = 3(x+1) \Leftrightarrow \underline{B=3}.$

b) $\frac{x^2+2x-1}{x^3(x-1)^2} = \frac{Ax^2(x-1)^2+Bx(x-1)^2+C(x-1)^2+Dx^3(x-1)+Ex^3}{x^3(x-1)^2}$

$\Leftrightarrow \underline{Ax^2(x-1)^2+Bx(x-1)^2+C(x-1)^2+Dx^3(x-1)+Ex^3=x^2+2x-1} \quad (*)$

(1) $x=1 \overset{(*)}{\Rightarrow} \underline{E=2} \Rightarrow Ax^2(x-1)^2+Bx(x-1)^2+C(x-1)^2+$

$+Dx^3(x-1) = -2x^3+x^2+2x-1 = -x^2(2x-1)+2x-1 =$

$= -(2x-1)(x^2-1) = -(2x-1)(x+1)(x-1)$

$\Leftrightarrow \underline{Ax^2(x-1)+Bx(x-1)+C(x-1)+Dx^3=-2x^2-x+1}.$

(2) $x=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \underline{D=-2} \overset{(1)}{\Rightarrow} Ax^2(x-1)+B(x-1)x+C(x-1) =$

$= 2x^3-2x^2-x+1 = 2x^2(x-1)-(x-1) = (2x^2-1)(x-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Ax^2+Bx+C = 2x^2-1 \Leftrightarrow \underline{A=2} \wedge \underline{B=0} \wedge \underline{C=-1}.$

Resultat: $A=2, B=0, C=-1, D=-2, E=2.$

Testövning 5.19 (Sid. 268)

Lösning

a) $\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x\,dx =$

$= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx = \int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\sin x\,dx =$

$= \left[\begin{matrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \end{matrix}\right] = \{-\int (1-2t^2+t^4)\,dt\}_{t=\cos x} =$

$= \{-(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^4)+C\}_{t=\cos x} = \underline{\frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x - \frac{1}{4}\cos^4 x + C}.$

b) $\int \frac{\sin x \cos x}{4-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x \cos x}{3+\sin^2 x}\,dx = \left[\begin{matrix} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx \end{matrix}\right] =$

$= \{\int \frac{t}{3+t^2}\,dt\}_{t=\sin x} = \underline{\frac{1}{2}\ln(3+\sin^2 x)+C}.$

c) $\int \cos^2 x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\cos 2x\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2})\,dx =$

$= \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{4}(x+\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x)+C =$

$= \underline{\frac{1}{16}(4x+4\sin 2x+\sin 4x)+C}.$

Övning 5.20 (Sid. 268)

Lösning

a) $\int\frac{1}{\cos 2x}dx=\begin{bmatrix}t=2x\\dt=2dx\end{bmatrix}=\{\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\cos t}\}_{t=2x}=\{\frac{1}{2}\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt\}=$

$=\{\frac{1}{2}\int\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt\}_{t=2x}$;

$\int\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt=\begin{bmatrix}u=\sin t\\du=\cos t\,dt\end{bmatrix}=\int\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u})du=$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos t}{1-\cos t}+C$;

$\therefore\int\frac{1}{\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x}+C=$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+C=\frac{1}{2}\ln(\frac{\cos x}{\sin x})^2+C=$

$=\ln|\frac{\cos x}{\sin x}|+C=\ln|\cot x|+C$

b) $\sin^4 x=(\sin^2 x)^2=(\frac{1-\cos 2x}{2})^2=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2=$

$=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2})=$

$=\frac{1}{8}(3-4\cos 2x+\cos 4x)$;

$\int\sin^4 x\,dx=\frac{1}{8}\int(3-4\cos 2x+\cos 4x)dx=\frac{1}{8}(3x-2\sin 2x+$

$+\frac{1}{4}\sin 4x)+C=\underline{\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C}.$

c) $\sin 3x\cos 5x=\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\cdot\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2}=$ (se (2.73)) $=$

$=\frac{1}{4i}(e^{3ix}e^{5ix}+e^{3ix}\cdot e^{-5ix}-e^{-3ix}e^{5ix}-e^{-3ix}\cdot e^{-5ix})=$

$=\frac{1}{4i}(e^{8ix}-e^{-8ix}-(e^{2ix}-e^{-2ix}))=\frac{1}{2}(\frac{e^{8ix}-e^{-8ix}}{2i}-$

$-\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i})=\frac{1}{2}(\sin 8x-\sin 2x)$;

$\int\sin 3x\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 8x-\sin 2x)dx=$

$=\frac{1}{2}(-\frac{\cos 8x}{8}+\frac{\cos 2x}{2})+C=$

$=\underline{\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C}.$

Övning 5.21 (Sid. 269)

Lösning

$y=\tan\frac{x}{2}\Leftrightarrow\cos x=\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos 2(x/2)}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=$

$=\frac{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot(1-\sin^2(\frac{x}{2})/\cos^2(\frac{x}{2}))}{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot(1+\sin^2(\frac{x}{2})/\cos^2(\frac{x}{2}))}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-y^2}{1+y^2}.$

Övning 5.22 (Sid. 269)

Lösning

Exempel 5.35 konsulteras.

$\int\frac{dx}{\sin x}=[y=\tan\frac{x}{2}]=\int\frac{1+y^2}{2y}\cdot\frac{2}{1+y^2}dy=\int\frac{dy}{y}=\ln|y|+C=$

$=\underline{\ln|\tan\frac{x}{2}|+C}.$

Räkningarna har mening för $0<x<\pi$.

Övning 5.23 (Sid. 269)

Lösning

$$5+4\sin x = 5+\frac{8y}{1+y^2}=\frac{5+5y^2+8y}{1+y^2} \Rightarrow \frac{1}{5+4\sin x}dx=$$

$$=\frac{1+y^2}{5y^2+8y+5}\cdot\frac{2dy}{1+y^2}=\frac{2dy}{5y^2+8y+5}=\frac{2}{5}\frac{1}{y^2+\frac{8}{5}y+1}dy=$$

$$=\frac{2}{5}\frac{dy}{(y+\frac{4}{5})^2+(\frac{3}{5})^2} \Rightarrow \int\frac{dx}{5+4\sin x}=\left[y=\tan\frac{x}{2}\right]=$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{dy}{(y+\frac{4}{5})^2+(\frac{3}{5})^2}=(\text{Ö. }5.4)=\frac{2}{3}\arctan\frac{y+4/5}{3/5}+C=$$

$$=\frac{2}{3}\arctan\frac{5y+4}{3}+C=\underline{\frac{2}{3}\arctan\frac{5\tan(x/2)+4}{3}+C}.$$

Övning 5.24 (Sid. 273)

Lösning

a) $$\int\frac{\sqrt{x-1}}{x+3}dx=\begin{bmatrix} x=1+y^2 \\ dx=2y\,dy\end{bmatrix}=\int\frac{y}{4+y^2}\cdot 2y\,dy=2\int\frac{y^2}{y^2+4}dy=$$

$$=2\int(1-\frac{4}{y^2+4})dy=2(y-2\arctan\frac{y}{2})+C=\underline{2\sqrt{x-1}-}$$

$$\underline{-4\arctan\frac{\sqrt{x-1}}{2}+C,\ x\geqslant 1}.$$

b) $$\int\frac{2x+1}{\sqrt{4x-x^2}}dx=\int\frac{2x+1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx=\begin{bmatrix} x-2=2y \\ dx=2dy\end{bmatrix}=\int\frac{4y+5}{2\sqrt{1-y^2}}\cdot 2dy=$$

$$=2\int\frac{2y}{\sqrt{1-y^2}}+5\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=-2\int\frac{(1-y^2)'}{\sqrt{1-y^2}}dy+5\int\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=$$

$$=-4\sqrt{1-y^2}+5\arcsin y+C=\underline{5\arcsin\frac{x-2}{2}-2\sqrt{4x-x^2}+C}.$$

c) $$y=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \Rightarrow \frac{x-1}{x+2}=y^2 \Leftrightarrow 1-\frac{3}{x+2}=y^2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+2}=1-y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+2=\frac{6}{1-y^2} \Leftrightarrow x=-2+\frac{6}{1-y^2} \Rightarrow dx=\frac{6y}{(1-y^2)^2}dy\ ;$$

$$\int\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}dx=\left[y=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\right]=\int\frac{6y^2}{(1-y^2)^2}dy=-6\cdot\int\frac{-1+1-y^2}{(1-y^2)^2}dy=$$

$$=\int\frac{-6}{1-y^2}dy+6\cdot\int\frac{1}{(1-y^2)^2}dy\ ;$$

(1) $$\int\frac{-6}{1-y^2}dy=-3\int(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y})dy=3\ln\frac{1-y}{1+y}+C_1\ ;$$

(2) $$\int\frac{6}{(1-y^2)^2}dy=6\int(\frac{1}{2}(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}))^2dy=\frac{3}{2}\int(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y})^2dy=$$

$$=\frac{3}{2}\int(\frac{1}{(1-y)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1-y})dy=\frac{3}{2}(\frac{1}{1-y}-\frac{1}{1+4}+$$

$$+\ln\frac{1+y}{1-y})+C_2=\frac{3y}{1-y^2}-\frac{3}{2}\ln\frac{1-y}{1+y}+C_2;$$

(3) $$\int\frac{6y^2}{(1-y^2)^2}dy=3\ln\frac{1-y}{1+y}+\frac{3y}{1-y^2}-\frac{3}{2}\ln\frac{1-y}{1+y}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\frac{1-y}{1+y}+\frac{3y}{1-y^2}+C$$

(4) $$\int\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}dx=\frac{3}{2}\ln\frac{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}}+\frac{3\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}}{3/(x+2)}+C=\sqrt{(x-1)(x+2)}+$$

$$+\frac{3}{2}\ln\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}+C=\sqrt{x^2+x-2}+\frac{3}{2}\ln\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})^2}{x+2-(x-1)}+C$$

$$=\underline{\sqrt{x^2+x-2}+3\ln(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})+C}.$$

d) $$\int\sqrt{1+y^2}dy=\int 1\cdot\sqrt{1+y^2}dy=y\sqrt{1+y^2}-\int y\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=$$

$$=y\sqrt{1+y^2}-\int\frac{1+y^2-1}{\sqrt{1+y^2}}dy=y\sqrt{1+y^2}-\int(\sqrt{1+y^2}-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}})dy=$$

$$= y\sqrt{1+y^2} - \int\sqrt{1+y^2}\,dy + \int\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy \Leftrightarrow 2\int\sqrt{1+y^2}\,dy =$$

$$= y\sqrt{1+y^2} + \ln(y+\sqrt{1+y^2}).$$ (Jfr Ex. 5.40).

$$\therefore \int\sqrt{1+x^2}\,dx = \underline{\tfrac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \tfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C.}$$

Övning 5.25 (Sid. 274)

Lösning

$$\frac{d}{dx}\ln|x+\sqrt{x^2+a}| = \frac{1}{|x+\sqrt{x^2+a}|}\frac{d}{dx}|x+\sqrt{x^2+a}| =$$

$$= \frac{1}{|x+\sqrt{x^2+a}|}\cdot \operatorname{sgn}(x+\sqrt{x^2+a})\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x^2+a}) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x+a}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Anm. $|f(x)| = f(x)\cdot \operatorname{sgn} f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}|f(x)| = \frac{df(x)}{dx}\operatorname{sgn} f(x).$

Övning 5.26 (Sid. 274)

Lösning

a) $$\int\frac{1}{1-5x}\,dx = \begin{bmatrix} t=1-5x \\ dt=-5dx\end{bmatrix} = \left\{-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t}\right\}_{t=1-5x} = \underline{-\frac{1}{5}\ln|1-5x|+C.}$$

b) $$\int\frac{1}{1+16x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t=4x \\ dt=4dx\end{bmatrix} = \left\{\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+t^2}\,dt\right\}_{t=4x} = \underline{\frac{1}{4}\operatorname{atn}4x+C.}$$

c) $$\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \left[3x=2t \Rightarrow dx=\tfrac{2}{3}dt\right] = \int\frac{1}{\sqrt{4-4t^2}}\cdot\frac{2}{3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{3}\arcsin t + C = \underline{\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C.}$$

d) $$\int\frac{e^x}{2-e^x}\,dx = \begin{bmatrix} t=2-e^x \\ dt=-e^x dx\end{bmatrix} = -\int\frac{dt}{t} = \underline{-\ln|2-e^x|+C.}$$

e) $$\int x^3e^{-x^4}\,dx = \begin{bmatrix} t=-x^4 \\ dt=-4x^3dx\end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\int e^t\,dt = \underline{-\frac{1}{4}e^{-x^4}+C.}$$

f) $$\int x\sqrt{x+2}\,dx = \begin{bmatrix} x+2=t^2 \\ dx=2tdt\end{bmatrix} = \int(t^2-2)t\cdot 2t\,dt = 2\int(t^4-2t^2)\,dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}\right)+C = 2\left(\frac{t^4}{5}-\frac{2t^2}{3}\right)t+C = \frac{2}{15}(3t^4-10t^2)t+C$$

$$= \frac{2}{15}(2(x+2)^2-10(x+2))\sqrt{x+2}+C = \underline{\frac{4}{15}(x^2-x-6)\sqrt{x+2}+C.}$$

g) $$\int x^2\sin x\,dx = (Ax^2+B)\cos x + Cx\sin x$$ (ansats) (*)

Anm. f udda ⇒ f′ jämn ⇒ f″ udda osv.

$x^2\sin x$ är udda, så jag ansätter jämn.

Derivering av (*) ger

$$x^2\sin x = \frac{d}{dx}(Ax^2+B)\cos x + \frac{d}{dx}Cx\sin x = 2Ax\cos x -$$

$$-(Ax^2+B)\sin x + C\sin x + Cx\cos x = (2A+C)x\cos x +$$

$$+(-Ax^2-B+C)\sin x$$ (koefficienter identifieras)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -Ax^2-B-C = x^2 \\ 2A-C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A=1 \\ B+C=0 \\ C=2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \\ C=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int x^2\sin x\,dx = \underline{(2-x^2)\cos x - 2x\sin x + C.}$$

Man kan även tillgripa partiell integration.

h) $\int (\ln x)^2 dx = \int 1 \cdot (\ln x)^2 dx = \left[\begin{array}{c|c} f(x)=1 & g(x)=(\ln x)^2 \\ F(x)=x & g'(x)=\frac{2\ln x}{x} \end{array}\right] =$

$= \underline{x \cdot (\ln x)^2 - 2\int \ln x\, dx}$; (*)

$\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx = \left[\begin{array}{c|c} \phi(x)=1 & \psi(x)=\ln x \\ \Phi(x)=x & \psi'(x)=1/x \end{array}\right] = x\ln x -$

$- \int 1 dx = \underline{x\ln x - x}$; (**)

$\therefore \int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + C =$

$= \underline{x \cdot \ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.}$

i) $\int \ln \frac{2-x}{x-5} dx = \int (\ln(2-x) - \ln(x-5))dx$

$= \underline{\int \ln(2-x)dx - \int \ln(x-5)dx}$; (Se (**)).

$\int \ln(2-x)dx = -\int (-1)\ln(2-x)dx = \left[\begin{array}{c} t=2-x \\ dt=-dx \end{array}\right] =$

$= -\int \ln t\, dt = -t\ln t + t = \underline{(x-2)(\ln(2-x)-1)}$;

$\int \ln(x-5)dx = \underline{(x-5)(\ln(x-5)-1)}$;

$\therefore \int \ln \frac{2-x}{x-5} dx = \underline{(x-2)(\ln(2-x)-1) - (x-5)(\ln(x-5)-1) + C.}$

Anm $\frac{2-x}{x-5} > 0 \Leftrightarrow (2-x)(x-5) > 0 \Leftrightarrow \underline{2<x<5.}$

j) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \left[\begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos x\, dx \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = \underline{-\frac{1}{\sin x} + C.}$

k) (Övning 5.11 f) konsulteras).

① $\int x e^{\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{c} x=t^2 \\ dx=2t\,dt \end{array}\right] = \int t^2 e^t \cdot 2t\,dt = 2\int e^t \cdot t^3 dt$;

② $\int e^t t^3 dt = \left[\begin{array}{c|c} f(t)=e^t & g(t)=t^3 \\ F(t)=e^t & g'(t)=3t^2 \end{array}\right] = t^3 e^t - 3\int t^2 e^t dt$;

③ $\int e^t t^2 dt = \left[\begin{array}{c|c} \phi(t)=e^t & \psi(t)=t^2 \\ \Phi(t)=e^t & \psi'(t)=2t \end{array}\right] = t^2 e^t - 2\int t e^t dt$;

④ $\int e^t t\, dt = \left[\begin{array}{c|c} u(t)=e^t & v(t)=t \\ U(t)=e^t & v'(t)=1 \end{array}\right] = te^t - \int e^t = (t-1)e^t$;

$\therefore \int t^3 e^t dt = t^3 e^t - 3(t^2 e^t - 2\int t e^t dt) = t^3 e^t - 3t^2 e^t +$

$+ 6\int t e^t dt = t^3 e^t - 3t^2 e^t + 6te^t - 6e^t + C.$

$\therefore \underline{\int x e^{\sqrt{x}} dx = 2(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6)e^{\sqrt{x}} + C.}$

l) $\int x \cdot \ln(x^2+1)dx = \left[\begin{array}{c} t=x^2+1 \\ dt=2x\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \ln t\, dt = \frac{1}{2}(t\ln t - t)$

$= \underline{\frac{1}{2}(x^2+1)(\ln(x^2+1)-1) + C.}$

Övning 5.27 (Sid. 275)

Lösning

$\frac{d}{dx}\frac{e^{x^2}}{2x} = \frac{2xe^{x^2}}{2x} - \frac{e^{x^2}}{2x^2} = e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{2x^2} \neq e^{x^2}$. Nej!

Övning 5.28 (Sid. 275)

Lösning

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\ln|1+x|-\ln|1-x|+\operatorname{atn}x+C$$

$$=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\arctan x+C$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+1}{x-1}+\lim_{x\to\infty}\arctan x+C=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{1+1/x}{1-1/x}+\lim_{x\to\infty}\arctan x+C=\frac{\pi}{2}+C\,;$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0\Rightarrow\frac{\pi}{2}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{\pi}{2}\,;$$

Resultat: $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}+\arctan x-\frac{\pi}{2},\ x>1.$

Övning 5.29 (Sid. 275)

Lösning

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^3(x+2)}=\frac{1}{(x+1)^2}\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{(x+1)^2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{x+1}\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\,;$$

$$f(x)=\int\frac{dx}{(x+1)^3(x+2)}=-\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}+\ln\frac{x+1}{x+2}+C\,;$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=-0+0+\ln 1+C=C=1$$

Resultat: $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\ln\frac{x+1}{x+2}+1.$

Övning 5.30 (Sid. 275)

Lösning

a) $\int x^2\arctan x\,dx=\left[\begin{array}{l|l}f(x)=x^2 & g(x)=\operatorname{atn}x\\ F(x)=\frac{x^3}{3} & g'(x)=\frac{1}{x^2+1}\end{array}\right]=\frac{x^3}{3}\operatorname{atn}x-$

$-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x^2+1}dx=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=$

$=\underline{\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(x^2+1)+C.}$

b) $\int\frac{1}{3+e^x}dx=\int\frac{e^{-x}}{1+3e^{-x}}dx=\left[\begin{array}{l}t=1+3e^{-x}\\ dt=-3e^{-x}dx\end{array}\right]=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=$

$=-\frac{1}{3}\ln(1+3e^{-x})=-\frac{1}{3}\ln\frac{3+e^x}{e^x}+C=\underline{\frac{1}{3}(x-\ln(3+e^x))+C.}$

c) $\int\frac{2\ln(x+1)}{x^3}dx=\int\frac{2}{x^3}\cdot\ln(x+1)dx=\left[\begin{array}{l|l}f(x)=\frac{2}{x^3} & g(x)=\ln(x+1)\\ F(x)=\frac{-1}{x^2} & g'(x)=\frac{1}{x+1}\end{array}\right]$

$=-\frac{1}{x^2}\ln(x+1)+\int\frac{1}{x^2(x+1)}dx=-\frac{\ln(x+1)}{x^2}+\int\frac{1}{x}\frac{1}{x(x+1)}dx=$

$=-\frac{\ln(x+1)}{x^2}+\int\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=-\frac{\ln(x+1)}{x^2}+\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x(x+1)}\right)dx$

$=-\frac{\ln(x+1)}{x^2}+\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx=-\frac{\ln(x+1)}{x^2}-\frac{1}{x}-\ln|x|+$

$+\ln|x+1|+C=\underline{\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{x+\ln(x+1)}{x^2}+C.}$

d) $\int\frac{\arctan 2x}{x^2}dx=\left[\begin{array}{l|l}f(x)=\frac{1}{x^2} & g(x)=\operatorname{atn}2x\\ F(x)=-\frac{1}{x} & g'(x)=\frac{2}{1+4x^2}\end{array}\right]=-\frac{\operatorname{atn}2x}{x}+$

$+\int\frac{2}{x(1+4x^2)}dx=-\frac{\operatorname{atn}2x}{x}+\int\frac{8x}{4x^2(1+4x^2)}dx=-\frac{\operatorname{atn}2x}{x}+$

$$+\int 8x\left(\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{4x^2+1}\right)dx=-\frac{\operatorname{atn}2x}{x}+\int\left(\frac{2}{x}-\frac{8x}{4x^2+1}\right)dx=$$

$$=-\frac{\operatorname{atn}2x}{x}+\ln x^2-\ln(4x^2+1)+C=\underline{\ln\frac{x^2}{4x^2+1}-\frac{\operatorname{atn}2x}{x}+C}.$$

e) $\int\frac{\cos x}{3+\sin^2x}dx=\begin{bmatrix}t=\sin x\\ dt=\cos x\,dx\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{3+t^2}=\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{atn}\frac{t}{\sqrt3}+C=$

$=\underline{\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{\sin x}{\sqrt3}+C}.$

f) $\int\tan^2x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\underline{\tan x-x+C}.$

g) $\int\cos^5x\,dx=\int\cos^4x\cdot\cos x\,dx=\int(1-\sin^2x)^2\cos x\,dx=$

$=\int(1-2\sin^2x+\sin^4x)\cos x\,dx=[t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x\,dx]$

$=\int(1-2t^2+t^4)dt=t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+C=\underline{\sin x-\frac{2}{3}\sin^3x+}$

$\underline{+\frac{1}{5}\sin^5x+C}.$

h) $\int\frac{1}{\cos^3x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^4x}dx=\int\frac{\cos x}{(1-\sin^2x)^2}dx=\begin{bmatrix}t=\sin x\\ dt=\cos x\,dx\end{bmatrix}=$

$=\int\frac{1}{(1-t^2)^2}dt=\int\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\right)^2dt=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)^2dt=$

$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}+$

$+\ln|1+t|-\ln|1-t|\Big)+C=\frac{1}{2}\frac{t}{1-t^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{1-t}+C=$

$=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1-\sin^2x}+\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2x}+\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C.$

Man ska hålla sig borta från $\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

i) $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt\end{Bmatrix}\Rightarrow\frac{dx}{3+\cos x}=\frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{t^2+1}=$

$=\frac{2dt}{3(1+t^2)+1-t^2}=\frac{2dt}{2(t^2+2)}=\frac{dt}{t^2+2}\Rightarrow\int\frac{dt}{t^2+2}=\underline{\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{t}{\sqrt2}}$

$\Rightarrow\int\frac{dx}{3+\cos x}=\underline{\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{\tan(x/2)}{\sqrt2}+C}.$

Övning 5.31 (Sid. 275)

Lösning

a) $\int\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx=\begin{bmatrix}t=x-1\\ dt=dx\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\underline{\arcsin(x-1)+C}.$

b) $\underline{t=\sqrt{x-1}}\Rightarrow x=1+t^2\Rightarrow x-2=t^2-1\ \wedge dx=2t\,dt$; (*)

$\int\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}dx=\int\frac{2t^2}{t^2-1}dt=2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\int\left(2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=$

$=2t+\ln|t-1|-\ln|t+1|+C=\underline{2\sqrt{x-1}+\ln\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}+1}+C}.$

c) $\frac{2-x}{x-3}\geq0\Leftrightarrow(2-x)(x-3)\geq0\Leftrightarrow\underline{2\leq x<3}.$ (*)

$t=\sqrt{\frac{2-x}{x-3}}\overset{(*)}{\Leftrightarrow}t^2=\frac{2-x}{x-3}=-\frac{x-3+1}{x-3}=-1+\frac{1}{x-3}\Leftrightarrow x-3=$

$=\frac{1}{t^2+1}\Leftrightarrow x=3+\frac{1}{t^2+1}=\frac{3t^2+4}{t^2+1}\Rightarrow dx=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt$;

$\underline{\int\sqrt{\frac{2-x}{x-3}}dx}=\int t\cdot\frac{-2t}{(t^2+1)}dt=\frac{t}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}=+\frac{t}{t^2+1}-\operatorname{atn}t+C=$

$=\underline{\frac{1}{x-3}\cdot\sqrt{\frac{2-x}{x-3}}-\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x-3}}+C}$

d) $\int x\cdot\arcsin x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} f(x)=x & g(x)=\arcsin x \\ F(x)=\frac{x^2}{2} & g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}\right] =$

$= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}x^2\arcsin x +$

$+ \frac{1}{2}\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}x^2\arcsin x + \frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= \frac{1}{2}x^2\arcsin x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right) - \frac{1}{2}\arcsin x =$

$= \frac{1}{2}x^2\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\arcsin x + C =$

$= \underline{\frac{1}{4}\left((2x^2-1)\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C.}$

e) $\int\sqrt{x^2+4x+8}\,dx = \int\sqrt{(x+2)^2+4}\,dx = \left[\begin{array}{l} x+2=2t \\ dx=2dt \end{array}\right] = 4\int\sqrt{t^2+1}\,dt =$

$= 2(t\sqrt{t^2+1} + \ln(t+\sqrt{t^2+1}) + C =$

$= 2\left(\frac{x+2}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4x+8}}{2} + \ln\left(\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x+8}}{2}\right)\right) + C =$

$= \underline{\frac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x+8} + 2\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+8}) + C'.}$

Anm. $\int\sqrt{t^2+1}\,dt = \int 1\cdot\sqrt{t^2+1}\,dt = t\sqrt{t^2+1} - \int\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}dt =$

$= t\sqrt{t^2+1} - \int\frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}}dt = t\sqrt{t^2+1} - \int\sqrt{t^2+1}\,dt + \int\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$

$\Leftrightarrow 2\int\sqrt{t^2+1}\,dt = t\sqrt{t^2+1} + \ln(t+\sqrt{t^2+1}) + 2C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int\sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}(t\sqrt{t^2+1} + \ln(t+\sqrt{t^2+1})) + C.$

Alternativ bestämning av denna primitiv kan genomföras med substitutionen $t=\tan u$.

f) $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \int\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{x^2+1} \\ xdx=tdt \end{array}\right] = \int\frac{t}{t(t^2-1)}dt =$

$= \int\frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} + C =$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)^2}{x^2} + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}\right)^2 + C =$

$= \ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|} + C = \underline{\ln(\sqrt{x^2+1}-1) - \ln|x| + C.}$

Observera att resultatet är korrekt!

Övning 5.32 (Sid. 275)

Lösning

Att memorera: $\alpha\neq\beta \Rightarrow \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}\right).$

(1) $t=x-1 \Leftrightarrow x=1+t \Rightarrow ax^2+bx+c = a(1+t)^2+b(1+t)+c =$

$= at^2+(2a+b)t+a+b+c = \underline{a(x-1)^2+(2a+b)(x-1)+a+b+c}.$

(2) $\frac{1}{x^3(x-1)^2} = \left(\frac{1}{(x-1)x}\right)^2\cdot\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}-\right.$

$\left.-\frac{2}{x(x-1)}\right)\cdot\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x(x-1)}+$

$+\frac{1}{x-1}\frac{1}{(x-1)x} = \frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right) =$

$= \frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)x} = \frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2};$

(3) $\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \frac{ax^2+bx+c}{x^3}+2\frac{ax^2+bx+c}{x^2}+3\frac{ax^2+bx+c}{x}-$

$-3\frac{a(x-1)^2+(2a+b)(x-1)+a+b+c}{x-1}+2\frac{a(x-1)^2+(2a+b)(x-1)+a+b+c}{(x-1)^2} =$

$= -5a+\frac{b-2c}{x^2}+\frac{c}{x^3}-\frac{a+b+c}{(x-1)^2}+(a+2b+3c)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right);$

Denna har en rationell primitiv endast om $a+2b+3c=0$ (för då försvinner ln-delen).

Övning 5.33 (Sid. 275)

Lösning

$$\int xe^{(1+i)x}\,dx = \left[\begin{array}{c|c} f(x)=e^{(1+i)x} & g(x)=x \\ F(x)=\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} & g'(x)=1 \end{array}\right] = \frac{x}{1+i}e^{(1+i)x} -$$

$$-\frac{1}{1+i}\int e^{(1+i)x}\,dx = \frac{1}{2}x(1-i)e^{(1+i)x} - \frac{1}{(1+i)^2}e^{(1+i)x} =$$

$$= \frac{1}{2}x(1-i)e^{(1+i)x} + \frac{1}{2}ie^{(1+i)x} = \frac{1}{2}e^x(x(1-i)+i)e^{ix} =$$

$$= \frac{1}{2}e^x(x+(1-x)i)(\cos x + i\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}e^x(x\cos x + (x-1)\sin x + i((1-x)\cos x + x\sin x).$$

a) $\int x\sin x\, e^x\,dx = \frac{1}{2}e^x(x\sin x-(x-1)\cos x)+C$; (Im-del)

b) $\int x\cos x\, e^x\,dx = \frac{1}{2}e^x(x\cos x+(x-1)\sin x)+C'$; (Re-del)

Övning 5.34 (Sid. 276)

Lösning

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}-1} = \int\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2}+1) + \int\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x} + \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \underline{\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2}+1) + C.}$$

Anm. $\frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2}+1) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

Övning 5.35 (Sid. 276)

Lösning

$$\int|x-1|\,dx = \frac{1}{2}(x-1)|x-1|+C = f(x)\,;$$

$$f(0)=1 \Rightarrow \frac{1}{2}(-1)\cdot 1 + C = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}+C=1 \Leftrightarrow C=\frac{3}{2}\,;$$

$$f(x)=\frac{1}{2}((x-1)|x-1|+3) \Rightarrow f(3)=\frac{1}{2}(2\cdot 2+3)=\frac{7}{2}.$$

Anm. $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x\geq 1 \\ -(x-1), & x<1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2+C_1, & x\geq 1 \\ -\frac{1}{2}(x-1)^2+C_2, & x<1 \end{cases}$;

f kontinuerlig $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = C_2 = C_1 = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2+C, & x\geq 1 \\ -\frac{1}{2}(x-1)^2+C, & x<1 \end{cases}$$

$$f(0)=1 \Rightarrow -\frac{1}{2}(0-1)^2+C=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}+C=1 \Leftrightarrow C=\frac{3}{2}\,;$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}, & x\geq 1 \\ -\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}, & x<1 \end{cases}$$

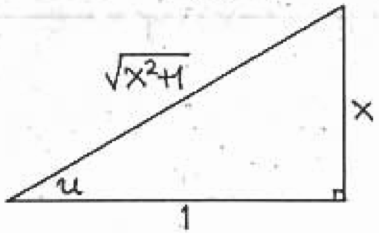
Alltså är $f(3)=\frac{1}{2}(3-1)^2+\frac{3}{2}=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$.

Övning 5.36 (Sid. 276)

Lösning

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \int\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \left[\begin{array}{l} x=\tan u \\ dx=\frac{1}{\cos^2 u}du \end{array}\right] = \int\frac{\cos^3 u}{\cos^2 u}\,du =$$

$$=\int \cos u\,du = \sin u + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$



$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1/2}} \Rightarrow I_{n-1}' = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1/2}} = \int 1 \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1/2}}dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1/2}} - \int x\cdot(-(n-\tfrac{1}{2}))(x^2+1)^{-n-1/2}\cdot 2x\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1/2}} + (n-\tfrac{1}{2})\cdot 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1/2}}dx = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1/2}} +$$

$$+(2n-1)\int\frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{n+1/2}}dx = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1/2}} + (2n-1)\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1/2}} -$$

$$-(2n-1)\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1/2}} \Leftrightarrow I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1/2}} + (2n-1)\cdot I_{n-1} -$$

$$-(2n-1)I_n \Leftrightarrow (2n-2)I_{n-1} + \frac{x}{(x^2+1)^{n-1/2}} = (2n-1)I_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1/2}} + \frac{2n-2}{2n-1}I_{n-1} \Leftrightarrow \int\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1/2}} =$$

$$= \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1/2}} + \frac{2n-2}{2n-1}\int\frac{dx}{(x^2+1)^{n-1/2}},\ n=1,2,3,\ldots$$

$$n=1 \Rightarrow \int\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

6. Bestämda integraler

Testövning 6.1 (Sid. 283)

Lösning

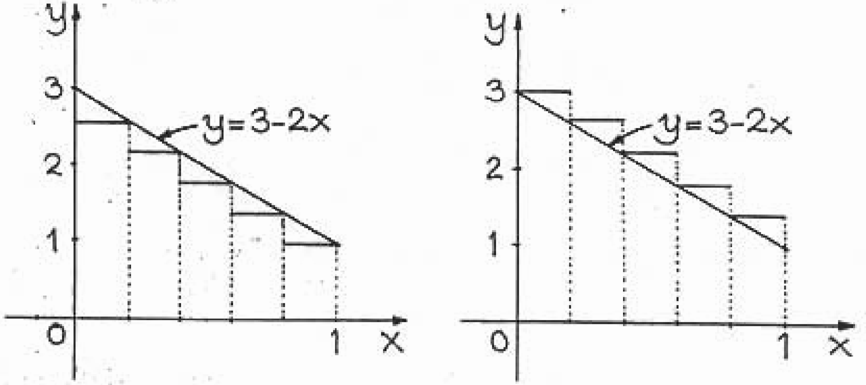
$$\int_{-2}^{7}\Phi(x)dx = \left(\int_{-2}^{2}+\int_{2}^{2}+\int_{2}^{5}+\int_{5}^{7}\right)\Phi(x)dx = 3\cdot(2-(-2)) +$$

$$+15\cdot(2-2)+(-5)(5-2)+(-1)(7-5) = 3\cdot4+15\cdot0-5\cdot3-2 = \underline{\underline{-5.}}$$

Testövning 6.2 (Sid. 284)

Lösning

a)



$$\Phi_5 = \begin{cases} 2{,}6\ ; & 0\le x<0{,}2 \\ 2{,}2\ ; & 0{,}2\le x\le 0{,}4 \\ 1{,}8\ ; & 0{,}4\le x\le 0{,}6 \\ 1{,}4\ ; & 0{,}6\le x\le 0{,}8 \\ 1{,}0\ ; & 0{,}8\le x\le 1 \end{cases} \qquad \Psi_5 = \begin{cases} 3,\ ; & 0\le x<0{,}2 \\ 2{,}6\ ; & 0{,}2\le x<0{,}4 \\ 2{,}2\ ; & 0{,}4\le x<0{,}6 \\ 1{,}8\ ; & 0{,}6\le x<0{,}8 \\ 1{,}4\ ; & 0{,}8\le x\le 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1\Phi_5(x)dx = \left(\int_0^{0{,}2}+\int_{0{,}2}^{0{,}4}+\int_{0{,}4}^{0{,}6}+\int_{0{,}6}^{0{,}8}+\int_{0{,}8}^{1}\right)\Phi_5(x)dx =$$

$$=0{,}2\cdot2{,}6+0{,}2\cdot2{,}2+0{,}2\cdot1{,}8+0{,}2\cdot1{,}4+0{,}2\cdot1{,}0 = \underline{\underline{1{,}8.}}$$

$\int_0^1 \Psi_5(x)dx = 0{,}2\cdot 3{,}0 + 0{,}2\cdot 2{,}6 + 0{,}2\cdot 2{,}2 + 0{,}2\cdot 1{,}8 + 0{,}2\cdot 1{,}4 = \underline{\underline{2{,}2}}.$

b) $\underline{f(x) = 3-2x,\ 0 \leq x \leq 1}$

$\int_0^1 \Phi_{10}(x)dx = \sum_{k=1}^{10} f(\frac{k}{10})\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}(3-2\cdot\frac{k}{10}) = \frac{1}{10}\cdot(\sum_{k=1}^{10} 3 -$
$-\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{10} k) = \frac{1}{10}(3\cdot 10 - \frac{1}{5}\frac{10\cdot 11}{2}) = \frac{1}{10}(30-11) = \frac{19}{10} = \underline{\underline{1{,}9}}.$

$\int_0^1 \Psi_{10}(x)dx = \sum_{k=1}^{10} f(\frac{k-1}{10})\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}(3-2\cdot\frac{k-1}{10}) =$
$= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}(3{,}2-\frac{1}{5}k) = \frac{1}{10}(3{,}2\cdot 10 - \frac{1}{5}\cdot\frac{10\cdot 11}{2}) = \frac{1}{10}(32-11) = \underline{\underline{2{,}1}}.$

c) $\int_0^1 \Phi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}(3-2\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 3 -$
$-\frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = 3-(1+\frac{2}{n}) = \underline{\underline{2-\frac{2}{n}}}.$

$\int_0^1 \Psi_n(x)dx = \underline{\underline{2+\frac{2}{n}}}$, visas på samma sätt.

d) $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}(2-\frac{2}{n}) = 2.$

Testövning 6.3 (Sid. 292)

Lösning

$\underline{f(x) = \arctan 4x,\ n-5 \leq x \leq n+3}.$

a) $\int_{n-5}^{n+3}\Phi_8(x)dx = \underbrace{f(n-5)+f(n-4)+f(n-3)+\cdots+f(n+3)}_{8\text{ termer}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_{n-5}^{n+3}\Phi_8(x)dx = \lim_{n\to\infty}(\arctan 4(n-5)+\cdots+$
$+\arctan 4(n+3)) = \frac{\pi}{2}+\cdots+\frac{\pi}{2} = 8\cdot\frac{\pi}{2} = 4\pi.$

b) Sats 6.5 konsulteras.

$\int_{n-5}^{n+5}\arctan 4x\,dx = \arctan 4\xi\cdot(n+3-(n-5)) =$
$= 8\arctan 4\xi,\quad n-5 \leq \xi \leq n+3.$

$\lim_{n\to\infty}\int_{n-5}^{n+3}\arctan 4x\,dx = \lim_{\xi\to\infty} 8\arctan 4\xi = 8\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{4\pi}}.$

Testövning 6.4 (Sid. 292)

Lösning

Sats 6.7 konsulteras.

a) $f(x) = \int_2^x \sqrt{1+t^4}\,dt \Rightarrow \underline{\underline{f'(x) = \sqrt{1+x^4}}}.$

b) $g(x) = \int_x^7 \frac{e^t}{t^2+1}dt = -\int_7^x \frac{e^t}{t^2+1}dt \Rightarrow \underline{\underline{g'(x) = -\frac{e^x}{x^2+1}}}.$

Testövning 6.5 (Sid. 292)

Lösning

Om $g(x) \equiv 0$ är satsen trivial, varför vi kan anta att $g(x) \not\equiv 0$. Enligt Sats 3.8 (sid 146) existerar $f_{max} = M$ och $f_{min} = m$, dvs.

$m \leq f(x) \leq M \Leftrightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),\quad a<x<b,$
$\Rightarrow m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M;$

Enligt Satsen om mellanliggande värden existerar (minst) ett $\xi \in [a,b]$, sådant att

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}, \text{ VSV.}$$

Övning 6.6 (Sid. 292)

Lösning

$\underline{f(x) = \int_1^x e^{-2t^3}(t^2-t-2)dt, \ 1 \leq x \leq 8.}$

$f'(x) = e^{-2x^3}(x^2-x-2) = 0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=2$;

	1		2		8	→ x
sgnf'(x)		−	0	+		
f(x)	0	↘	f(2)	↗	f(8)	

Resultat: $f_{min} = f(2) = \int_1^2 e^{-2x^3}(x^2-x-2)dx$.

Övning 6.7 (Sid. 292)

Lösning

Sats 5.6 $\Rightarrow \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt = \frac{1}{x}f(\xi)\cdot x = f(\xi), \ x<\xi<2x$;

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt = \lim_{\xi\to 0} f(\xi) = f(0). \quad (x\to 0 \Rightarrow \xi \to 0).$

Övning 6.8 (Sid. 295)

Lösning Se nästföljande sida.

a) $\frac{3x-5}{x^2-2x-3} = \frac{3x-5}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-3)}{(x-3)(x+1)}$

$\Leftrightarrow 3x-5 = (A+B)x + A-3B \Leftrightarrow A+B=3 \wedge A-3B=-5$

$\Leftrightarrow A=1 \wedge B=2 \Rightarrow \underline{\frac{3x-5}{x^2-2x-3} = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+1}}$;

$\int_0^1 \frac{3x-5}{x^2-2x-3}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\ln|x-3| + \ln|x+1|\right]_0^1 =$

$= \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 - \ln 1 = \ln\frac{2\cdot 2}{3} = \underline{\ln\frac{4}{3}}.$

b) $\int_0^{\pi/2} x\cdot\sin 2x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} f(x)=\sin 2x & g(x)=x \\ F(x)=-\frac{\cos 2x}{2} & g'(x)=1 \end{array}\right] = \left[-\frac{x\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} +$

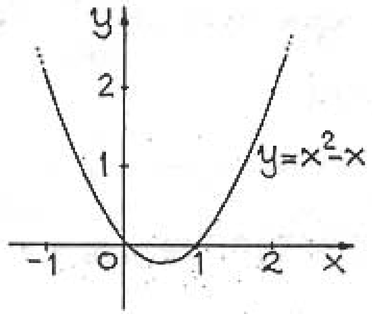
$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \underline{\frac{\pi}{4}}.$

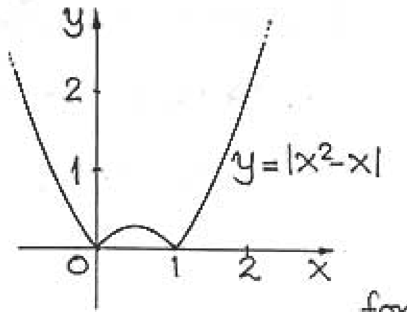
c) $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx = \left[\begin{array}{l|l} t=1+x^2 & x=1 \Rightarrow t=2 \\ dt=2xdx & x=0 \Rightarrow t=1 \end{array}\right] = \int_1^2 \ln t\cdot\frac{dt}{2} =$

$= \frac{1}{2}\left[t\ln t - t\right]_1^2 = \underline{\frac{1}{2}(2\ln 2 - 1)}.$

d) $f(x) = x^2-x = x(x-1)$;

	0		1		2	→ x
sgnf(x)		−	0	+		





forts

$$\int_0^2 |x^2-x|\,dx = \left(\int_0^1 + \int_1^2\right)|x^2-x|\,dx = \int_0^1(-(x^2-x))\,dx +$$

$$+\int_1^2 (x^2-x)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{8}{3}-2+$$

$$+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3} = \tfrac{8}{3}-\tfrac{2}{3}-1 = \underline{\underline{1}}.$$

Testövning 6.9 (Sid. 295)

Lösning

$$\left.\begin{aligned} i(t) &= \sin 50t \Rightarrow T = \tfrac{2\pi}{50} = \tfrac{\pi}{25} \\ j(t) &= |i(t)| = |\sin 50t| \Rightarrow T = \tfrac{\pi}{50} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_\ell = \frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi/25}\int_0^{\pi/25} |\sin 50t|\,dt = \frac{25}{\pi}\left(\int_0^{\pi/50} + \int_{\pi/50}^{\pi/25}\right)|\sin 50t|\,dt =$$

$$= \frac{25}{\pi}\left(\int_0^{\pi/50} \sin 50t\,dt - \int_{\pi/50}^{\pi/25} \sin 50t\,dt\right)dt =$$

$$= \frac{25}{\pi}\left[-\frac{\cos 50t}{50}\Big|_0^{\pi/50} + \frac{\cos 50t}{50}\Big|_{\pi/50}^{\pi/25}\right) = \frac{25}{\pi}\left(\frac{1-\cos\pi}{50} +\right.$$

$$\left.+\frac{\cos 2\pi - \cos\pi}{50}\right) = \frac{25}{\pi}\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{25}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{\pi}}}.$$

Testövning 6.10 (Sid. 298)

Lösning

a) $$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = \left[\begin{array}{l|l} x = 1-t^2 & x=1 \Rightarrow t=0 \\ dx = -2t\,dt & x=0 \Rightarrow t=1 \end{array}\right] = \int_0^1 (1-t^2)t(-2t)\,dt =$$

$$= -2\int_1^0 (t^2-t^4)\,dt = 2\int_0^1 (t^2-t^4)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{4}{15}}}.$$

b) $$\int_1^e (\ln x)^3\,dx = \left[\begin{array}{l|l} x = e^t & x=e \Rightarrow t=1 \\ dx = e^t\,dt & x=1 \Rightarrow t=0 \end{array}\right] = \int_0^1 t^3 e^t\,dt =$$

$$= \left[(t^3-3t^2+6t-6)e^t\right]_0^1 = \underline{\underline{-2e+6}}.$$

Anm. D kallas derivatoperator; D^{-1} kallas antiderivator eller "integrator" eller integral-operator. $Df(x) = f'(x)$; $D^{-1}f(x) = \int f(x)\,dx$, utan integrationskonstant; $D^{-2}f(x) = D^{-1}(D^{-1}f(x))$.

$$D^{-1}(f(x)g(x)) = (D^{-1}f(x))g(x) - (D^{-2}f(x))Dg(x) +$$

$$+(D^{-3}f(x))D^2g(x) - (D^{-4}f(x))D^3g(x) + \cdots \text{ osv.}$$

$$D^{-1}(t^3e^t) = D^{-1}(e^t t^3) = e^t\cdot t^3 - e^t\cdot 3t^2 + e^t\cdot 6t - e^t\cdot 6 =$$

$$= \underline{\underline{e^t(t^3-3t^2+6t-6)}}.$$

c) $$\int_0^{\pi^3} \cos(\sqrt[3]{x})\,dx = \left[\begin{array}{l|l} x = t^3 & x=\pi^3 \Rightarrow t=\pi \\ dx = 3t^2\,dt & x=0 \Rightarrow t=0 \end{array}\right] =$$

$$= 3\int_0^{\pi} \cos t\cdot t^2\,dt = 3\left[\sin t\cdot t^2 + \cos t\cdot 2t + \sin t\cdot 2\right]_0^{\pi} =$$

$$= 3(2\pi\cos\pi) = \underline{\underline{-6\pi}}.$$

d) $$\int_0^{\pi/4} \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= \left[\ln(\sin x + \cos x)\right]_0^{\pi/4} = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Anm. $D^{-1}\left(\frac{Df(x)}{f(x)}\right) = \ln|f(x)|$.

Övning 6.11 (Sid. 298)

Lösning

a) $\int_0^1 x^3e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2e^{x^2}\cdot 2xdx = \left[\begin{array}{c|c} t=x^2 & 1\to 1 \\ dt=2xdx & 0\to 0\end{array}\right] =$

$= 2\int_0^1 te^t dt = 2\left[(t-1)e^t\right]_0^1 = 2(0-(-1)) = \underline{2.}$

b) $\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}dx = \int_0^{\pi/4}\tan^5 x\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \left[\begin{array}{c|c} t=\tan x & \frac{\pi}{4}\to 1 \\ dt=\frac{dx}{\cos^2 x} & 0\to 0\end{array}\right] =$

$= \int_0^1 t^5 dt = \left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{6}.}$

c) $f(x) = |\sin 2x| = \begin{cases}\sin 2x, & 0\leq x\leq \pi/2 \\ -\sin 2x, & \pi/2 < x \leq \pi\end{cases} \Rightarrow \int_0^{\pi}|\sin 2x|dx =$

$= \int_0^{\pi/2}\sin 2x dx - \int_{\pi/2}^{\pi}\sin 2x dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/2} +$

$+ \left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0 + \frac{1}{2}\cos 2\pi - \frac{1}{2}\cos\pi =$

$= 4\cdot\frac{1}{2} = \underline{2.}$

d) $f(x) = |2-e^x| \overset{!}{=} \left\{\begin{array}{l} 2-e^x, \quad 0\leq x\leq \ln 2 \\ -(2-e^x), \quad \ln 2 < x \leq 2\end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^2 |2-e^x|dx =$

$= \int_0^{\ln 2}(2-e^x)dx - \int_{\ln 2}^2 (2-e^x)dx = \left[2x-e^x\right]_0^{\ln 2} -$

$-\left[2x-e^x\right]_{\ln 2}^2 = 2\ln 2 - e^{\ln 2} - 0 + 1 - (4 - e^2 - 2\ln 2 + e^{\ln 2}) =$

$= 2\ln 2 - 2 + 1 - (4 - e^2 - 2\ln 2 + 2) = \underline{e^2 + 4\ln 2 - 7.}$

Anm. $\overset{!}{=}$ underförstås: $2-e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2.$

e) $\int_{-\pi/5}^{\pi/5}\frac{x}{\cos^2 x}dx = 0$, ty $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}, -\frac{\pi}{5}\leq x\leq\frac{\pi}{5}$, udda.

f) $\int_0^1 (\arcsin x)^2 dx = \left[\begin{array}{c|c} x=\sin t & 1\to\frac{\pi}{2} \\ dx=\cos t dt & 0\to 0\end{array}\right] = \int_0^{\pi/2} t^2\cos t\, dt =$

$= \left[t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t\right]_0^{\pi/2} = \underline{\frac{\pi^2}{4} - 2.}$

Övning 6.12 (Sid. 298)

Lösning

a) Låt $\mathcal{F}(x)$ vara en primitiv till $e^x\cos x$.

$f(x) = \int_x^{x^3} e^t\cos t\, dt = \mathcal{F}(x^3) - \mathcal{F}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}\mathcal{F}(x^3) -$

$-\frac{d}{dx}\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}'(x^3)\frac{d}{dx}x^3 - \mathcal{F}'(x) = \underline{e^{x^3}\cdot\cos x^3\cdot 3x^2 - e^x\cos x.}$

b) Låt $\mathcal{F}(x)$ vara en primitiv till $\frac{\tan x}{x}$.

$f(x) = \int_{x^2}^{\mathrm{atn}x}\frac{\tan t}{t}dt = \mathcal{F}(\mathrm{atn}x) - \mathcal{F}(x^2) \Rightarrow f'(x) =$

$= \frac{d}{dx}\mathcal{F}(\mathrm{atn}x) - \frac{d}{dx}\mathcal{F}(x^2) = \mathcal{F}'(\mathrm{atn}x)\frac{d}{dx}\mathrm{atn}x - \mathcal{F}(x^2)\frac{d}{dx}x^2 =$

$= \frac{\tan(\mathrm{atn}x)}{\mathrm{atn}x}\cdot\frac{1}{x^2+1} - \frac{\tan x^2}{x^2}\cdot 2x = \underline{\frac{x}{(x^2+1)\arctan x} - \frac{2\tan x}{x}.}$

Övning 6.13 (Sid. 299)

Lösning

$f(-x) = f(x) \Rightarrow \int_{-a}^{a}f(x)dx = \left(\int_{-a}^{0} + \int_0^a\right)f(x)dx = \int_0^a f(x)dx +$

$$+\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l|l} x=-t & x=0 \Rightarrow t=0 \\ dx=-dt & x=-a \Rightarrow t=a \end{array}\right] = \int_0^a f(x)\,dx +$$

$$+\int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(-t)\,dt = \int_0^a f(x)\,dx +$$

$$+\int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Övning 6.14 (Sid. 299)

Lösning

a) $\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x).$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)\,dx\,;$$

$$\underline{m=n} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^2 mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2mx)\,dx = \pi\,;$$

$$\underline{m\neq n} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

b) $\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)\,;$

$$\underline{m=n} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2mx)\,dx = \pi.$$

$$\underline{m\neq n} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m-n)x}{m-n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

c) $\underline{m=n} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos mx \sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2mx\,dx = 0\,;$

$$\underline{m\neq n} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\sin(m+n)x + \sin(n-m)x)\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(n-m)x}{n-m}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Övning 6.15 (Sid. 299)

Lösning

$$\ln x^y = \int_1^{x^y} \frac{dt}{t} = \left[\begin{array}{l|l} t=u^y & t=x^y \Rightarrow u=x \\ dt=yu^{y-1}du & t=1 \Rightarrow u=1 \end{array}\right] =$$

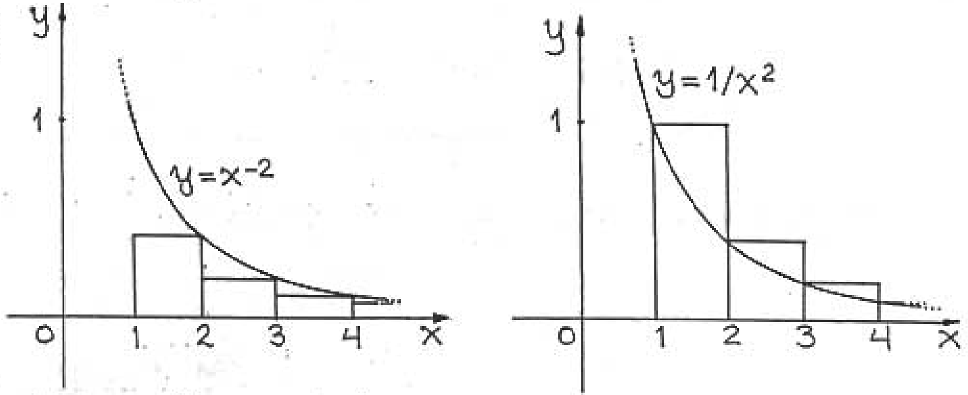
$$= \int_1^x \frac{1}{u^y} \cdot yu^{y-1}\,dy = \int_1^x y \cdot \frac{1}{u}\,du = y\int_1^x \frac{du}{u} =$$

$$= y \ln x.$$

Testövning 6.16 (Sid. 301)

Lösning

a)



b) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$ enl. uppskattningen (6.3)

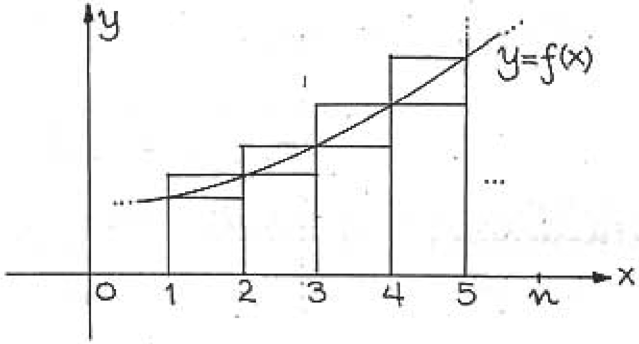
c) Formeln (6.4) ger

$$\frac{1}{n^2}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq 1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n \Leftrightarrow 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq 2-\frac{1}{n}, n \geq 1.$$

Övning 6.17 (Sid. 301)

Lösning

a)



Genom att betrakta rektanglarna under och över kurvan får vi

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

b) Den vänstra olikheten ger

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx + f(n)$$

och den högra likaså

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{n} f(k) \geq f(1) + \int_1^n f(x)dx.$$

Dessa sammanfattas i dubbelolikheten (b).

Övning 6.18 (Sid. 302)

Lösning

$f(x)=x^4,\ 1 \leq x \leq n$

f är växande, så formeln i föregående övning kan användas.

$$1+\int_1^n x^4dx \leq \sum_{k=1}^{n} k^4 \leq n^4+\int_1^n x^4dx \Leftrightarrow 1+\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^n \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} k^4 \leq n^4+\left[\frac{n^5}{5}\right]_1^n \Leftrightarrow \frac{4}{5}+\frac{n^5}{5} \leq \sum_{k=1}^{n} k^4 \leq n^4+\frac{n^5}{5}-\frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5n^5}+\frac{1}{5} \leq \frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n} k^4 \leq \frac{1}{n}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5n^5}\ ;\ (*)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5n^5}+\frac{1}{5}\right)=0+\frac{1}{5}=\frac{1}{5} \text{ och } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5n^5}\right)=\frac{1}{5}\ ;$$

Enligt instängningregeln får vi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}.$$

Övning 6.19 (Sid. 302)

Lösning

$f(x)=\frac{1}{x^3},\ 2 \leq m \leq x \leq n$, är strängt avtagande, så uppskattningen (6.4) med 1 utbytt mot m

$$\Rightarrow f(n)+\int_m^n f(x)dx \leq \sum_{k=m}^{n} f(k) \leq f(m)+\int_m^n f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^3}+\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_m^n \leq \sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{m^3}+\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_m^n \Leftrightarrow \frac{1}{n^3}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2m^2} \leq$$

$$\le \sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^3} \le \frac{1}{m^3}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2m^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2m^2}-\frac{1}{2n^2}\le\frac{1}{n^3}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2m^2}\le$$

$$\le\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^3}\le\frac{1}{m^3}+\frac{1}{2m^2}-\frac{1}{2n^2}\le\frac{1}{2(m-1)^2}-\frac{1}{2n^2},\text{ V.S.V.}$$

Anm. $\frac{1}{m^3}+\frac{1}{2m^2}=\frac{2+m}{2m^3}\overset{?}{\le}\frac{1}{2(m-1)^2}$; måste visas.

$(2+m)\cdot(m-1)^2-m^3=(2+m)(m^2-2m+1)-m^3=$

$=2\cancel{m^2}-4m+2-\cancel{m^3}-2\cancel{m^2}+2-\cancel{m^3}=4(1-m)<0$, för $m\geq 2$, vilket bekräftar uppskattningen.

Testövning 6.20 (Sid. 305)

Lösning

a) $S(f;\frac{1}{n})=\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}$

b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^2\ln(1+x)dx=[\frac{x^3}{3}\ln(1+x)]_0^1-$

$-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3}{x+1}dx=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\int_0^1(x^2-x+1-\frac{1}{x+1})dx=\frac{1}{3}\ln 2-$

$-\frac{1}{3}[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)]_0^1=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\ln 2)=$

$=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}(\frac{5}{6}-\ln 2)=\underline{\frac{2}{3}\ln 2-\frac{5}{18}}.$

c) $\underline{y=f(x),\ 2\le x\le 5.}$

$S(f;\frac{1}{n})=\sum_{k=0}^{n}f(2+\frac{3k}{n})\cdot\frac{1}{n}=\sum_{k=0}^{n}(2+\frac{3k}{n})^2\ln(3+\frac{3k}{n})\cdot\frac{1}{n}.$

Läs även författarnas lösningsförslag.

Övning 6.21 (Sid. 305)

Lösning

a) $S(f;\frac{1}{n})=\sum_{k=1}^{n}4\frac{k}{n}e^{-k^2/n^2}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}4\frac{k}{n^2}e^{-k^2/n^2}.$

b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}4\frac{k}{n^2}e^{-k^2/n^2}=\int_0^1 4xe^{-x^2}dx=[-2e^{-x^2}]_0^1=\underline{2(1-\frac{1}{e})}.$

c) $f(x)=4xe^{-x^2}\Rightarrow f'(x)=(4-8x^2)e^{-x^2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$; f är växande för $0\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ och avtagande för $\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le 1$; Riemannsumman är tagen med den högra ändpunkten, så den är en översumma i $[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$ och en undersumma i $[\frac{1}{\sqrt{2}},1]$. Svaret är nej. (Jfr Ex. 15)

Övning 6.22 (Sid. 305)

Lösning

a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{n^2-k^2})^{-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-k^2/n^2}}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$

$=[\arcsin x]_0^1=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\cdot\sin(\pi\frac{k}{n})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\sin(\pi\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}=$

$=\int_0^1 x\sin(\pi x)dx=[-\frac{x}{\pi}\cos\pi x]_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1\cos\pi x\,dx=\frac{1}{\pi}.$

Övning 6.23 (Sid. 311)

Lösning

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/4}} = \lim_{R\to\infty}\int_1^R x^{-3/4}\,dx = \lim_{R\to\infty}[4x^{1/4}]_1^R = 4\lim_{R\to\infty}\sqrt[4]{R} = \underline{\infty}$

Integralen är divergent.

b) $\int xe^{-3x}dx = \left[\begin{array}{l|l} f(x)=e^{-3x} & g(x)=x \\ F(x)=-\frac{e^{-3x}}{3} & g'(x)=1 \end{array}\right] = -\frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx =$

$= -\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} = -\frac{1}{9}e^{-3x}(3x+1) \Rightarrow \int_0^\infty xe^{-3x}dx =$

$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{9}e^{-3x}(3x+1)\right]_0^R = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\lim_{R\to\infty}(3R+1)e^{-3R} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}.$

c) $\int\frac{1}{1+9x^2}dx = \left[\begin{array}{l} t=3x \\ dt=3dx \end{array}\right] = \frac{1}{3}\arctan t = \frac{1}{3}\arctan 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^\infty\frac{dx}{1+9x^2} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{3}[\arctan 3x]_0^R = \frac{1}{3}\lim_{R\to\infty}\mathrm{atn}(3R) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}.$

d) $\int_1^\infty\frac{x-5}{x^2+4}dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{5}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_1^R =$

$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}(\ln(R^2+4) - 5\arctan\frac{R}{2}) - \frac{1}{2}(\ln 5 - 5\,\mathrm{atn}\frac{1}{2}) = \infty.$

Integralen är divergent, ty $\lim_{R\to\infty}\ln R = \infty$.

e) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx = \left[\begin{array}{l|l} f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}} & g(x)=x \\ F(x)=-2\sqrt{1-x} & g'(x)=1 \end{array}\right] = -2x\sqrt{1-x} +$

$+2\int\sqrt{1-x}\,dx = -2x\sqrt{1-x} - \frac{4}{3}(1-x)^{3/2} \Rightarrow \int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx =$

$= \left[-2x\sqrt{1-x} - \frac{4}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 = \underline{\underline{4/3}}.$

f) $x-x^2 = -(x^2-x) = -(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = \frac{1-(2x-1)^2}{4} \Rightarrow \sqrt{x(1-x)} =$

$= \frac{\sqrt{1-(2x-1)^2}}{2} \Rightarrow \int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = 2\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = [t=2x-1] =$

$= \int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arctan t = \arcsin(2x-1) \Rightarrow \int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx =$

$= [\arcsin(2x-1)]_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = 2\,\mathrm{asn}\,1 = \underline{\underline{\pi}}.$

Alternativa beteckningar: $\arctan x = \mathrm{atn}\,x =$

$= \tan^{-1}x$; $\arcsin x = \mathrm{asn}\,x = \sin^{-1}x$; $\arccos x =$

$= \mathrm{acn}\,x = \cos^{-1}x$.

Övning 6.24 (Sid. 312)

Lösning

a) $\int(2x-1)e^{-2x}dx = \int e^{-2x}(2x-1)dx = \left[\begin{array}{l|l} f(x)=e^{-2x} & g(x)=2x-1 \\ F(x)=-\frac{e^{-2x}}{2} & g'(x)=2 \end{array}\right]$

$= -\frac{e^{-2x}}{2}(2x-1) + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cdot 2dx = \frac{e^{-2x}}{2}(1-2x) - \frac{1}{2}e^{-2x} = -xe^{-2x}$

$\Rightarrow \int_0^\infty(2x-1)e^{-2x}dx = \lim_{R\to\infty}[-xe^{-2x}]_0^R = \lim_{R\to\infty}(-Re^{-2R}) = 0.$

b) $\int\frac{\ln(1+x)}{x^3}dx = \int\frac{1}{x^3}\ln(1+x)dx = \left[\begin{array}{l|l} f(x)=\frac{1}{x^3} & g(x)=\ln(1+x) \\ F(x)=-\frac{1}{2x^2} & g'(x)=\frac{1}{x+1} \end{array}\right]$

$= -\frac{\ln(1+x)}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2(1+x)}dx = -\frac{\ln(1+x)}{2x^2} + \frac{1}{2}\int(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1})dx$

$= \underline{-\frac{\ln(1+x)}{2x^2} + \frac{1}{2}(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}) + C}$;

forts

b) $\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^3}dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)\right]_1^R =$

$=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{R})-\frac{1}{R}-\frac{\ln(1+R)}{R^2}\right)-\frac{1}{2}(\ln 2-1-\ln 2)=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$

c) $\int\frac{1}{e^x+3+2e^{-x}}dx=\int\frac{1}{(e^x)^2+3e^x+2}e^x dx=\begin{bmatrix} t=e^x \\ dt=e^x dx\end{bmatrix}=$

$=\int\frac{1}{t^2+3t+2}dt=\int\frac{dt}{(t+2)(t+1)}=\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\ln\frac{t+1}{t+2}=$

$=\ln\frac{e^x+1}{e^x+2}=\ln\frac{1+e^{-x}}{1+2e^{-x}}\Rightarrow\int_0^\infty\frac{dx}{e^x+3+2e^{-x}}=\lim_{R\to\infty}\left[\ln\frac{1+e^x}{2+e^x}\right]_0^R=$

$=\lim_{R\to\infty}\ln\frac{1+e^{-R}}{1+2e^{-R}}-\ln\frac{2}{3}=\ln 1+\ln\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\underline{\underline{\ln\frac{3}{2}}}.$

d) $\int\frac{dx}{x^2-4}=\int\frac{1}{x^2-4}dx=\int\frac{1}{(x-2)(x+2)}dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx=$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{x-2}{x+2}\Rightarrow\int_2^3\frac{dx}{x^2-4}=\lim_{\varepsilon\to0+}\left[\ln\frac{x-2}{x+2}\right]_{2+\varepsilon}^3=\ln\frac{1}{5}-$

$-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}=\ln\frac{1}{5}+\infty=\infty.$

Integralen är <u>divergent</u>.

<u>Övning 6.25 (Sid. 312)</u>

<u>Lösning</u>

a) $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to0+}\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1=\frac{1}{1-\alpha}-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}=$

$=\frac{1}{1-\alpha}\Leftrightarrow 1-\alpha>0\Leftrightarrow\underline{\underline{\alpha<1}}.$

b) $\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_1^R=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}R^{1-\alpha}+\frac{1}{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha-1}$

$\Leftrightarrow 1-\alpha<0\Leftrightarrow\underline{\underline{\alpha>1}}.$

c) $\int_0^\infty\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}+\lim_{R\to\infty}\int_1^R\frac{dx}{x^\alpha}$;

Den första integralen konvergerar för $\alpha<1$ och den andra för $\alpha>1$; det finns således inga α för vilka båda integralerna konvergerar.

<u>Resultat</u>: Integralen divergerar för alla α.

d) För $x\geq e$ är $\frac{1}{1-\alpha}(\ln x)^{1-\alpha}$ en primitiv till integranden, då $\alpha\neq1$, och $\ln(\ln x)$ en primitiv då $\alpha=1$, så $\int_e^\infty\frac{dx}{x\cdot(\ln x)^\alpha}$ konvergerar för $\alpha>1$.

<u>Övning 6.26 (Sid. 312)</u>

<u>Lösning</u>

a) $\int\arctan 2x\,dx=\int 1\cdot\mathrm{atn}\,2x\,dx=\left[\begin{array}{l|l} f(x)=1 & g(x)=\mathrm{atn}2x \\ F(x)=x & g'(x)=\frac{2}{1+4x^2}\end{array}\right]$

$=x\,\mathrm{atn}2x-2\int\frac{x}{1+4x^2}dx=x\cdot\mathrm{atn}\,2x-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)\Rightarrow$

$\Rightarrow\int_0^{1/2}\arctan 2x\,dx=\left[x\cdot\arctan 2x-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)\right]_0^{1/2}=$

$=\frac{1}{2}\arctan 1-\frac{1}{4}\ln 2=\underline{\underline{\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2}}.$

b) $\int e^x\ln(1+e^{2x})dx=\int\ln(1+e^{2x})\cdot e^x dx=\begin{bmatrix} t=e^x \\ dt=e^x dx\end{bmatrix}=$

$=\int\ln(1+t^2)dt=\int 1\cdot\ln(1+t^2)dt=\left[\begin{array}{l|l} f(t)=1 & g(t)=\ln(1+t^2) \\ F(t)=t & g'(t)=\frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right]=$

$= t\cdot \ln(1+t^2) - \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt = t\cdot\ln(1+t^2) - 2\int(1-\frac{1}{t^2+1})dt =$

$= t\ln(1+t^2) - 2t + 2\arctan t = e^x\ln(1+e^{2x}) - 2e^x +$

$+ 2\arctan e^x \Rightarrow \int_0^1 e^x\ln(1+e^{2x})dx = [e^x\ln(1+e^{2x}) -$

$- 2e^x + 2\arctan e^x]_0^1 = e\ln(1+e^2) - 2e + 2\text{atn}e - \ln 2 +$

$+ 2 - 2\,\text{atn}1 = \underline{e\ln(1+e^2) - \ln 2 + 2\text{atn}e - \frac{\pi}{2} + 2 - 2e}.$

<u>Anm.</u> $\int_0^1 e^x\cdot\ln(1+e^{2x})dx \approx 2{,}517648408.$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = \left[\begin{array}{c} x=t^2 \\ dx = 2t\,dt\end{array}\right] = \int\frac{1}{t(1+t)^2}2t\,dt = \int\frac{2}{(1+t)^2}dt =$

$= -\frac{2}{1+t} = -\frac{2}{1+\sqrt{x}} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{2dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = \lim_{R\to\infty}[-\frac{2}{1+\sqrt{x}}]_0^R = 2.$

d) $\int x^2e^{-x}dx = \int e^{-x}\cdot x^2dx = \left[\begin{array}{c|c} f(x)=e^{-x} & g(x)=x^2 \\ F(x)=-e^{-x} & g'(x)=2x\end{array}\right] =$

$= -x^2e^{-x} + \int e^{-x}\cdot 2x\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx =$

$= -(x^2+2x+2)e^{-x} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-|x|}dx \overset{!}{=} 2\int_0^\infty x^2e^{-x}dx =$

$= 2\lim_{R\to\infty}[-(x^2+2x+2)e^{-x}]_0^R = 4 - 2\lim_{R\to\infty}(R^2+2R+2)e^{-R} = \underline{4}.$

<u>Anm.</u> I $\overset{!}{=}$ underförstås resultatet i Ö. 6.13.

<u>Övning 6.27 (Sid. 312)</u>

<u>Lösning</u>

Se nästföljande sida.

$\int_0^{\pi/2}\frac{2\cos x}{(1+\sin x)(2-\cos^2x)}dx = \int_0^{\pi/2}\frac{2\cos x}{(1+\sin x)(1+\sin^2x)}dx =$

$= \left[\begin{array}{c|c} t=\sin x & x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1 \\ dt=\cos x\,dx & x=0\Rightarrow t=0\end{array}\right] = \int_0^1\frac{2}{(1+t)(1+t^2)}dt =$

$= \int_0^1(\frac{1}{t+1} - \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1})dt = [\ln(t+1) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \text{atn}t]_0^1 =$

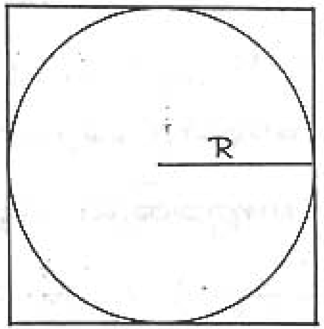
$= \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 + \text{atn}1 = \underline{\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}}.$

<u>Övning 6.28 (Sid. 312)</u>

<u>Lösning</u>

$2\pi R$ är omkretsen och utesluts direkt. Även $2\pi R^2$ förkastas, ty

$$2\pi R^2 > 2\cdot 3R^2 > 2^2R^2 = (2R)^2.$$



<u>Övning 6.29 (Sid. 312)</u>

$f(x) = \int_0^x e^{-t^3}\sin 2t\,dt \Rightarrow f'(x) = e^{-x^3}\cdot\sin 2x,\ 0\leq x\leq 2\pi.$

$f'(x)=0 \Rightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow 2x=n\pi \Leftrightarrow x=n\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}.$

$0\leq n\frac{\pi}{2}\leq 2\pi \Rightarrow 0\leq n\leq 4 \Rightarrow \underline{x=0} \vee \underline{x=\frac{\pi}{2}} \vee \underline{x=\pi} \vee$

$\vee\ \underline{x=\frac{3\pi}{2}} \vee \underline{x=2\pi}.$

	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π	x
$\text{sgn} f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\frac{\pi}{2})$	$\searrow$	$f(\pi)$	$\nearrow$	$f(\frac{3\pi}{2})$	$\searrow$	$f(2\pi)$	

$f(\pi/2)>f(3\pi/2)$, ty $\int_{\pi/2}^{\pi}|\phi(x)|dx > \int_{\pi}^{3\pi/2}|\phi(x)|dx$,

dvs. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\phi(x)dx<0$, med $\phi(x)=e^{-x^3}\sin 2x$.

Observera att $\phi(x)$ är kraftigt dämpad.

Svar: $f_{max}=f(\frac{\pi}{2})=\int_0^{\pi/2}e^{-x^2}\sin 2x\,dx.$

Övning 6.30 (Sid. 312)

Lösning

a) $\int\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx=\int\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot x\,dx\begin{bmatrix} f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2} & g(x)=x \\ F(x)=-\frac{1}{1+e^x} & g'(x)=1\end{bmatrix}=$

$=-\frac{x}{e^x+1}+\int\frac{1}{e^x+1}dx=-\frac{1}{e^x+1}+\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=-\frac{x}{e^x+1}-$

$-\ln(1+e^{-x}) \Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx=\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{x}{e^x+1}-\ln(1+e^{-x})\right]_0^R=$

$=\ln 2-\lim_{R\to\infty}\left(\frac{R}{e^R+1}+\ln(1+e^{-R})\right)=\underline{\ln 2}.$

b) $\int\frac{\arctan x}{(x+1)^2}dx=-\frac{\text{atn}\,x}{x+1}+\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}=-\frac{\text{atn}\,x}{x+1}+\frac{1}{2}\int(\frac{1}{x+1}-$

$-\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1})dx==-\frac{\text{atn}\,x}{x+1}+\frac{1}{2}(\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+\text{atn}\,x) \Rightarrow$

$\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{(x+1)^2}dx=\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{\text{atn}\,x}{x+1}+\frac{1}{2}(\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+\text{atn}\,x)\right]_0^R=$

$=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}(\text{atn}\,R+\ln\frac{R+1}{\sqrt{R^2+1}}-2\frac{\text{atn}\,R}{R+1})=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\underline{\frac{\pi}{4}}.$

Övning 6.31 (Sid. 312)

Lösning

$y=e^{4x}+2e^{2x}-5 \Leftrightarrow (e^{2x})^2+2e^{2x}=y+5 \Leftrightarrow e^{2x}=1+\sqrt{y+6}$

$\Leftrightarrow 2x=\ln(\sqrt{y+6}-1) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{y+6}-1)=g(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{x+6}-1})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+6}} \Rightarrow \int_{-2}^{3}g''(x)dx=[g'(x)]_{-2}^{3}=$

$=g'(3)-g'(-2)=\frac{1}{2\cdot2\cdot6}-\frac{1}{2\cdot1\cdot4}=\frac{1}{24}-\frac{1}{8}=-\frac{2}{24}=\underline{-\frac{1}{12}}.$

Övning 6.32 (Sid. 313)

Lösning

$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2(x-b)^2}dx=\begin{bmatrix} t=|a|(x-b) \\ dt=|a|dx\end{bmatrix}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\frac{dt}{|a|}=\frac{\sqrt{\pi}}{2|a|}, a\neq 0.$

Övning 6.33 (Sid. 313)

Lösning

$A(h)=\int_R^{R+h}\frac{mgR^2}{x^2}dx=\left[-\frac{mR^2g}{x}\right]_R^{R+h}=mgR^2(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h})$

Kroppens "frigörelse" kräver att den når ∞, dvs

$$A(\infty)=\lim_{h\to\infty}mgR^2(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h})=mgR.$$

Övning 6.34 (Sid. 313)

Lösning

$f(x)=\frac{1}{e^x-e^{-x}}$, $2\leq x\leq n$, är strängt avtagande, dvs

$$\sum_{k=2}^{n} f(k)\leq f(2)+\int_2^n f(x)dx=f(2)+\int_2^n \frac{e^x}{(e^x)^2-1}dx\left[\begin{matrix}t=e^x\\ dt=e^x dx\end{matrix}\right]=$$

$$=f(2)+\int_{e^2}^{e^n}\frac{1}{t^2-1}dt=f(2)+\left[\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_{e^2}^{e^n}=f(2)+\frac{1}{2}\ln\frac{e^n-1}{e^n+1}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{e^2-1}{e^2+1}\leq\frac{1}{e^2-e^{-2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{e^2-1}{e^2+1}-\frac{1}{2}\ln\frac{e^2-1}{e^2+1}=\underline{\frac{1}{e^2-e^{-2}}=C.}$$

Övning 6.35 (Sid. 313)

Lösning

$$\int_1^2|e^x-t|dt=\int_1^2|t-e^x|dt=\left[\frac{1}{2}(t-e^x)|t-e^x|\right]_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}((2-e^x)|2-e^x|-(1-e^x)|1-e^x|);$$

$1-e^x$ byter tecken för $x=0$ och $2-e^x$ för $x=\ln 2$;

(1) $x<0\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}((2-e^x)(2-e^x)-(1-e^x)(1-e^x))=$

$$=\frac{1}{2}(4-4e^x+e^{2x}-1+2e^x-e^{2x})=$$

$$=\frac{1}{2}(3-2e^x)$$

(2) $0\leq x<\ln 2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}((2-e^x)(2-e^x)+(1-e^x)(1-e^x))$

$$=\frac{1}{2}(4-4e^x+e^{2x}+1-2e^x+e^{2x})=$$

$$=\frac{1}{2}(5-6e^x+2e^{2x});$$

(3) $x\geq\ln 2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}((2-e^x)(e^x-2)+(1-e^x)(1-e^x))=$

$$=\frac{1}{2}(-4+4e^x-e^{2x}+1-2e^x+e^{2x})=$$

$$=\frac{1}{2}(-3+2e^x)$$

(1)-(3) ovan sammanfattas i

$$y=f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(3-2e^x), & x<0\\ \frac{1}{2}(5-6e^x+2e^{2x}), & 0\leq x<\ln 2\\ \frac{1}{2}(-3+2e^x), & x\geq\ln 2\end{cases};$$

$$y'=f'(x)=\begin{cases}-e^x, & x<0\\ -3e^x+2e^{2x}, & 0<x<\ln 2\\ e^x, & x>\ln 2\end{cases};$$

f' är strängt avtagande för $x<0$ och strängt växande för $x>\ln 2$; den har ett nollställe $x=\ln\frac{3}{2}$ i $0<x<\ln 2$. Vi har följande tabell

	$-\infty$		0		$\ln\frac{3}{2}$		$\ln 2$		∞	x
$\operatorname{sgn} f'(x)$	0^-	$-$		$-$	0	$+$		$-$	∞	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{2}$	↗	∞	

$\underline{f_{min}=f(\ln\frac{3}{2})=\frac{1}{4}\ ;\ f_{max}\text{ saknas.}}$

$f(x)$ är deriverbar för alla x, ty $|t-e^x|$ är kontinuerlig. F.ö. bör memoreras $\int|u|du=\frac{1}{2}u|u|+C$.

Övning 6.36 (Sid. 314)

Lösning

$1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \sqrt{1-\cos\varphi} = \sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}$, för $0\leq\varphi\leq\pi$.

$\cos\varphi_0 - \cos\varphi = 1+\cos\varphi_0-(1+\cos\varphi) = 2\left(\cos^2\frac{\varphi_0}{2}-\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$

$$T=\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\varphi_0}^{\pi}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\varphi_0}{2}-\cos^2\frac{\varphi}{2}}}d\varphi = \begin{bmatrix} t=\cos\frac{\varphi}{2} \\ dt=-\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}d\varphi \end{bmatrix} =$$

$$=\sqrt{\frac{R}{g}}\cdot\int_{\cos\frac{\varphi_0}{2}}^{0}\frac{dt}{\sqrt{\cos^2\frac{\varphi_0}{2}-t^2}}\cdot(-2) = 2\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\cos^2\frac{\varphi_0}{2}}\frac{dt}{\sqrt{\cos^2\frac{\varphi_0}{2}-t^2}} =$$

$$=2\sqrt{\frac{R}{g}}\left[\arcsin\frac{t}{\cos(\varphi_0/2)}\right]_0^{\cos\frac{\varphi_0}{2}} = 2\cdot\sqrt{\frac{R}{g}}\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$$

Övning 6.37 (Sid. 314)

Lösning

(1) $a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n} \geq \frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{n+n} =$

$=\frac{1}{2n}\cdot n = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n;\ n=1,2,\ldots$, är nedåt begränsad.

(2) $a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}+\frac{1}{2n+1}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) =$

$=+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1} = -\frac{n}{(n+1)(2n+1)} < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

$\Rightarrow a_n;\ n\geq 1$, är strängt avtagande.

Ur (1) och (2) följer att talföljden är konvergent.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1\frac{dx}{x+1} = \ln 2$. (Sats 6.11).

Övning 6.38 (Sid. 314)

Lösning

a) $f(t)=1 \Rightarrow \mathcal{F}(s)=\int_0^\infty 1\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^R =$

$=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\lim_{R\to\infty}e^{-sR} = \underline{\frac{1}{s}}$, $s>0$.

b) $f(t)=t \Rightarrow \mathcal{F}(s)=\int_0^\infty t\cdot e^{-st}dt = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{t}{s}e^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^R =$

$=\frac{1}{s^2}-\lim_{R\to\infty}\left(\frac{R}{s}e^{-sR}+\frac{1}{s^2}e^{-Rs}\right) = \underline{\frac{1}{s^2}}$, $s>0$

c) $f(t)=e^{at} \Rightarrow \mathcal{F}(s)=\int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt =$

$=\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^R = \frac{1}{s-a}\left(1-\lim_{R\to\infty}e^{-(s-a)R}\right) = \underline{\frac{1}{s-a}}$,

om $s-a>0$, dvs om $s>a$.

d) $f(t)=\sin at = \frac{1}{2i}(e^{iat}-e^{-iat}) \supset \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia}-\frac{1}{s+ia}\right) =$

$=\frac{1}{2i}\,\frac{s+ia-s+ia}{(s-ia)(s+ia)} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{2ai}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2}$, $|s|>|a|$.

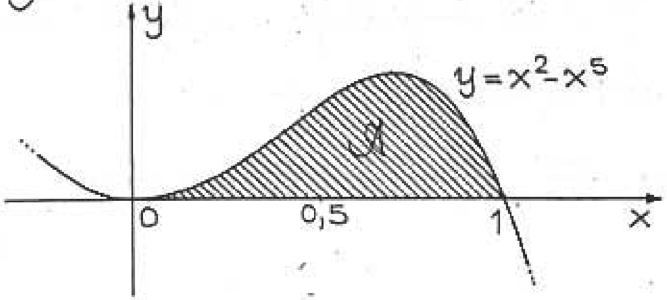
Anm. Man skriver ofta $f(t)\supset\mathcal{F}(s)$, för transformparet; elektoteknikerna skriver

$f(t)\longleftrightarrow\mathcal{F}(s)$.

7. Tillämpningar av integraler

Testövning 7.1 (Sid. 320)

Lösning

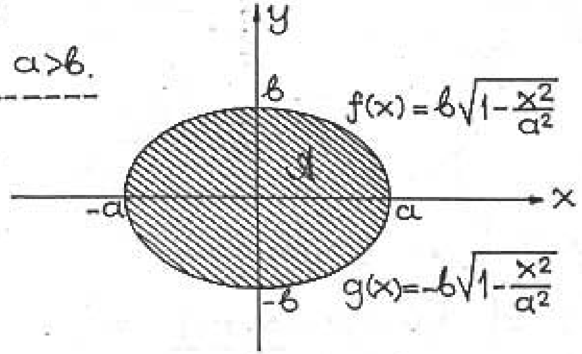


$$\mathscr{A}=\int_0^1(x^2-x^5)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2-1}{6}=\underline{\frac{1}{6}\text{ ae}}.$$

Testövning 7.2 (Sid. 321)

Lösning

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b.$



$$\mathscr{A}=\int_{-a}^{a}(f(x)-g(x))\,dx=\int_{-a}^{a}2f(x)\,dx=4\int_0^a f(x)\,dx=$$

$$=4b\int_0^a\sqrt{1-x^2/a^2}\,dx=\left[\begin{matrix}x=at\\dx=adt\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}x=a\Rightarrow t=1\\x=0\Rightarrow t=0\end{matrix}\right]=$$

$$=4ab\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt\overset{1}{=}2ab\left[t\sqrt{1-t^2}+\text{arcsi}\right.$$

Exempel 5.40 och Övning 6.13 ko

Testövning 7.3 (Sid. 321)

Lösning

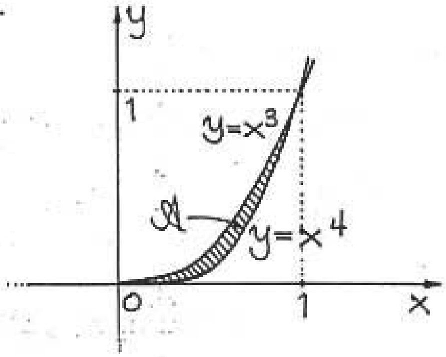
$$\mathscr{A}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\,d\varphi=(\text{Ex. } 5.34)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}($$

$$+\frac{1}{2}\cos2\varphi+\frac{3}{8})\,d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot2\pi=\underline{\frac{3\pi}{8}\text{ ae}}.$$

Anm. $\int_0^{2\pi}\cos2\varphi\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\cos4\varphi\,d\varphi=0.$

Övning 7.4 (Sid. 321)

Lösning



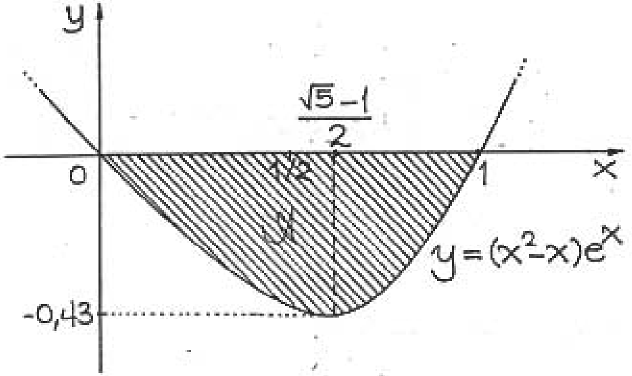
$$\mathscr{A}=\int_0^1(x^3-x^4)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=$$

Övning 7.5 (Sid. 321)

$f(x)=(x^2-x)e^x\Rightarrow f'(x)=(x^2-x+2x-1)e^x$

$$f(x)=0 \Rightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \vee \underline{x=1};$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0,62 \Rightarrow \underline{f(0,62)=-0,43}.$$



$$\mathcal{A}=\int_0^1(0-(x^2-x)e^x)\,dx=\int_0^1(x-x^2)e^x\,dx=\left[(x-x^2)e^x\right]_0^1-$$

$$-\int_0^1(1-2x)e^x\,dx=\left[(2x-1)e^x\right]_0^1-2\int_0^1 e^x\,dx=e+1-$$

$$-\left[2e^x\right]_0^1=e+1-2e+2=\underline{3-e\ \text{ae.}}$$

Övning 7.6 (Sid. 321)

Lösning

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi^2)^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^4\,d\varphi=\int_0^{\pi}\varphi^4\,d\varphi=\underline{\frac{\pi^5}{5}\ \text{ae.}}$$

Övning 7.7 (Sid. 321)

Lösning

$$\ln x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{e}=e^{1/2};\quad (1<\sqrt{e}<e).$$

$$\mathcal{A}=\int_1^e|\cos(\pi\ln x)|\,dx=\left(\int_1^{\sqrt{e}}+\int_{\sqrt{e}}^{e}\right)|\cos(\pi\ln x)|\,dx=$$

$$=\int^{\sqrt{e}}\cos(\pi\ln x)\,dx-\int_{\sqrt{e}}^{e}\cos(\pi\ln x)\,dx=I_1-I_2;$$

(1) $\int\cos(\pi\ln x)\,dx=\begin{bmatrix}x=e^t\\ dx=e^t dt\end{bmatrix}=\int\cos\pi t\cdot e^t\,dt=$

$$=\int e^t\cos\pi t\,dt=e^t\cos\pi t+\pi\int e^t\sin\pi t\,dt=$$

$$=e^t\cos\pi t+\pi e^t\sin\pi t-\pi^2\int e^t\cos\pi t\,dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(1+\pi^2)\int e^t\cos\pi t\,dt=e^t(\cos\pi t+\pi\sin\pi t)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int e^t\cos\pi t\,dt=\underline{\frac{1}{1+\pi^2}e^t(\cos\pi t+\pi\sin\pi t)};$$

(2) $\int_1^e\cos(\pi\ln t)\,dt=\int_0^{1/2}e^t\cos\pi t\,dt-\int_{1/2}^{1}e^t\cos\pi t\,dt=$

$$=\frac{1}{\pi^2+1}\left[e^t(\cos\pi t+\pi\sin\pi t)\right]_0^{1/2}-\frac{1}{1+\pi^2}\left[e^t(\cos\pi t+\pi\sin\pi t)\right]_{1/2}^{1}$$

$$=\frac{1}{\pi^2+1}(\pi e^{1/2}-1)-\frac{1}{\pi^2+1}(-e-\pi e^{1/2})=\frac{1}{1+\pi^2}(\pi e^{1/2}-1+e+$$

$$+\pi e^{1/2})=\underline{\frac{1}{1+\pi^2}(2\pi\sqrt{e}+e-1)}.$$

Testövning 7.8 (Sid. 325)

Lösning

a) $\begin{cases}x=e^{-t}\cos t\\ y=e^{-t}\sin t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-e^{-t}(\cos t+\sin t)\\ \frac{dy}{dt}=e^{-t}(\cos t-\sin t)\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=$

$$=e^{-2t}\cdot 2\Rightarrow ds=\sqrt{2}e^{-t}\,dt\Rightarrow s=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}e^{-t}\,dt=\underline{\sqrt{2}(1-e^{-2\pi})}$$

b) $y=\ln(\cos x)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\tan x\Rightarrow 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow$

$$\Rightarrow ds=\frac{dx}{\cos x}\Rightarrow s=\int_0^{\pi/6}\frac{dx}{\cos x}=\left[\ln\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi/6}=$$

$$=\ln\cot\frac{\pi}{6}-\ln\cot\frac{\pi}{4}=\ln\sqrt{3}-\ln 1=\underline{\frac{1}{2}\ln 3\ le}.$$

Anm. $\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\Rightarrow\int\frac{dx}{\cos x}=-\int\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=$

$$=-\ln\left|\tan\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|=-\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|=$$

$$=\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|^{-1}=\ln\left|\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|.$$

Testövning 7.9 (Sid. 325)

Lösning

$$r(\varphi)=\varphi^2\Rightarrow\frac{dr}{d\varphi}=2\varphi\Rightarrow r^2(\phi)+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\varphi^4+4\varphi^2=$$

$$=\varphi^2(\varphi^2+4)\Rightarrow ds=|\varphi|\sqrt{\varphi^2+4}\,d\varphi\Rightarrow s=\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi|\sqrt{\varphi^2+4}\,d\varphi=$$

$$=2\int_0^{\pi}\varphi\sqrt{\varphi^2+4}\,d\varphi=\left[\begin{array}{l|l}t=\varphi^2+4 & \varphi=\pi\Rightarrow t=\pi^2+4\\ dt=2\varphi d\varphi & \varphi=0\Rightarrow t=4\end{array}\right]=$$

$$=\int_4^{\pi^2+4}\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{2}{3}\varphi^{3/2}\right]_4^{\pi^2+4}=\underline{\frac{2}{3}\left((\pi^2+4)^{3/2}-8\right)\ le}.$$

Övning 7.10 (Sid. 325)

Lösning

a) $\underline{f(x)=\ln(1-x^2),\ 0\le x\le 1/2.}$

$$f'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}\Rightarrow 1+f'(x)^2=1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}=\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2\Rightarrow ds=$$

$$=\frac{1+x^2}{1-x^2}dx=\left(-1+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx\Rightarrow s=\left[-x+\ln\frac{1+x}{1-x}\right]_0^{1/2}=$$

$$=-\frac{1}{2}+\ln\frac{3/2}{1/2}=\underline{\ln 3-\frac{1}{2}\ le}.$$

b) $\begin{cases}x=1+t+\frac{1}{t}\\ y=3-2\ln t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t^2}\\ \frac{dy}{dt}=-\frac{2}{t}\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=1-\frac{2}{t^2}+$

$$+\frac{1}{t^4}+\frac{4}{t^2}=\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2\Rightarrow ds=\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt\Rightarrow s=\int_1^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=$$

$$=\left[t-\frac{1}{t}\right]_1^2=2-\frac{1}{2}=\underline{\frac{3}{2}\ le}.$$

Övning 7.11 (Sid. 325)

Lösning

$$r=\sin^2\varphi\Rightarrow\frac{dr}{d\varphi}=2\sin\varphi\cos\varphi\Rightarrow\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2=4\sin^2\varphi\cos^2\varphi+$$

$$+\sin^4\varphi=\sin^2\varphi(\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi)=\sin^2\varphi(1+3\cos^2\varphi)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s=\int_0^{2\pi}|\sin\varphi|\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\pi}\sin\varphi\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\,d\varphi-$$

$$-\int_{\pi}^{2\pi}\sin\varphi\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\,d\varphi=I_1-I_2;$$

Anm $0\le\varphi\le 2\pi\Rightarrow|\sin\varphi|=\begin{cases}\sin\varphi, & 0\le\varphi\le\pi\\ -\sin\varphi, & \pi<\varphi\le 2\pi\end{cases}$ (se fig.)

$$I_1=\int_0^{\pi}\sin\varphi\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\,d\varphi=\left[\begin{array}{l|l}t=\sqrt{3}\cos\varphi & \pi\to-\sqrt{3}\\ dt=-\sqrt{3}\sin\varphi\,d\varphi & 0\to\sqrt{3}\end{array}\right]=$$

$$=\int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}}\sqrt{1+t^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+t^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[t\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})\right);$$

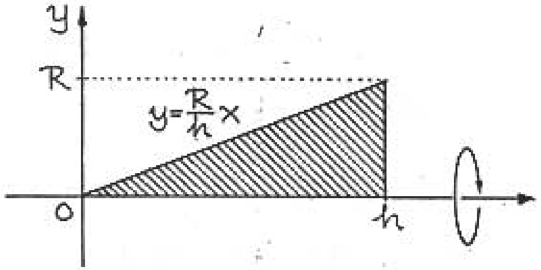
$$I_2=\int_{\pi}^{2\pi}\sin\varphi\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\,d\varphi=\left[\begin{array}{c|c} t=\sqrt{3}\cos\varphi & 2\pi\longrightarrow\sqrt{3} \\ dt=-\sqrt{3}\sin\varphi & \pi\longrightarrow-\sqrt{3}\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+t^2}\,dt=-\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+t^2}\,dt=-I_1.$$

Resultat: $s=\frac{2}{\sqrt{3}}(2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3}))$ le.

Testövning 7.12 (Sid. 329)

Lösning



$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{R}{h}x\right)^2dx=\pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\pi\frac{R^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\underline{\frac{\pi}{3}R^2h.}$$

Testövning 7.13 (Sid. 329)

Lösning

Rörformeln $\Rightarrow$ $V(\omega)=\int_1^{\omega}2\pi x\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^3}\,dx=$

$$=2\pi\int_1^{\omega}\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx=2\pi\left[-\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]_1^{\omega}+2\pi\int_1^{\omega}\frac{1}{x(x+1)}dx=$$

$$=2\pi\left(\ln 2-\frac{\ln(1+\omega)}{\omega}\right)+2\pi\int_1^{\omega}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=2\pi\Big(\ln 2-$$

$$-\frac{\ln(1+\omega)}{\omega}\Big)+2\pi\left[\ln\frac{x}{x+1}\right]_1^{\omega}=4\pi\ln 2-2\pi\Big(\frac{\ln(1+\omega)}{\omega}+$$

$$+\ln\left(1+\frac{1}{\omega}\right)\Big)\xrightarrow[\omega\to\infty]{}\underline{4\pi\ln 2\text{ ve.}}$$

Övning 7.14 (Sid. 329)

Lösning

$\underline{y=\sin 2x,\ \pi/4\leq x\leq\pi/2}$

a) $$V_x=\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin 2x)^2dx=\frac{\pi}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1-\cos 4x)\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\underline{\frac{\pi^2}{8}}\text{ ve.}$$

b) $$V_y=\int_{\pi/4}^{\pi/2}2\pi x\cdot\sin 2x\,dx=\pi\left[-x\cos 2x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}+\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos 2x\,dx=$$

$$=\pi\cdot\frac{\pi}{2}+\pi\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi}{2}=\underline{\frac{\pi^2-\pi}{2}}\text{ ve.}$$

Övning 7.15 (Sid. 329)

Lösning

$$V(\omega)=\pi\int_1^{\omega}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x}}\right)^2dx=\left[\begin{array}{c|c} x=t^2 & x=\omega\Rightarrow t=\sqrt{\omega} \\ dx=2t\,dt & x=1\Rightarrow t=1\end{array}\right]=$$

$$=\pi\int_1^{\sqrt{\omega}}\left(\frac{1}{t^2+t}\right)^2\cdot 2t\,dt=2\pi\int_1^{\sqrt{\omega}}\frac{dt}{t(t+1)^2}=$$

$$=2\pi\int_1^{\sqrt{\omega}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=2\pi\left[\ln\frac{t}{t+1}+\frac{1}{t+1}\right]_1^{\sqrt{\omega}}=$$

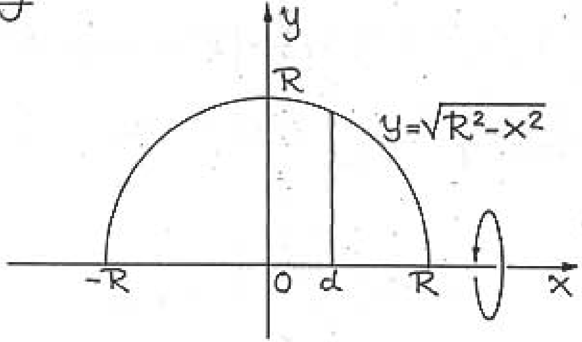
$$=\underline{2\pi\left(\ln\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega}+1}+\frac{1}{\sqrt{\omega}+1}+\ln 2-\frac{1}{2}\right).}$$

$$\lim_{\omega\to\infty}V(\omega)=2\pi\ln 2-\pi+\lim_{\omega\to\infty}2\pi\left(\ln\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega}+1}-\frac{1}{\sqrt{\omega}+1}\right)=$$

$$=\underline{\pi(2\ln 2-1)\text{ ve.}}$$

Övning 7.16 (Sid. 329)

Lösning



När halvcirkelskivan roterar ett varv kring x-axeln erhålles ett klot; den vertikala sträckan i figuren "skär" klotet i två delar. Volymen av kalotten (den mindre delen) är

$$V_1=\pi\int_d^R(\sqrt{R^2-x^2})^2dx=\pi\int_d^R(R^2-x^2)dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_d^R=$$
$$=\pi\left(R^3-\frac{1}{3}R^3-R^2d+\frac{1}{3}d^3\right)=\pi\left(\frac{2}{3}R^3-R^2d+\frac{1}{3}d^3\right) \text{ v.e.}$$

Hela klotet har volymen $\frac{4}{3}\pi R^3$ (fås för $d=-R$), så den större delen har volymen $V_2=\frac{4}{3}\pi R^3-V_1=\pi\left(\frac{2}{3}R^3+R^2d-\frac{1}{3}d^3\right)$ volymenheter.

<u>Resultat</u>: $\frac{\pi}{3}(2R^2-3R^2d+d^3)$ resp. $\frac{\pi}{3}(2R^3+3R^2d-d^3)$.

<u>Anm</u>. Med differentialgeometri (som ovan) blir det lättare att bestämma kalottens volym.

Testövning 7.17 (Sid. 334)

Lösning

$$D=\{(x,y):\ 1\le x\le 2,\ 0\le y\le f(x)\}.$$

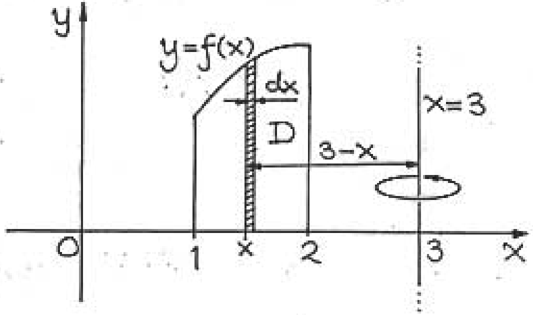
a) <u>Rotation kring x-axeln</u>

Skivformeln $\Rightarrow V_x=\pi\int_1^2 f(x)^2dx.$

b) <u>Rotation kring y-axeln</u>

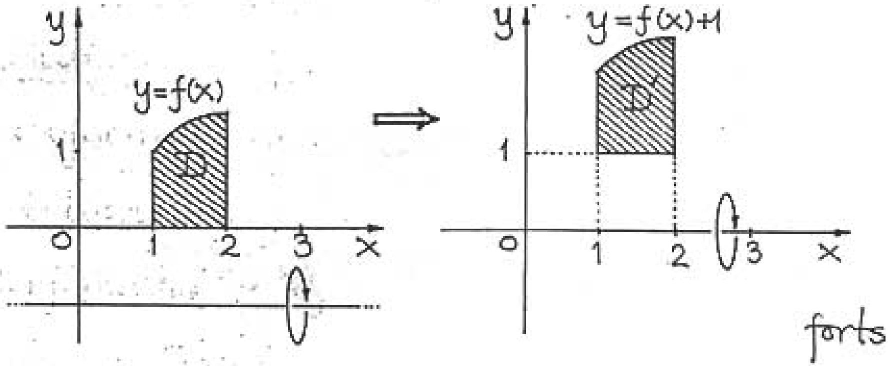
Rörformeln $\Rightarrow V_y=2\pi\int_1^2 xf(x)dx.$

c) <u>Rotation kring linjen x=3</u> (Jfr Ex. 7.11).



Rörformeln $\Rightarrow V_3=2\pi\int_1^2(3-x)f(x)dx.$

d)



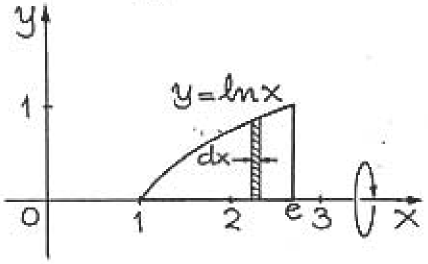
forts

Att rotera D kring linjen $y=-1$ är detsamma som att rotera $D'=\{(x,y): 1\leq x\leq 2,\ 1\leq y\leq f(x)+1\}$ kring x-axeln. Skivformeln ger

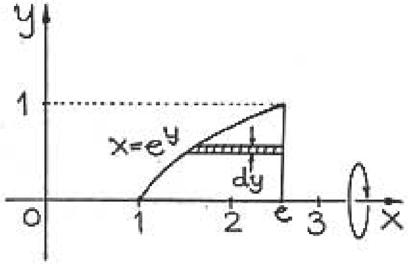
$$V'=\pi\int_1^2(f(x)+1)^2dx-\pi\int_1^2 1^2dx=\pi\int_1^2(f(x)^2-2f(x))dx.$$

Testövning 7.18 (Sid. 334)

Lösning



Figur 1



Figur 2

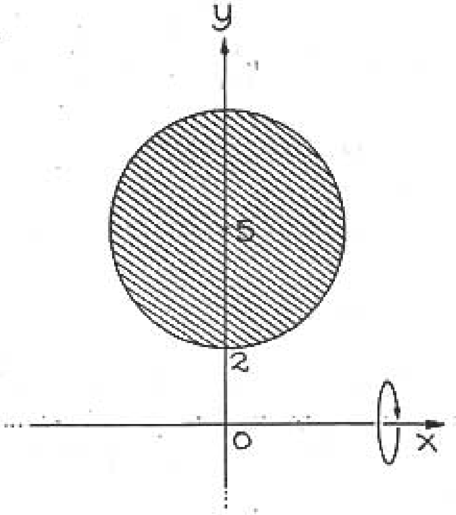
a) $V=\pi\int_1^e(\ln x)^2dx=\pi[x\cdot(\ln x)^2]_1^e-2\pi\int_1^e\ln x\,dx=\pi e-$
$-2\pi[x\ln x-x]_1^e=\pi e-2\pi(1)=\underline{\pi(e-2)\text{ ve}}.$

b) Rörformeln $\Rightarrow V=2\pi\int_0^1 y(e-e^y)dy=2\pi[y(ey-e^y)]_0^1-$
$-2\pi\int_0^1(ey-e^y)dy=-\pi[ey^2-2e^y]_0^1=-\pi(e-2e+2)=$
$=-\pi(-e+2)=\underline{\pi(e-2)\text{ve}}.$

Anm. Skivformeln/rörformeln kan användas även vid rotation kring y-axeln.

Testövning 7.19 (Sid. 334)

Lösning

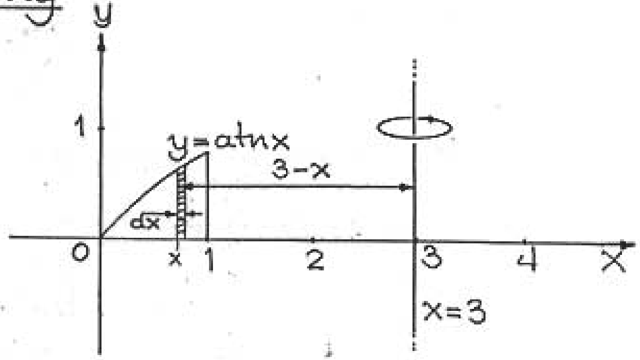


Guldins regel $\Rightarrow V=2\pi\cdot 5\cdot\pi\cdot 3^2=\underline{90\pi^2\text{ ve}}.$

För Guldins andra regel se sid 336-337 i boken.

Övning 7.20 (Sid. 334)

Lösning



Rörformeln $\Rightarrow V=2\pi\int_0^1(3-x)\arctan x\,dx=$

$$=\pi\left[-(3-x)^2\arctan x\right]_0^1+\pi\int_0^1\frac{x^2-6x+9}{x^2+1}dx=\pi(-4\,\mathrm{atn}1)+$$

$$+\pi\int_0^1\left(1-\frac{6x}{x^2+1}+\frac{8}{x^2+1}\right)dx=-\pi^2+\pi\left[x-3\ln(x^2+1)+8\,\mathrm{atn}x\right]_0^1=$$

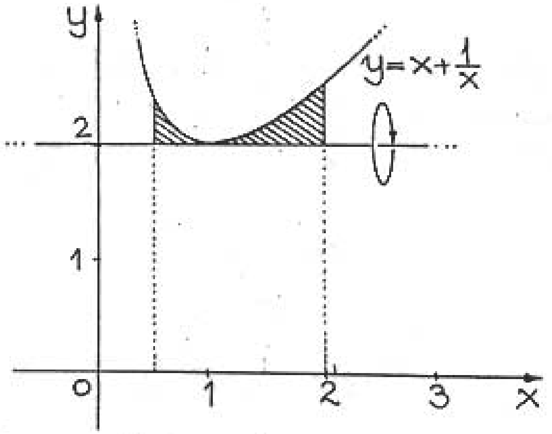
$$=-\pi^2+\pi(1-3\ln2+8\,\mathrm{atn}1)=-\pi^2+\pi-3\pi\ln2+2\pi^2=$$

$$=\underline{\pi^2+\pi-3\pi\ln 2}.$$

Övning 7.21 (Sid. 334)

Lösning

$\underline{y=f(x)=x+1/x,\ 1/2\leq x\leq 2.}$



$$dV=\pi(f(x)-2)^2dx=\pi(f(x)^2-4f(x)+4)dx=$$

$$=\pi\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2-4x-\frac{4}{x}+4\right)dx=$$

$$=\pi\left(x^2-4x+6+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}\right)dx;$$

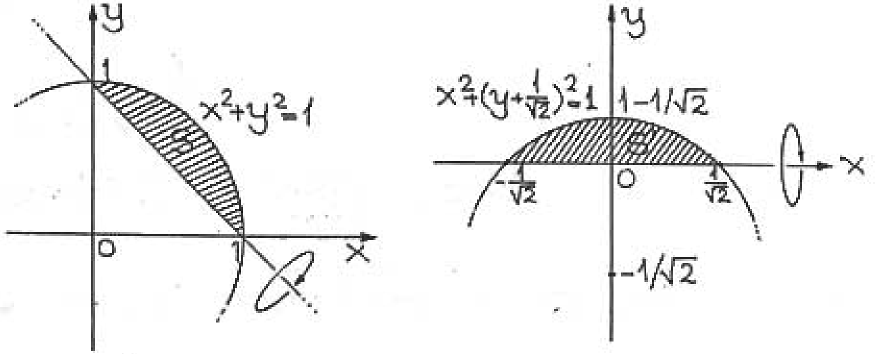
$$V=\pi\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+6x-\frac{1}{x}-4\ln x\right]_{1/2}^{2}=\pi\left(\frac{8}{3}-8+12-\frac{1}{2}-\right.$$

$$\left.-4\ln2-\frac{1}{24}+\frac{1}{2}-3+2-4\ln2\right)=\underline{\pi\left(\frac{45}{8}-8\ln2\right)\text{ve}}.$$

Övning 7.22 (Sid. 334)

Lösning

Att rotera S kring linjen $x+y=1$ är detsamma som att rotera S′ kring x-axeln (se figur).



$$\left.\begin{array}{l}S=\{(x,y):0\leq x\leq 1,\ y\geq\sqrt{1-x^2}\}\\ S'=\{(x,y):0\leq y\leq\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{\sqrt2}\}\end{array}\right\}\Rightarrow\mu(S)=\mu(S').$$

$$dV=\pi\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{\sqrt2}\right)^2dx=\pi\left(\frac{3}{2}-x^2-\sqrt2\sqrt{1-x^2}\right)dx;$$

$$V=2\cdot\pi\cdot\int_0^{\sqrt2}(3/2-x^2-\sqrt2\sqrt{1-x^2})dx=$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt2}(3-2x^2-2\sqrt2\sqrt{1-x^2})dx=$$

$$=\pi\left[3x-\frac{2}{3}x^3-\sqrt2x\sqrt{1-x}-\arcsin x)\right]_0^{\sqrt2}=$$

$$=\pi(3/\sqrt2-1/3\sqrt2-1/\sqrt2-\sqrt2\arcsin(1/\sqrt2))=$$

$$=\pi\left(\frac{5}{3\sqrt2}-\sqrt2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\pi\left(\frac{5\sqrt2}{6}-\frac{\pi\sqrt2}{4}\right)=\underline{\sqrt2\pi\left(\frac{5}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\text{ve}}.$$

Anm. $\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C$

Övning 7.23 (Sid. 334)

Lösning

a) Rotation kring x-axeln: $V_x = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi \, d\varphi$.

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4} e^{\varphi}\sin\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{3}\left[e^{\varphi}(\sin\varphi - \cos\varphi)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{3} \text{ ve.}$$

b) Rotation kring y-axeln: $V_y = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \cos\varphi \, d\varphi$.

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4} e^{\varphi}\cos\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{3}\left[e^{\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{3}(\sqrt{2}e^{\pi/4} - 1)$$

Anm. Rotation kring axeln $\varphi = \varphi_0$ ger

$$V_0 = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin(\varphi_0 - \varphi) \, d\varphi.$$

Testövning 7.24 (Sid. 338)

Lösning

a) Rotation kring x-axeln: $S = 2\pi\int_1^2 |y| \, ds$.

b) Rotation kring y-axeln: $S_y = 2\pi\int_1^2 |x| \, ds$.

c) Rotation kring x=1/2: $S = 2\pi\int_1^2 |x - \frac{1}{2}| \, ds$.

d) Rotation kring y=-1: $S = 2\pi\int_1^2 |y+1| \, ds$.

Bågelementet ges av $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$; $y = f(x)$.

Beloppstecknet kan slopas i detta fall; beloppstecknet används när bågen skär rotationsaxeln.

Testövning 7.25 (Sid. 338)

Lösning

$y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$.

$$y' = 3x^2 \Rightarrow ds = \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,dx \Rightarrow d\sigma = 2\pi y \, ds =$$

$$= 2\pi x^3 \cdot \sqrt{1 + 9x^4}\,dx \Rightarrow S = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1 + 9x^4}\, x^3 \, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} t = 1 + 9x^4 & x = 1 \Rightarrow t = 10 \\ dt = 36x^3 dx & x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{array}\right] = 2\pi \cdot \frac{1}{36}\int_1^{10} \sqrt{t}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{18}\left[\frac{2}{3} t\sqrt{t}\right]_1^{10} = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1) \text{ ae.}$$

Övning 7.26 (Sid. 338)

Lösning

$y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$.

$$y = 2\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y'^2 + 1 = \frac{x+1}{x} \Rightarrow ds = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\sigma = 2\pi x \, ds = 2\pi\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}\, dx = 2\pi\sqrt{x^2 + x}\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x^2 + x}\, dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{(2x+1)^2 - 1} \cdot \frac{1}{2} dx =$$

$$= \pi\int_0^1 \sqrt{(2x+1)^2 - 1}\, dx = [t = 2x+1] = \pi\int_1^3 \sqrt{t^2 - 1} \cdot \frac{1}{2} dt =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[x\sqrt{x^2-1} - \ln(x-\sqrt{x^2-1})\right]_1^3 = \underline{\frac{\pi}{4}(3\sqrt{8} - \ln(3-\sqrt{8}))}.$$

Bra att memorera:

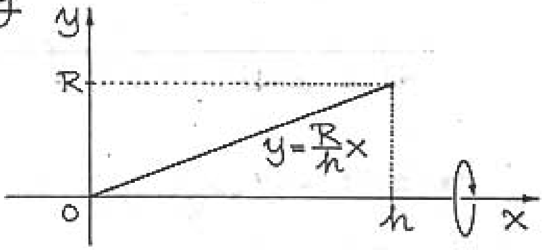
$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1})) + C;$$

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \ln|x-\sqrt{x^2-1}|) + C;$$

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C.$$

Övning 7.27 (Sid. 338)

Lösning



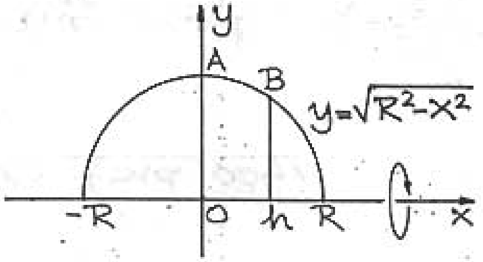
$$d\sigma = 2\pi y\,ds = 2\pi y\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\frac{R}{h}\cdot x\sqrt{1+R^2/h^2}\,dx$$

$$= \pi\frac{R}{h^2}\sqrt{h^2+R^2}\cdot 2x\,dx \Rightarrow S = \frac{\pi R}{h^2}\sqrt{h^2+R^2}\int_0^h 2x\,dx =$$

$$= \pi\frac{R}{h^2}\cdot\sqrt{R^2+h^2}\cdot h^2 = \underline{\pi R\sqrt{h^2+R^2}}.$$

Övning 7.28 (Sid. 338)

Lösning



När bågen $\overset{\frown}{AB}$ roterar ett varv kring x-axeln alstras en s.k. sfärisk zon.

$$y=\sqrt{R^2-x^2} \Rightarrow y^2 = R^2-x^2 \Rightarrow 2yy' = -2x \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow 1+y'^2 = 1+\frac{x^2}{y^2} = \frac{R^2}{y^2} \Rightarrow ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{R}{y}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\sigma = 2\pi y\,ds = 2\pi R\,dx \Rightarrow S = \int_0^h 2\pi R\,dx = \underline{2\pi Rh}.$$

Övning 7.29 (Sid. 338)

Lösning

$\underline{r = 2R\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi/2}$

$$ds = \sqrt{r^2+\dot{r}^2}\,d\varphi = 2R\,d\varphi \Rightarrow d\sigma = 2\pi y\cdot ds =$$

$$= 2\pi\cdot r\sin\varphi\cdot 2R\,d\varphi = 2\pi\cdot 2R\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot 2R\,d\varphi =$$

$$= 8\pi R^2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = 4\pi R^2\sin 2\varphi\,d\varphi \Rightarrow S =$$

$$= 4\pi R^2\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,d\varphi = 2\pi R^2\left[-\cos 2\varphi\right]_0^{\pi/2} = \underline{4\pi R^2}.$$

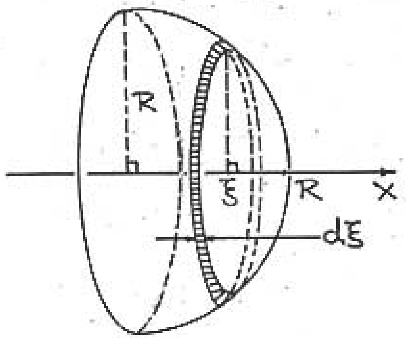
Anm. Kurvan (eg. kurvbågen) ovan är halvcirkeln $y=\sqrt{2Rx-x^2}$, $0\le x\le 2R$ (Rita?).

Övning 7.30 (Sid. 339)

Lösning

Jag lägger symmetriaxeln horisontellt!

Volymelementet är skivformigt med $r=\sqrt{R^2-\xi^2}$.



$$\bar{x}\cdot\frac{2}{3}\pi R^3=\int_0^R \xi\cdot\pi(\sqrt{R^2-\xi^2})^2 d\xi=\pi\int_0^R(R^2\xi-\xi^3)d\xi=$$

$$=\pi\left[R^2\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^4}{4}\right]_0^R=\pi\frac{R^4}{4}\Leftrightarrow\bar{x}=\frac{\pi R^4}{4}\Big/\frac{2\pi R^3}{3}=\frac{3}{8}R.$$

Tyngdpunkten ligger på symmetriaxeln (rotationsaxeln) och på avståndet $\frac{3}{8}R$ från den plana ytan (sidan).

Testövning 7.31 (Sid. 345)

Lösning

$F=k(x-0{,}10)\Rightarrow 7=k(0{,}14-0{,}10)\Leftrightarrow k=175\,\mathrm{N/m}$.

$$\Delta F=k\int_{0,14}^{0,17}(x-0{,}10)dx=k\left[\tfrac{1}{2}(x-0{,}10)^2\right]_{0,14}^{0,17}=$$

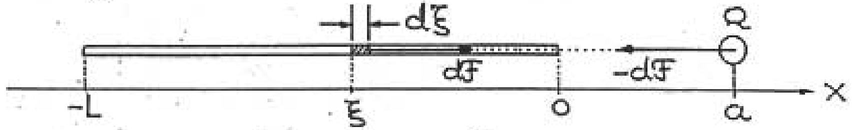
$$=k\cdot\tfrac{1}{2}(0{,}07^2-0{,}04^2)=\underline{0{,}28875\,\mathrm{J}}.$$

Svar: Cirka 0,29 J.

I fysiken avrundar man. Exakt finns inte.

Testövning 7.32 (Sid. 346)

Lösning

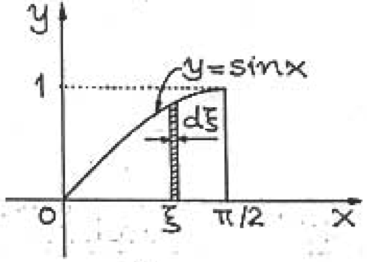


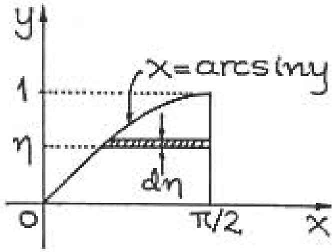
$$dF=k\frac{Q\cdot q}{(a-\xi)^2}d\xi\Rightarrow F=kqQ\int_{-L}^{0}\frac{d\xi}{(a-\xi)^2}=kqQ\left[+\frac{1}{a-\xi}\right]_{-L}^{0}=$$

$$=kqQ\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+L}\right)=\underline{\frac{kqQL}{a(a+L)}}.$$

Övning 7.33 (Sid. 346)

Lösning





(1) $\mathcal{A}=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{\pi/2}=1.$

(2) $\bar{x}\cdot 1=\int_0^{\pi/2}\xi\sin\xi\,d\xi=[-\xi\cos\xi]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos\xi\,d\xi=1.$

(3) $\bar{y}\cdot 1=\int_0^1\eta\cdot(\frac{\pi}{2}-\arcsin\eta)d\eta=\int_0^1\eta\cdot\arccos\eta\,d\eta=$

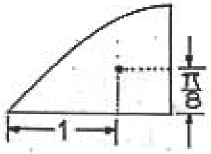
$$=\left[\begin{array}{l|l}\eta=\cos t & \eta=1\Rightarrow t=0\\ d\eta=-\sin t\,dt & \eta=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right]=\int_{\pi/2}^{0}\cos t\cdot t(-\sin t)dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}t\sin t\cos t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}t\sin 2t\,dt=\left[\begin{array}{l|l}u=2t & \frac{\pi}{2}\to\pi\\ du=2dt & 0\to 0\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{u}{2}\sin u\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{8}\int_0^\pi u\sin u\,du=\frac{1}{8}\Big[-u\cos u\Big]_0^\pi+$$

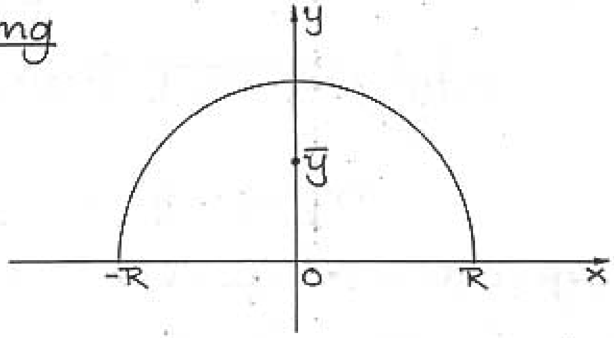
$$+\frac{1}{8}\int_0^\pi \cos u\,du=\frac{\pi}{8}+0=\frac{\pi}{8}.$$

Svar: Se figur här bredvid.



Övning 7.34 (Sid. 346)

Lösning



När halvcirkelbågen roterar ett varv kring sin diameter på x-axeln genererar den en area lika med klotets area. Direkt insättning i Pappus' första regel ger halvcirkelbågens masscentrum:

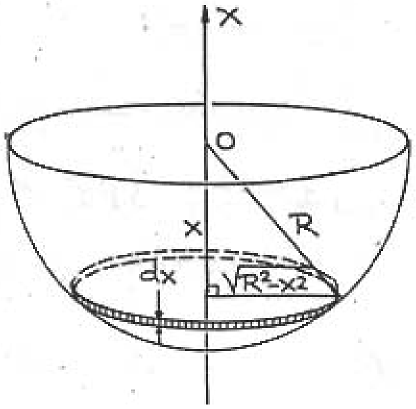
$$4\pi R^2=2\pi\bar{y}\cdot\pi R\Leftrightarrow \underline{\bar{y}=2R/\pi}.$$

Anm. $ds=Rd\theta\Rightarrow \pi R\cdot\bar{y}=\int_0^\pi R\sin\theta\cdot Rd\theta=2R^2$ $\Leftrightarrow \bar{y}=2R/\pi$ och $\pi R\bar{x}=\int_0^\pi R\cos\theta Rd\theta=0\Leftrightarrow \bar{x}=0$.

Homogen tråd $\Rightarrow \rho=\rho_0$ förkortas bort.

Övning 7.35 (Sid. 346)

Lösning



$$dm=\rho_0 dV=\rho_0\cdot\pi(\sqrt{R^2-x^2})^2dx=\pi\rho_0(R^2-x^2)dx\ ;$$

$$dA=\pi\rho_0(R^2-x^2)\cdot g\cdot x\,dx=\pi\rho_0 g(R^2x-x^3)dx\ ;$$

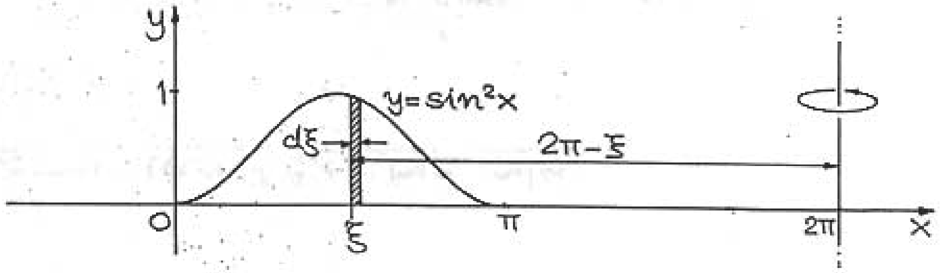
$$A=\pi\rho_0 g\int_0^R(R^2x-x^3)dx=\pi\rho_0 g\Big[\tfrac{1}{2}Rx^2-\tfrac{1}{4}x^4\Big]_0^R=$$

$$=\pi\rho_0 g\cdot\frac{1}{4}R^4=\underline{\frac{\pi\rho_0 gR^4}{4}}.$$

Övning 7.36 (Sid. 351)

Lösning

$$\underline{D=\{(x,y):\ 0\le y\le\sin^2x,\ 0\le x\le\pi\}}.$$



$$V=2\pi\int_0^{\pi}(2\pi-\xi)\sin^2\xi d\xi=\pi\int_0^{\pi}(2\pi-\xi)(1-\sin 2\xi)d\xi=$$

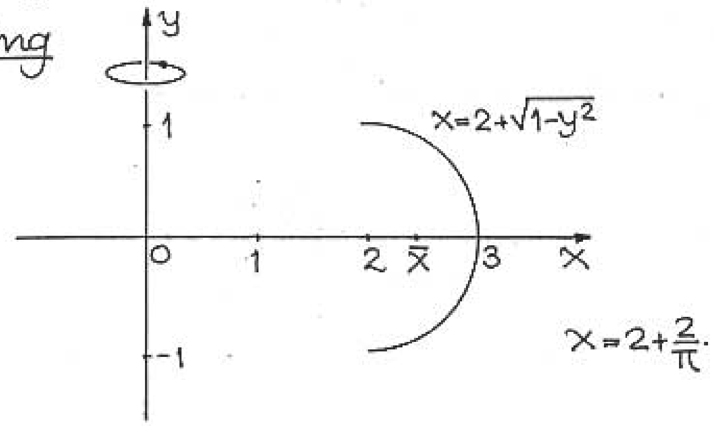
$$=2\pi^2\int_0^{\pi}(1-\sin 2\xi)dx-\pi\int_0^{\pi}\xi(1-\sin 2\xi)d\xi=$$

$$=2\pi^2\cdot\pi-\pi\left[\xi(\xi+\tfrac{1}{2}\cos 2\xi)\right]_0^{\pi}+\pi\int_0^{\pi}(\xi+\tfrac{1}{2}\cos 2\xi)d\xi=$$

$$=2\pi^3-\pi^3+\pi\left[\tfrac{1}{2}\xi^2+\tfrac{1}{4}\sin 2\xi\right]_0^{\pi}=\pi^3+\tfrac{1}{2}\pi^3=\underline{\tfrac{3}{2}\pi^3\,\text{ve}}.$$

Övning 7.37 (Sid. 351)

Lösning



$x=2+\frac{2}{\pi}$.

Övning 7.34 konsulteras.

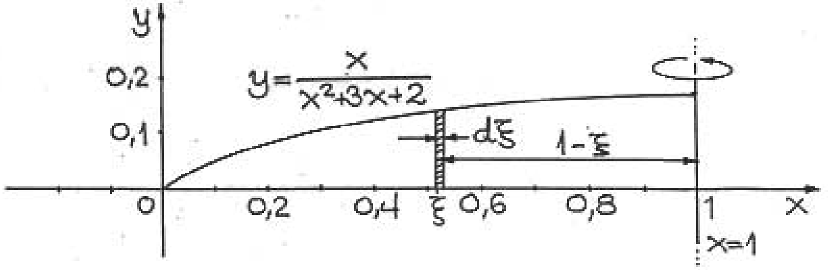
Guldins' första regel ger $S=2\pi\bar{x}\cdot\pi=2\pi^2(2+\frac{2}{\pi})$.

Svar: Den sökta arean är $4\pi(\pi+1)$ae.

Övning 7.38 (Sid. 351)

Lösning

$D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x/(x^2+3x+2)\}$;



$$V=2\pi\int_0^1(1-\xi)\frac{\xi}{\xi^2+3\xi+2}d\xi=2\pi\int_0^1\frac{\xi-\xi^2}{\xi^2+3\xi+2}d\xi=$$

$$=2\pi\int_0^1\left(\frac{4\xi+2}{\xi^2+3\xi+2}-1\right)d\xi=2\pi\int_0^1\left(\frac{6}{\xi+2}-\frac{2}{\xi+1}-1\right)d\xi=$$

$$=2\pi\left[\ln(\xi+2)^6-\ln(\xi+1)^2-\xi\right]_0^1=2\pi\left(\ln\left(\tfrac{3}{2}\right)^6-\ln 2^2-1\right)=$$

$$=2\pi(6\ln 3-6\ln 2-2\ln 2-1)=\underline{2\pi(6\ln 3-8\ln 2-1)\,\text{ve}}.$$

Övning 7.39 (Sid. 351)

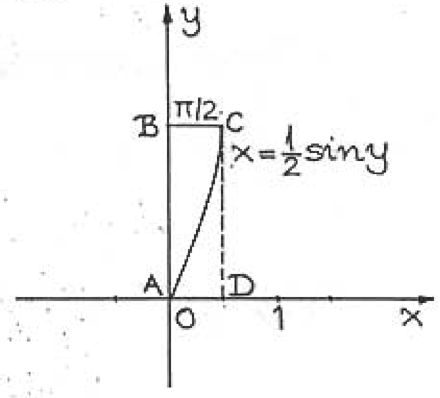
Lösning

a) $$\int_0^{1/2}\arcsin 2x\,dx=\left[\begin{array}{c|c}t=2x & x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=1\\ dt=2dx & x=0\Rightarrow t=0\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int_0^1 \text{asnt}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[t\cdot\arcsin t\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{2}\arcsin 1+\frac{1}{2}\left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}=\underline{\frac{\pi-2}{4}}.$$

b)



(1) Rektangeln ABCD har arean $\frac{\pi}{4}$ ae.

(2) "Kilen" ABC har arean $\mathcal{A}_1$, given av

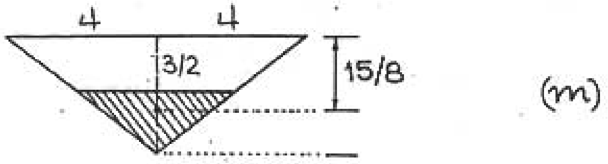
$\mathcal{A}_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin y\,dy = \frac{1}{2}$ ae.

(3) "Kilen" ACD har arean $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ areaenheter.

Svar: Den sökta integralen är $\frac{\pi-2}{4}$.

Övning 7.40 (Sid. 351)

Lösning



Vattenkroppens volym är $\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot \frac{3}{2} = 2\pi$ m^3. Dess tyngdpunkt ligger $\frac{15}{8}$ meter under brädden; en kons tyngdpunkt (masspunkt) ligger på avståndet $\frac{h}{4}$ från dess bas. Att lyfta 2π m^3 $\frac{15}{8}$m upp krävs det arbetet

$A = mg \cdot H = \rho \cdot Vg \cdot H = \rho \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot g \cdot \frac{15}{8} = \underline{\underline{\frac{15}{4}\pi\rho g \text{ J}}}$.

Man kan använda integration för detta men i fysiken tar man genvägar.

Övning 7.41 (Sid. 351)

Lösning

$$V(t) = \int_t^{2t} (x-t)\cdot 2\pi \cdot \left(4x + \frac{5}{x^3}\right)dx = 2\pi \int_t^{2t} \left(4x^2 - 4xt + \frac{5}{x^2} - \frac{5t}{x^3}\right)dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2t - \frac{5}{x} + \frac{5t}{2x^2}\right]_t^{2t} = 2\pi\left(\frac{10}{3}t^3 + \frac{5}{8t}\right);$$

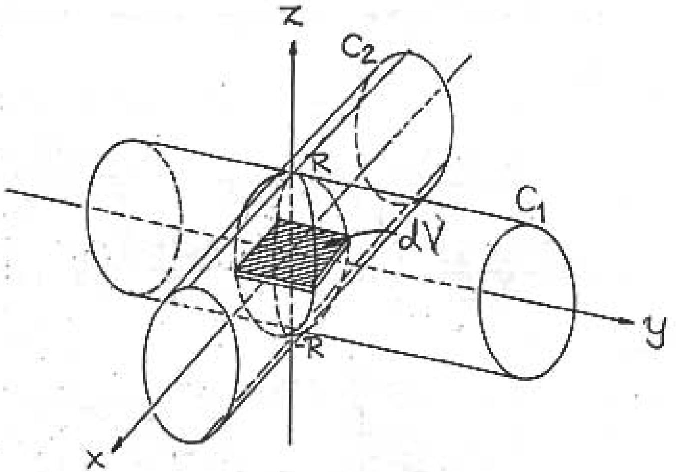
$V'(t) = 2\pi\left(10t^2 - \frac{5}{8t^2}\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$; (*)

$V''(t) = 2\pi\left(20t + \frac{5}{4t^3}\right) \Rightarrow V''\left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi\cdot(10+10) = 40\pi > 0 \overset{(*)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow t = 1/2$ ger minimal volym.

Övning 7.42 (Sid. 352)

Lösning



Cylindrarnas ekvationer är

$C_1: x^2 + z^2 = R^2$ resp. $C_2: y^2 + z^2 = R^2$.

Snittytan tas parallellt med xy-planet, dvs $dS = 2x \cdot 2y = 4xy = 4(R^2 - z^2)$; volymelementet är $dV = 4(R^2 - z^2)dz$, så integrationen ger $V = \int_{-R}^{R} 4(R^2 - z^2)dz = 4[R^2 z - \frac{1}{3}z^3] = 8 \cdot \frac{2}{3}R^3 = \underline{\frac{16}{3}R^3 \text{ ve}}.$

Övning 7.43 (Sid. 352)

Lösning

$$\begin{cases} x = R(\varphi - \sin\varphi) \\ y = R(1 - \cos\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = R(1 - \cos\varphi) \\ \frac{dy}{d\varphi} = R\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 =$$

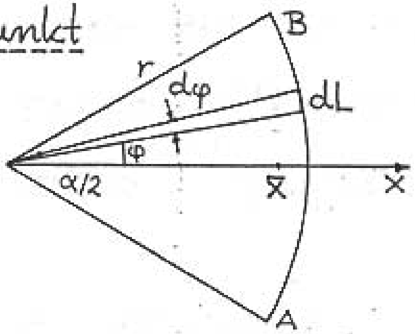
$$= R^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = R^2(2 - 2\cos\varphi) = 4R^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow ds = 2R\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi \Rightarrow s = \int_0^{2\pi} 2R\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = \underline{8R \text{ le}}.$$

Övning 7.44 (Sid. 352)

Lösning

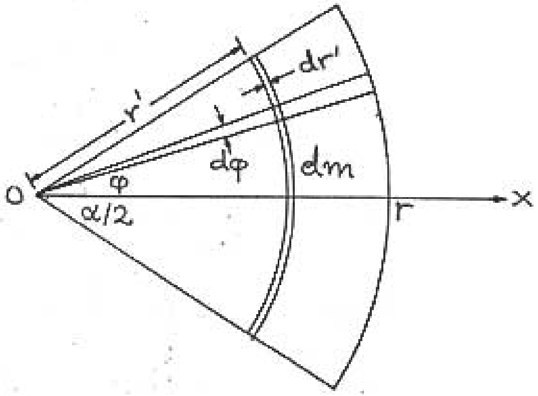
(1) $\overset{\frown}{AB}$:s tyngdpunkt



Av symmetrin följer att tyngdpunkten är belägen på x-axeln. Bågen delas in i element enligt figuren med längden $dL = rd\varphi$ och x-koordinaten $r\cos\varphi$. Bågens längd är $L = r\alpha$. Tyngdpunktens x-koordinat är

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int x dL = \frac{1}{r\alpha}\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} r\cos\varphi \, r d\varphi = \frac{2r}{\alpha}\int_0^{\alpha/2}\cos\varphi d\varphi = \underline{\frac{2r}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

(2) Homogen cirkelsektor



Symmetrin ⇒ $\bar{x}$ ligger på x-axeln.

$$dm = \rho dA = \rho \cdot r'\alpha dr' \Rightarrow \bar{x} = \int \bar{x}' dm / \int dm =$$

$$= \frac{\int (\frac{2r'}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2})\rho r'\alpha dr'}{\int \rho r'\alpha dr'} = \frac{2\rho\sin(\alpha/2)\int_0^r r'^2 dr'}{\rho\alpha\int_0^r r' dr'} =$$

$$= \frac{2\sin(\alpha/2) \cdot r^3/3}{\alpha \cdot r^2/2} = \frac{4r \cdot \sin(\alpha/2)}{3\alpha}.$$

Anm. $\alpha = \pi \Rightarrow \bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$ (Jfr Exempel 7.23).

Övning 7.45 Sid. 352)

Lösning

$$\begin{cases} x = 3R\cos\varphi + R\cos 3\varphi \\ y = 3R\sin\varphi - R\sin 3\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = -3R\sin\varphi - 3R\sin 3\varphi \\ \frac{dy}{d\varphi} = 3R\cos\varphi - 3R\cos 3\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = (3R)^2\left((\sin\varphi + \sin 3\varphi)^2 + (\cos\varphi - \cos 3\varphi)^2\right) =$$

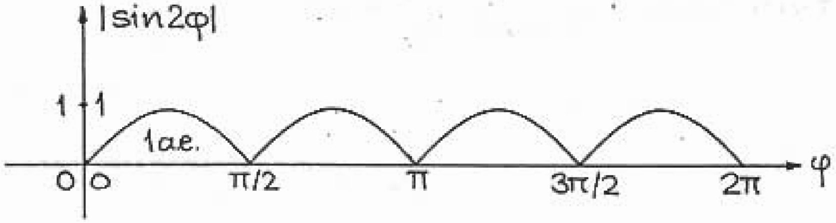
$$= 9R^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2 3\varphi + \cos^2 3\varphi + 2\sin\varphi\sin 3\varphi -$$

$$- 2\cos\varphi\cos 3\varphi) = 9R^2(2 - 2\cos 4\varphi) = (6R)^2(\sin 2\varphi)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ds = \left\{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2\right\}^{1/2} d\varphi = 6R|\sin 2\varphi|\,d\varphi\,;$$

$$s = \int_0^{2\pi} 6R|\sin 2\varphi|\,d\varphi \overset{!}{=} 6R\cdot 4\int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi\,d\varphi = \underline{24R \text{ le.}}$$

Anm. I $\overset{!}{=}$ underförstås följande ... figur!



8. Maclaurin- och Taylorutvecklingar

Testövning 8.1 (Sid. 355)

Lösning

a) $\underline{p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3}$

$p(0) = c_0 = f(0)$.

$p'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 \Rightarrow p'(0) = c_1 = \frac{f'(0)}{1!}$.

$p''(x) = 2c_2 + 6c_3x \Rightarrow p''(0) = 2!c_2 = f''(0) \Leftrightarrow c_2 = \frac{f''(0)}{2!}$.

$p'''(x) = 6c_3 = 3!c_3 \Rightarrow p'''(0) = 3!c_3 = f'''(0) \Leftrightarrow c_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$.

b) $\underline{p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4}$

c_0, c_1, c_2 och c_3 som ovan.

$p^{(4)}(x) = 24c_4 \Rightarrow p^{(4)}(0) = 24c_4 = f^{(4)}(0) \Rightarrow c_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}$.

Testövning 8.2 (Sid. 358)

Lösning

a) $f(x) = \sin x = -f(-x) \Rightarrow$ utvecklingen består av idel udda potenser; $f(x) = f'(0)x + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + O(x^5)$;

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x \Rightarrow f'''(x) = -\cos x$;

$\therefore \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$. (Läs även ledningen).

b) $f(x)=\ln(1+2x) \Rightarrow f(0)=0;$

$$f'(x)=\frac{2}{1+2x}=2(1+2x)^{-1} \Rightarrow f'(0)=2 \Leftrightarrow \frac{f'(0)}{1!}=2;$$

$$f''(x)=-4(1+2x)^{-2} \Rightarrow f''(0)=-4 \Leftrightarrow \frac{f''(0)}{2!}=-2;$$

$$f'''(x)=16(1+2x)^{-3} \Rightarrow f'''(0)=16 \Leftrightarrow \frac{f'''(0)}{3!}=\frac{8}{3};$$

$$f^{(4)}(x)=-96(1+2x)^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(0)=-96 \Leftrightarrow \frac{f^{(4)}(0)}{4!}=-4;$$

$$\therefore \underline{f(x)=2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3-4x^4+O(x^5)}.$$

Övning 8.3 (Sid. 358)

Lösning

a) $f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+O((x-1)^4);$

$$f(1)=1,$$

$$f'(x)=5x^4 \Rightarrow f'(1)=5 \Leftrightarrow \frac{f'(1)}{1!}=5.$$

$$f''(x)=20x^3 \Rightarrow f''(1)=20 \Leftrightarrow \frac{f''(1)}{2!}=10.$$

$$f'''(x)=60x^2 \Rightarrow f'''(1)=60 \Leftrightarrow \frac{f'''(1)}{3!}=10.$$

$$\underline{f(x)=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+O((x-1)^4)}.$$

b) $f(x)=e^{-x} \Rightarrow f(-2)=e^2;$

$$f'(x)=-e^{-x} \Rightarrow f'(-2)=-e^2 \Leftrightarrow \frac{f'(-2)}{1!}=-e^2;$$

$$f''(x)=e^{-x} \Rightarrow f''(-2)=e^2 \Leftrightarrow \frac{f''(-2)}{2!}=\frac{1}{2}e^2;$$

$$f'''(x)=-e^{-x} \Rightarrow f'''(-2)=-e^2 \Rightarrow \frac{f'''(-2)}{3!}=-\frac{1}{6}e^2;$$

$$f(x)=f(-2)+\frac{f'(-2)}{1!}(x+2)+\frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2+\frac{f'''(-2)}{3!}(x+2)^3+O((x+2)^4)$$

$$=e^2-e^2(x+2)+\frac{e^2}{2}(x+2)^2-\frac{e^2}{6}(x+2)^3+O((x+2)^4).$$

Övning 8.4 (Sid. 363)

Lösning

$$f(x)=\cos x=\mathrm{Re}\{e^{ix}\} \Rightarrow \forall n \geq 1:\ f^{(n)}(x)=D^n\mathrm{Re}\{e^{ix}\}=$$

$$=\mathrm{Re}\{De^{ix}\}=\mathrm{Re}\{i^n \cdot e^{ix}\}=\mathrm{Re}\{e^{in\pi/2}\cdot e^{ix}\}=$$

$$=\mathrm{Re}\{e^{i(x+n\pi/2}\}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2}) \Rightarrow f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}=$$

$$=\begin{Bmatrix} \cos k\pi, & n=2k \\ 0 & , n=2k+1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} (-1)^k, & n=2k \\ 0 & , n=2k+1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!}=$$

$$=\frac{(-1)^k}{(2k)!},\ k=0,1,2,\ldots \Rightarrow f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+O(x^{2k+2}).$$

Testövning 8.5 (Sid. 363)

Lösning

$$f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2} \Rightarrow f(0)=1;$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{f'(0)}{1!}=\frac{1}{2};$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \Rightarrow f''(0)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{f''(0)}{2!}=-\frac{1}{8};$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \Rightarrow f'''(0)=\frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{f'''(0)}{3!}=\frac{1}{16};$$

$$\therefore f(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+O(x^4).$$

Övning 8.6 (Sid. 365)

Lösning

a) $f(x)=\tan x=-f(-x)$; f är en udda funktion så serien består av idel udda potenser, dvs

$$f(x)=f'(0)x+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+O(x^5).$$

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2x}=1+\tan^2x \Rightarrow f'(0)=1$;

$f''(x)=2\tan x\cdot(1+\tan^2x)=2(\tan x+\tan^3x)$;

$f'''(x)=2(\tan^2x+1+3\tan^2x(1+\tan^2x))\Rightarrow f'''(0)=2$;

$\therefore f(x)=x+\frac{1}{3}x^3+O(x^5)$, för små $|x|$.

b) $f(x)=\arcsin x$ är även den udda.

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}\Rightarrow f'(0)=1$;

$f'(x)=1-\frac{1}{2}(-x^2)+\frac{3}{8}(-x^2)^2+\cdots=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots$

$f''(x)=x+\frac{3}{4}x^3+\cdots\Rightarrow f'''(x)=1+\frac{9}{4}x^2+\cdots\Rightarrow f'''(0)=1$;

$f(x)=x+\frac{1}{6}x^3+O(x^5)$, för små $|x|$.

Övning 8.7 (Sid. 365)

Lösning

$1+t+t^2+t^3+\dots+t^n=\frac{1-t^{n+1}}{1-t}$ (geometrisk summa)

$t=-x\Rightarrow 1-x+x^2-x+\dots+(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{1+x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\dots+(-1)^nx^n-(-1)^n\frac{x^{n+1}}{1+x}=$

$=1-x+x^2-\dots+(-1)^nx^n+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{x+1}=$

$=1-x+x^2-\dots+(-x)^n+\frac{(-x)^{n+1}}{1+x},\ x\neq-1.$

Testövning 8.8 (Sid. 370)

Lösning

a) $e^x\cos x=(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+O(x^4))(1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4))=$

$=1-\frac{1}{2}x^2+x(1-\frac{1}{2}x^2)+\frac{1}{2}x^2\cdot(1)+\frac{1}{6}x^3\cdot1+O(x^4)=$

$=1-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+O(x^4)=$

$=1+x-\frac{1}{3}x^3+O(x^4).$

b) $(1+u)^{1/2}=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+O(u^4)$;

$u=\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+O(x^5)$;

$\sqrt{1+\arctan x}=1+\frac{1}{2}(x-\frac{1}{3}x^3)-\frac{1}{8}(x)^2+\frac{1}{16}(x)^3+O(x^4)=$

$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+O(x^4)=$

$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{48}x^3+O(x^4).$

Testövning 8.9 (Sid. 370)

Lösning

a) $e^x-\sqrt{1+2x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)-(1+\frac{1}{2}\cdot2x-\frac{1}{8}(2x)^2+O(x^3))=$

$$=1+x+\frac{1}{2}x^2-1-x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)=x^2+O(x^3)=x^2(1+O(x))$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x^2}=1+O(x)\xrightarrow[x\to 0]{}1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x^2}=1$$

b) $\underline{\arctan x}=x-\frac{1}{3}x^3+O(x^5)$;

$$\frac{1}{\arctan x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\arctan x}{x\cdot\arctan x}=\frac{x-(x-x^3/3+O(x^5))}{x(x+O(x^3))}=$$

$$=\frac{x^3/3+O(x^5)}{x^2+O(x^4)}=\frac{x^3(1/3+O(x^2))}{x^2(1+O(x))}=x\cdot\frac{1/3+O(x^2)}{1+O(x)}\xrightarrow[x\to 0]{}0.$$

Testövning 8.10 (Sid. 370)

Lösning

(1) $e^{ax}-\cos\sqrt{x}=1+ax+\frac{1}{2}a^2x^2+\frac{1}{6}a^3x^3+O(x^4)\cdot a^4-$

$$-\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{720}x^3\right)+O(x^4)=$$

$$=\left(a+\frac{1}{2}\right)x+\left(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{24}\right)x^2+O(x^3)$$

(2) $(\arctan x)^2=(x+O(x^3))^2=x^2(1+O(x^2))^2$

(3) $\frac{e^{ax}-\cos\sqrt{x}}{(\arctan x)^2}=\frac{(a+1/2)x+(a^2/2-1/24)x^2+O(x^3)}{x^2(1+O(x^2))^2}=\left(a=-\frac{1}{2}\right)=$

$$=\frac{x^2/12+O(x^3)}{x^2(1+O(x^2))^2}=\frac{\cancel{x^2}(1/12+O(x))}{\cancel{x^2}(1+O(x^2))^2}=\frac{1/12+O(x)}{(1+O(x^2))^2}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{12}.$$

Testövning 8.11 (Sid. 372)

Lösning

a) $x^2(\ln(x+1)-\ln x)-x=x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x=x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-$

$$-x=x-\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right)-x=-\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right)\xrightarrow[x\to\infty]{}-\frac{1}{2}.$$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x^2}{\sqrt[3]{x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(2\ln|x|)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\ln|x|}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)=6\lim_{x-1\to 0}\frac{\ln x}{x-1}=$$

$$=[t=x-1]=6\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=6\cdot 1=6.$$

Testövning 8.12 (Sid. 372)

Lösning

$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}=x^2\left(\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=x+O\left(\frac{1}{x}\right)\approx x,\ x\to\infty.$

Asymptoten i fråga är $y=x$.

Testövning 8.13 (Sid. 372)

Lösning

$f(x)=2\cos x+(\arctan x)^2=$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+O(x^6)\right)+\left(x-\frac{1}{3}x^3+O(x^5)\right)^2=$$

$$=2-x^2+\frac{1}{12}x^4+O(x^6)+\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)^2+O(x^6)=$$

$$=2-x^2+\frac{1}{12}x^4+x^2-\frac{2}{3}x^4+O(x^6)=$$

$=2-\frac{7}{12}x^4+O(x^6)$; Obs! $f(0)=2$.

$f(x)-f(0)=-\frac{7}{12}x^4+O(x^6)\leq 0$, för små $|x|$; lok/max.

Övning 8.14 (Sid. 373)

Lösning

a) $\underline{e^u=1+u+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{6}u^3+O(u^4)}$; $\underline{u=\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5)}$;

$$e^{\sin x}=1+(x-\frac{1}{6}x^3)+\frac{1}{2}(x)^2+\frac{1}{6}(x)^3+O(x^4)=$$

$$=1+x+\frac{1}{2}x^2+O(x^4).$$

b) $\underline{e^v=1+v+\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{6}v^3+O(v^4)}$; $\underline{v=\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)}$;

$$\exp\{\cos x\}=\exp\{1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)\}=e\cdot\exp\{-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\}$$

$$=e\cdot(1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4))=e-\frac{e}{2}x^2+O(x^4).$$

Övning 8.15 (Sid. 373)

Lösning

a) $\underline{\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5)}$; $\underline{\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+O(x^3)}$.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\ln(1+x)})=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{\ln(1+x)\cdot\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-x^2/2-x+O(x^3)}{(x-x^2/2+O(x^3))(x+O(x^3))}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}(-1/2+O(x))}{\cancel{x^2}(1+O(x))(1+O(x^2))}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1/2+O(x)}{(1+O(x))\cdot(1+O(x^2))}=-\frac{1}{2}.$$

b) $\sqrt[3]{x^3+x^2}-x=x\cdot\sqrt[3]{1+1/x}-x=x(\sqrt[3]{1+1/x}-1)=x(1+\frac{1}{3}x^{-1}-$

$-\frac{1}{9}x^{-2}+O(x^{-3})-1)=x(\frac{1}{3}x^{-1}+O(x^{-2}))=\frac{1}{3}+O(\frac{1}{x})\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{1}{3}.$

Övning 8.16 (Sid. 374)

Lösning

$x^3(\ln(x+1)-\ln x)-(ax^2+bx+c)=x^3\ln(1+\frac{1}{x})-$

$-(ax^2+bx+c)=x^3(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+O(\frac{1}{x^4}))-(ax^2+bx+c)=$

$=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}+O(\frac{1}{x})-(ax^2+bx+c)=(1-a)x^2-(\frac{1}{2}+b)x+$

$+\frac{1}{3}-c+O(\frac{1}{x})\xrightarrow[x\to\infty]{}0\Leftrightarrow a=1\wedge b=-\frac{1}{2}\wedge c=\frac{1}{3}$;

Resultat: $p(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$.

Testövning 8.17 (Sid. 377)

Lösning

$\underline{y=f(x)=\ln(1+x)}$

$f'(x)=(1+x)^{-1}\Rightarrow f''(x)=(-1)(1+x)^{-2}\Rightarrow f'''(x)=(-1)^2 2!(1+x)^{-3}$

$\Rightarrow\cdots\Rightarrow\underline{f^{(n)}(x)=(-1)^n(n-1)!(1+x)^{-n},\ n=1,2,3,\ldots}$

Sats 8.3 d) konsulteras. $(x=0,1)$

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\Rightarrow|r_n(x)|=\frac{n!}{(n+1)!}\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}\leq$$

$$\leq\frac{1}{n+1}\cdot 0{,}1^{n+1}\overset{!}{<}10^{-5}\Rightarrow n=4 \quad (\overset{!}{<}\text{ är villkoret}).$$

$f(0{,}1)\doteq 0{,}1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}1^2+\frac{1}{3}\cdot 0{,}1^3-\frac{1}{4}\cdot 0{,}1^4=\underline{0{,}095308333}.$

Lösning till denna och nästa testövning ges av författarna på sid 491.

Övning 8.19 (Sid. 378)

Lösning

$f(x)=\cos x \Rightarrow \forall n\geq 1 : f^{(n)}(x)=\cos(x+n\frac{\pi}{2})$ (Se T. 8.4)

a) $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \Rightarrow |r_n(x)|=\frac{|\cos(x+n\pi(2)|}{(n+1)!}\cdot|x|^{n+1}\leq$

$\leq\frac{1}{(n+1)!}\cdot 1=\frac{1}{(n+1)!}<0{,}0005 \Rightarrow n=7$;

$\cos 1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{1}{720}=0{,}540277777.=\alpha$

b) $|r_n(x)|\leq\frac{1}{(n+1)!}\cdot 0{,}1^{n+1}<0{,}0005 \Rightarrow n=3$;

$\cos 0{,}1\doteq 1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}1^2=0{,}9950$

Svar: a) $\alpha=0{,}54027777$ med felet $<\frac{1}{8!}$.

b) $\alpha=0{,}9950$ med felet $<\frac{1}{4!}$.

Övning 8.20 (Sid. 378)

Lösning

a) $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}e^{\xi}\cdot x^4 \Leftrightarrow e^x-(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)=$

$=r_3(x)=\frac{e^{\xi}}{24}x^4,\ 0<\xi\leq 1 \Rightarrow \frac{e^0}{24}x^4\leq r_3(x)<\frac{e^1}{24}x^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{x^4}{24}\leq r_3(x)<\frac{3x^4}{24}\Leftrightarrow\frac{x^4}{24}\leq e^x-(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)\leq\frac{3x^4}{24}$

$\Leftrightarrow \underline{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\leq e^x\leq 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{24}x^4}.$

$r_n(x)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\Rightarrow r_n(x^2)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{2n+2}\Rightarrow\int_0^1 r_n(x^2)dx=$

$=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2n+3}<\frac{3}{(2n+3)(n+1)!}$;

$\frac{3}{(2n+3)(n+1)!}<0{,}005 \Rightarrow n=5$

$\int_0^1 e^{x^2}dx=\int_0^1(1+x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{24}x^8+\frac{1}{120}x^{10})dx+$

$+\int_0^1\frac{e^{\xi}}{6!}x^{12}dx\doteq 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{42}+\frac{1}{216}+\frac{1}{1320}=1{,}46253.$

Övning 8.21 (Sid. 378)

Lösning

$f(x)=\sin x \Rightarrow \forall n\geq 1 : f^{(n)}(x)=\sin(x+n\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{(n)}(0)=\sin(\frac{n\pi}{2})=\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}=\cos k\pi=(-1)^k \Rightarrow$

$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}x^{2k-1}+r_n(x)$; $r_n(x)=\frac{\sin(\xi+n\pi(2)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

$|r_n(x)|=\frac{|\sin(\xi+n\pi/2)|}{(2n+1)!}|x|^{2n+1}\leq\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x=\lim_{n\to\infty}(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}).$

Övning 8.22 (Sid. 381)

Lösning

a) $\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4+O(u^5)$;

$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5)=O(x).$

$\ln(1+\sin x)=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}x^3)^2+\frac{1}{3}(x)^3-\frac{1}{4}(x)^4+O(x^5)=$

$$=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}(x^2-\frac{1}{3}x^4)+\frac{1}{3}(x)^3-\frac{1}{4}(x)^4+O(x^5)=$$

$$=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+O(x^5)=$$

$$=\underline{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{12}x^4+O(x^5).}$$

b) $\sin u=u-\frac{1}{6}u^3+O(u^5)=O(u).$

$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+O(x^5);$

$$\sin(\ln(1+x))=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}(x-\frac{1}{2}x^2)^3+O(x^5)=$$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}(x^3-\frac{3}{2}x^4)+O(x^5)=$$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^4+O(x^5)=$$

$$=\underline{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+O(x^5).}$$

Övning 8.23 (Sid. 381)

Lösning

$$f(x)=\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{1/3}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}\Rightarrow f''(x)=$$

$$=-\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}\Rightarrow f'''(x)=\frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}\Rightarrow f^{(4)}(x)=-\frac{80}{81}(1+x)^{-11/3};$$

$$f(0)=1,\ f'(0)=\frac{1}{3},\ f''(0)=-\frac{2}{9},\ f'''(0)=\frac{10}{27},\ f^{(4)}(\xi)=-\frac{80}{81}(1+\xi)^{-11/3}$$

$$\underline{f(x)=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}(1+\xi)^{-11/3}x^4,\quad 0<\xi<x.}$$

Övning 8.24 (Sid. 381)

Lösning nästa sida.

Lösning

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-(1-x^2/2)+O(x^4))^2}{x\cdot(x+O(x^3))]^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2/2+O(x^4))^2}{x\cdot x^3(1+O(x^2))^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^4}(1/2+O(x^2))^2}{\cancel{x^4}(1+O(x^2))]^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1/2+O(x^2))^2}{(1+O(x^2))]^3}=\frac{(1/2)^2}{1}=\frac{1}{4}.$$

b) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x^2}-\frac{\sqrt{1+2x}}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\sin x-x^2\sqrt{1+2x}}{x^2\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+x^2/2+O(x^3))(x+O(x^3))-x^2(1+x+O(x^2))}{x^2(x+O(x^3))}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3/2-x^2-x^3+O(x^4)}{x^3(1+O(x^2))}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3/2+O(x^4)}{x^3(1+O(x^2))}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^3}(-1/2+O(x))}{\cancel{x^3}(1+O(x^2))}=\lim_{x\to 0}\frac{-1/2+O(x)}{1+O(x^2)}=\frac{-1/2}{1}=-\frac{1}{2}.$$

c) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x-\operatorname{atn}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-(x-x^2/2+O(x^3))}{x-(x-x^3/3+O(x^5))}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2/2+O(x^3)}{x^3/3+O(x^5)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2(1/2+O(x))}{x^3(1/3+O(x^2))}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\frac{1/2+O(x)}{1/3+O(x^2)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1/2+O(x)}{1/3+O(x^2)}=\infty.$$

d) $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\exp\{\ln(\cos x)^{1/x}\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\exp\{\frac{1}{x}\ln(\cos x)\}=\lim_{x\to 0}\exp\{\frac{1}{x}\ln(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4))\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\exp\{\frac{1}{x}(-\frac{x^2}{2}+O(x^4))\}=\lim_{x\to 0}\exp\{-\frac{x}{2}+O(x^3)\}=1.$$

$\exp\{f(x)\}=e^{f(x)}$; $\exp_a\{f(x)\}=a^{f(x)},\ a>0.$

e) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\cos\pi x}{\sin\pi x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x-1\to 0}\frac{\sqrt{x}+\cos\pi x}{\sin\pi x}=[t=x-1]=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}+\cos\pi(1+t)}{\sin\pi(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-\cos\pi t}{-\sin\pi t}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1+O(t^2)-(1+t/2+O(t^2))}{\pi t+O(t^3)}=\lim_{t\to 0}\frac{-t/2+O(t^2)}{\pi t+O(t^3)}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t}(-1/2+O(t))}{\cancel{t}(\pi+O(t^2))}=\lim_{t\to 0}\frac{-1/2+O(t)}{\pi+O(t^2)}=-\frac{1}{2\pi}.$$

f) $$\sqrt{x^2-x}-x^2\sin\frac{1}{x}=x\sqrt{1-1/x}-x^2\sin\frac{1}{x}=x\Big(1-\frac{1}{2x}-$$
$$-\frac{1}{8x^2}+O\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big)-x^2\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+O\Big(\frac{1}{x^5}\Big)\Big)=x-\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)-$$
$$-x+\frac{1}{6x}+O\Big(\frac{1}{x^3}\Big)=-\frac{1}{2}+O\Big(\frac{1}{x}\Big)\xrightarrow[x\to\infty]{}-\frac{1}{2}.$$

Övning 8.25 (Sid. 382)

Lösning

$$\frac{(1+ax)^{1/x^2}}{e^{2/x}}=\frac{\exp\{\ln(1+ax)^{1/x^2}\}}{e^{2/x}}=\exp\Big\{\frac{1}{x^2}\ln(1+ax)-\frac{2}{x}\Big\}=$$
$$=\exp\Big\{\frac{1}{x^2}\Big(ax-\frac{1}{2}a^2x^2+O(x^3)\Big)-\frac{2}{x}\Big\}=\exp\Big\{\frac{a}{x}-\frac{a^2}{2}-\frac{2}{x}+O(x)\Big\}=$$
$$=e^{-a^2/2}\exp\Big\{\frac{a-2}{x}+O(x)\Big\}\xrightarrow[x\to 0]{a=2}e^{-2}.$$

Övning 8.26 (Sid. 382)

Lösning

(1) $\sin ax=ax+O(x^3)$; $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+O(x^3)$;

$\sin ax-\ln(1+x)=(a-1)x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)$;

(2) $$e^{ax}-\sqrt{1+2x}=1+ax+\frac{1}{2}a^2x^2-\Big(1+x-\frac{1}{2}x^2+O(x^3)\Big)=$$
$$=1+ax+\frac{1}{2}a^2x^2-1-x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)=(a-1)x+\frac{a^2+1}{2}x^2+O(x^3)$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax-\ln(1+x)}{e^a-\sqrt{1+2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(a-1)x+x^2/2+O(x^3)}{(a-1)x+(a^2+1)x^2/2+O(x^3)}=$$
$$=(a=1)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2+O(x^3)}{x^2+O(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}(1/2+O(x))}{\cancel{x^2}(1+O(x))}=\frac{1}{2}.$$

Övning 8.27 (Sid. 382)

Lösning

a) $\underline{f(x)=\sin\big(x-\frac{x^2}{2}\big)-\ln(1+x)}$

(1) $\sin u=u-\frac{1}{6}u^3+O(u^5)$; $x-\frac{1}{3!}x^2=O(x)$;

$$\sin\Big(x-\frac{1}{2}x^2\Big)=x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}(x)^3+O(x^4)=x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+O(x^4)$$

(2) $$\sin\Big(x-\frac{1}{2}x^2\Big)-\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3-\Big(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\Big)+O(x^4)$$
$$=-\frac{1}{2}x^3+O(x^4)\Leftrightarrow f(x)-f(0)=x^3\Big(-\frac{1}{2}+O(x)\Big)\approx-\frac{1}{2}x^3.$$

I närheten av origo (för små $|x|$) växlar f tecken; origo är varken maximi- eller minimipunkt.

b) $\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4+O(u^5)$; $u=x+\frac{x^2}{2}=O(x)$;

$$\ln\Big(1+x+\frac{x^2}{2}\Big)=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\Big(x+\frac{1}{2}x^2\Big)^2+\frac{1}{3}\Big(x+\frac{1}{2}x^2\Big)^3-\frac{1}{4}(x)^4+$$

$$+O(x^5)=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(x^2+x^3+\frac{1}{4}x^4)+\frac{1}{3}(x^3+\frac{3}{2}x^4)-\frac{x^4}{4}+O(x^5)=$$

$$=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^4+O(x^5)=$$

$$=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{8}x^4+O(x^5); \quad \sin x=x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5).$$

$$\ln(1+x+\frac{1}{2}x^2)-\sin x=\frac{1}{8}x^4+O(x^5)=x^4(\frac{1}{8}+O(x))$$

För små $|x|$ är $f(x)\approx x^4\geq 0$, så origo är minimipunkt.

Övning 8.28 (Sid. 382)

Lösning

a) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$;

f är kontinuerlig i $x=0$ om $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$;

$f(0):=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1 & , x=1\end{cases}$$

är den kontinuerliga utvidgningen av f.

Anm. Tecknet $:=$ utläses "är enligt definition lika med". Man använder även $\triangleq$.

b) $$f'(0):=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x/x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-x^3/6+O(x^5)-x}{x}=\lim_{x\to 0}(-\frac{x^2}{6}+O(x^4))=0.$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$f''(0):=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}(\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3})=$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}(1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4))-\frac{1}{x^3}(x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5)))=$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}+O(x^2)-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}+O(x^2))=$$

$$=\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{3}+O(x^2))=-\frac{1}{3}.$$

Svar: $f(0)=1$; $f'(0)=0$, $f''(0)=-\frac{1}{3}$.

Övning 8.29 (Sid. 382)

Lösning

(1) $f(x)=\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{x^5}{5}+r_5(x)$;

$r_5(x)=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^6=-\frac{5!}{6!(1+\xi)^6}x^6$;

(2) $x>0\Rightarrow\ln(1+x)-(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5})=-\frac{x^6}{6(1+\xi)^6}<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$;

(3) $x>0\Rightarrow\ln(1+x)-(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4})=\frac{x^5}{5(1+\xi)^4}>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$.

Ur (2) och (3) följer att

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4<\ln(1+x)<x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5.$$

(4) $-1<x<0 \Rightarrow \ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)=-\frac{x^6}{6(1+\xi)^6}<0$

$\Leftrightarrow \ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5};$

(5) $-1<x<0 \Rightarrow \ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{5}\right)=\frac{x^5}{5(1+\xi)^4}<0.$

Endast den högra olikheten gäller för $-1<x<0$

Övning 8.30 (Sid. 382)

Lösning

$$f(x)=\cos\sqrt{x}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^k+r_n(x),\ |r_n(x)|\leqslant\frac{x^{n+1}}{(2n+2)!};$$

$$0\leqslant x\leqslant 2 \Rightarrow |r_n(x)|<\frac{2^{n+1}}{(2n+2)!}<10^{-5} \Rightarrow n=4,5,6,\ldots$$

Anm. $\cos t=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}+r_n(t),\ r_n(t)=\frac{\cos(\tau+n\pi/2)}{(2n+2)!}t^{2n+2}.$

Resultat: $p(x)=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{720}x^3+\frac{1}{40320}x^4.$

Övning 8.31 (Sid. 382)

Lösning

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+r_n(x),\ r_n(x)=\frac{\sin(\xi+(n+1)\pi/2)}{(2n+3)}x^{2n+3}.$$

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k}+\frac{\sin(\xi+(n+1)\pi/2)}{(2n+3)!}x^{2n+2},\ 0<\xi<1.$$

Anm. $D^n\cos x=\cos(x+n\frac{\pi}{2}),\ D^n\sin x=\sin(x+n\frac{\pi}{2}).$

$$\int_0^1 r_n(x)dx=\frac{\sin(\xi+n\pi/2)}{(2n+3)!}\int_0^1 x^{2n+2}dx=\frac{\sin(\xi+n\pi/2)}{(2n+3)(2n+3)!};$$

$$\int_0^1 r_n(x)dx<10^{-4} \Rightarrow \frac{1}{(2n+3)(2n+3)!}<10^{-4} \Rightarrow n\geqslant 2.$$

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+r_2(x) \Rightarrow \int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}+$$

$$+\int_0^1 r_n(x)dx=\frac{1703}{1800}+\frac{\sin(\xi+\pi)}{7\cdot 7!}=\frac{1703}{1800}-\frac{\sin\xi}{7\cdot 7!}.$$

Svar: $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx\frac{1703}{1800}.$

Övning 8.32 (Sid. 382)

Lösning

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+R_n,\ 0<R_n<\frac{e}{n!}<\frac{3}{n!}\ (1).$$

Antag att $e=p/q$, där p och q är positiva heltal. Välj nu $n>\max\{q,3\}$!

$$(n-1)!\frac{p}{q}=(n-1)!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right)+(n-1)!R_n \qquad (2)$$

Eftersom $n>q$ är VL i (2) heltal och följaktligen HL heltal. Men $0<(n-1)!R_n<\frac{3}{n}<1$, vilket är en motsägelse. Jag har ad absurdum visat att e är irrationellt.

9. Differentialekvationer

Testövning 9.1 (Sid. 384)

Lösning

a) $y=y(t)=$ antalet bakterier vid tiden t.

$\frac{dy}{dt} \propto y \Leftrightarrow y'(t)=k \cdot y(t)$, k proportionalitetskonstanten.

b) $y(t)=$ temperaturen vid tiden t; $y_0=$ omgivningens temperatur.

$\frac{dy}{dt} \propto y-y_0 \Leftrightarrow y'(t)=k \cdot (y(t)-y_0)$, k konstant.

Testövning 9.2 (Sid. 385)

Lösning

$y=Ce^{-4x} \Rightarrow y'=-4Ce^{-4x}=-4y \Leftrightarrow y'+4y=0.$

Svar: Endast till b).

Testövning 9.3 (Sid. 385)

Lösning

$y'=1-Ce^{-x}=-(-1+Ce^{-x})=x-(x-1+Ce^{-x})=x-y.$

Låter det konstlat? Bättre att derivera...

$$y=x-1+Ce^{-x} \Rightarrow \left.\begin{cases} VL=y'=1-Ce^{-x} \\ HL=x-y=x-(x-1+Ce^{-x})=1-Ce^{-x} \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow VL=HL$; lösning således.

$y(0)=1 \Rightarrow 0-1+C=1 \Leftrightarrow C=2.$

Testövning 9.4 (Sid. 386)

Lösning

Riktningsfälten finns uppritade i facit...

Testövning 9.5 (Sid. 390)

Lösning

a) $4y'+y=0 \Leftrightarrow y'+\frac{1}{4}y=0 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{4} \Rightarrow F(x)=\frac{x}{4} \Rightarrow \mu(x)=e^{x/4}$

$y'e^{x/4}+\frac{1}{4}e^{x/4}y=0 \Leftrightarrow (ye^{x/4})'=0 \Leftrightarrow ye^{x/4}=C \Rightarrow \underline{y=Ce^{-x/4}}$

b) $(x^2+1)y'=y \Leftrightarrow (x^2+1)y'-y=0 \Leftrightarrow y'-\frac{1}{x^2+1}y=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow F(x)=-\arctan x \Rightarrow \mu(x)=e^{-\arctan x} \Rightarrow$

$\Rightarrow (y \cdot e^{-\operatorname{atn} x})'=0 \Leftrightarrow ye^{-\operatorname{atn} x}=C \Leftrightarrow \underline{y=C \cdot e^{\arctan x}}$

Anm. $(x^2+1)\frac{dy}{dx}=y \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x^2+1} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x^2+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln y=\arctan x+\ln C \Leftrightarrow \underline{y=Ce^{\operatorname{atn} x}}$

Se lösningsmetoden om "separabla ekvationer".

c) $y'-2y=x \Rightarrow f(x)=-2 \Rightarrow \mathcal{F}(x)=-2x \Rightarrow \mu(x)=e^{-2x} \ (=h(x)).$

$e^{-2x}y'-2e^{-2x}y=xe^{-2x} \Leftrightarrow (ye^{-2x})'=e^{-2x}\cdot x \Leftrightarrow ye^{-2x}=$

$=\int e^{-2x}\cdot x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot x+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-\frac{x}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$

$\Leftrightarrow y=-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+Ce^{2x}=\underline{Ce^{-2x}-\frac{2x+1}{4}}.$

d) $y'+(1+2x)y=e^{-x^2} \Rightarrow f(x)=1+2x \Rightarrow \mathcal{F}(x)=x+x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(x)=e^{x+x^2} \Rightarrow y'e^{x+x^2}+(1+2x)e^{x+x^2}y=e^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^{x+x^2}y)'=e^x \Leftrightarrow e^{x+x^2}y=e^x+C \Leftrightarrow \underline{y=e^{-x^2}+Ce^{-x-x^2}}.$

Testövning 9.6 (Sid. 390)

Lösning

$\underline{xy'+10y=\ln x,\ y(1)=0.}$

$y'+\frac{10}{x}y=\frac{\ln x}{x} \Rightarrow f(x)=\frac{10}{x} \Rightarrow \mathcal{F}(x)=10\ln x=\ln x^{10}$

$\Rightarrow \mu(x)=e^{\ln x^{10}}=x^{10} \Rightarrow y'\cdot x^{10}+10x^9y=x^9\ln x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y\cdot x^{10})'=x^9\ln x \Leftrightarrow y\cdot x^{10}=\int x^9\ln x\,dx=\frac{x^{10}}{10}\ln x-$

$-\frac{1}{10}\int x^{10}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^{10}}{10}\ln x-\frac{1}{10}\int x^9dx=\frac{x^{10}}{10}\ln x-\frac{x^{10}}{100}+C$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{10}\ln x-\frac{1}{100}+\frac{C}{x^{10}} \Rightarrow y(1)=C-\frac{1}{100};$

$y(1)=0 \Rightarrow C-1/100=0 \Leftrightarrow C=1/100.$

<u>Resultat</u>: $y=\frac{1}{10}\ln x+\frac{1-x^{10}}{100x^{10}},\ x>0.$

Testövning 9.7 (Sid. 390)

Lösning

a) $\frac{dv}{dt}=-k \Leftrightarrow v(t)=-kt+C \Rightarrow v(0)=C;\ (*)$

$v(0)=v_0 \overset{(*)}{\Rightarrow} C=v_0 \Rightarrow \underline{v(t)=v_0-kt}.$

b) $\frac{ds}{dt}=v_0-kt \Rightarrow s(t)=v_0t-\frac{1}{2}kt^2+C' \Rightarrow s(0)=C';\ (**)$

$s(0)=0 \overset{(**)}{\Rightarrow} C'=0 \Rightarrow \underline{s=v_0t-\frac{1}{2}kt^2}.$

$v(t)=0 \Rightarrow v_0-kt=0 \Leftrightarrow t=\frac{v_0}{k} \Rightarrow s(\frac{v_0}{k})=v_0\cdot\frac{v_0}{k}-\frac{1}{2}k(\frac{v_0}{k})^2=$

$=\frac{v_0^2}{k}-\frac{v_0^2}{2k}=\frac{v_0^2}{2k}.$

c) $v(t)=2v_0-kt=0 \Rightarrow t=\frac{2v_0}{k} \Rightarrow s(\frac{2v_0}{k})=2v_0\cdot\frac{2v_0}{k}-\frac{1}{2}k(\frac{2v_0}{k})^2=$

$=\frac{4v_0^2}{k}-\frac{2v_0^2}{k}=\frac{2v_0^2}{k}=4\cdot\frac{v_0^2}{2k}$; den fyrdubblas.

<u>Anm.</u> $v_0 \longrightarrow 2v_0 \Rightarrow \frac{v_0^2}{2k} \longrightarrow \frac{(2v_0)^2}{2k}=4\cdot\frac{v_0^2}{2k}.$

Övning 9.8 (Sid. 391)

Lösning

a) $y'+\frac{1}{x}y=x \Leftrightarrow xy'+y=x^2 \Leftrightarrow (xy)'=x^2 \Leftrightarrow xy=\frac{1}{3}x^3+C$

$\Leftrightarrow \underline{y=\frac{1}{3}x^2+\frac{C}{x}}.$

b) $\underline{xy'+x^2y=x^2,\ y(0)=2}.$

$y'+xy=x \Rightarrow f(x)=x \Rightarrow \mathcal{F}(x)=\frac{x^2}{2} \Rightarrow \mu(x)=e^{x^2/2}\ (=h(x));$

$y'e^{x^2/2}+xe^{x^2/2}y=xe^{x^2/2}\Leftrightarrow(ye^{x^2/2})'=xe^{x^2/2}=(e^{x^2/2})'\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ye^{x^2/2}=e^{x^2/2}+C\Leftrightarrow y=1+Ce^{-x^2/2}\Rightarrow y(0)=1+C;\ (*)$

$y(0)=2\Rightarrow 1+C=2\Leftrightarrow C=1;\quad \underline{y=1+e^{x^2/2}}$

Anm. Får man dividera med x? x antar ju värdet 0. Det får man egentligen inte om man har begynnelsevärde där.

Övning 9.9 (Sid. 391)

Lösning

$\underline{(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2\arctan x,\ y(0)=1.}\quad (y=?).$

$y'-\frac{2x}{1+x^2}y=(1+x^2)\arctan x\Rightarrow f(x)=-\frac{2x}{1+x^2}\Rightarrow \mathcal{F}(x)=$

$=-\ln(1+x^2)=\ln(1+x^2)^{-1}\Rightarrow \mu(x)=e^{\mathcal{F}(x)}=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2}y'-\frac{2x}{(1+x^2)^2}y=\arctan x\Leftrightarrow\left(\frac{y}{1+x^2}\right)'=\arctan x$

$\Leftrightarrow \frac{y}{1+x^2}=\int\arctan x\,dx=x\cdot\operatorname{atn}x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x\cdot\operatorname{atn}x-$

$-\ln\sqrt{x^2+1}+C\Leftrightarrow y=x(x^2+1)\operatorname{atn}x-(x^2+1)\ln\sqrt{x^2+1}+C(x^2+1).$

$y(0)=1\Rightarrow C=0\Rightarrow \underline{y=(x^2+1)(x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1))}.$

Övning 9.10 (Sid. 391)

$xy'(x)+2y(x)=\cos x,\ x>0;\ y=?$ Lösning följer.

$y'+\frac{2}{x}y=\frac{\cos x}{x}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{x}\Rightarrow \mathcal{F}(x)=2\ln x=\ln x^2\Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(x)=e^{\ln x^2}=x^2\Rightarrow \underline{x^2y'+2xy=x\cos x}\Leftrightarrow(x^2y)'=$

$=x\cos x\Rightarrow x^2y=\int\cos x\cdot x\,dx=\sin x\cdot x-\int\sin x\cdot 1\,dx=$

$=x\sin x+\cos x+C\Leftrightarrow \underline{y=\frac{x\sin x+\cos x+C}{x^2}},\ C\in\mathbb{R}.$

Övning 9.11 (Sid. 391)

Lösning

a) Med y-axeln pekande nedåt fås:

$y=\frac{1}{2}g\cdot t^2\Leftrightarrow t^2=2y/g=4/g\Rightarrow t=2/\sqrt{g}\approx\underline{0{,}64\text{ sek.}}$

b) $v=gt=g\cdot 2/\sqrt{g}=2\sqrt{g}=6{,}26\text{ m/s}.$

Övning 9.12 (Sid. 391)

Lösning

$R\cdot i(t)+L\cdot i'(t)=E\Leftrightarrow i'(t)+\frac{R}{L}i(t)=\frac{E}{L}\Rightarrow f(t)=\frac{R}{L}\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{F}(t)=\frac{Rt}{L}\Rightarrow \mu(t)=e^{Rt/L}$ integrerande faktor $\Rightarrow$

$\Rightarrow i'(t)e^{Rt/L}+\frac{R}{L}e^{Rt/L}i(t)=\frac{E}{L}e^{Rt/L}\Leftrightarrow(i(t)\cdot e^{Rt/L})'=$

$=\frac{E}{L}e^{Rt/L}\Leftrightarrow \underline{i(t)e^{Rt/L}=\frac{E}{R}e^{Rt/L}+\text{Ç}},\ \underline{\text{Ç konstant}}.$

$i(0)=0\Rightarrow 0=\frac{E}{R}+\text{Ç}\Leftrightarrow \underline{\text{Ç}=-\frac{E}{R}}.$

Resultat: $i(t)=\frac{E}{R}(1-e^{-Rt/L}),\ t>0.$

Testövning 9.13 (Sid. 393)

Lösning

a) $yy' = x \Leftrightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 2x \Leftrightarrow 2y\,dy = 2x\,dx \Leftrightarrow \int 2y\,dy =$

$= \int 2x\,dx \Leftrightarrow y^2 = x^2 + C \Leftrightarrow \underline{y = \sqrt{x^2+C}} \vee \underline{y = -\sqrt{x^2+C}.}$

(1) $C \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}.$

(2) $C < 0 \Rightarrow x^2 + C > 0 \Leftrightarrow x^2 > -C \Leftrightarrow |x| > \sqrt{-C}.$

b) $y' = y^2 \Rightarrow y \equiv 0$ en lösning, den s.k. triviala.

$y \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x + C \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x+C}$

Denna lösning är definierad för $x \neq -C$.

c) $y' = e^{x+y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y \Leftrightarrow e^{-y}dy = e^x dx \Leftrightarrow -e^{-y} =$

$= e^x - C \Leftrightarrow e^{-y} = C - e^x \Leftrightarrow -y = \ln(C - e^x) \Leftrightarrow \underline{y = -\ln(C - e^x).}$

$D_{\ln} = \mathbb{R}_+ \Rightarrow C - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < C \Leftrightarrow \underline{x < \ln C,\ C > 0.}$

Testövning 9.14 (Sid. 393)

Lösning

a) $\underline{\frac{dv}{dt} = -k \cdot v,\quad v(0) = v_0.}$

$\frac{dv}{v} = -k\,dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{d\beta}{\beta} = -kt \Leftrightarrow \ln\frac{v}{v_0} = -kt \Leftrightarrow v = v_0 e^{-kt} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = v_0 e^{-kt} \Leftrightarrow s = v_0 \int_0^t e^{-k\tau} d\tau = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{v_0}{k}.$

Bromssträckan är $\frac{v_0}{k}$; bromstiden är "oändlig".

b) $\frac{dv}{dt} = -kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -k\,dt \Leftrightarrow -\int_{v_0}^{v} \frac{d\beta}{\beta^2} = kt \Leftrightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = kt$

$\Leftrightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt \Leftrightarrow v = \frac{v_0}{1 + v_0 kt},\ k > 0.$

Bromstiden fås ur ekvationen $v = 0$; den är oändligt stor.

$\frac{ds}{dt} = \frac{v_0}{1 + kv_0 t} \Rightarrow s = \frac{1}{k}\ln(1 + kv_0 t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty.$

Anm. I verkligheten är bromssträckan ändlig...

Övning 9.15 (Sid. 398)

Lösning

$(1+x^2)y' = e^{-y} \Leftrightarrow e^y dy = \frac{1}{x^2+1}dx \Rightarrow \int_0^y e^\eta d\eta = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^y - 1 = \arctan x \Leftrightarrow e^y = 1 + \mathrm{atn}\,x \Rightarrow y = \ln(1 + \mathrm{atn}\,x);$

$1 + \mathrm{atn}\,x > 0 \Leftrightarrow \mathrm{atn}\,x > -1 \Leftrightarrow x > -\tan 1$

Svar: $y = \ln(1 + \arctan x),\ x > -\tan 1.$

Övning 9.16 (Sid. 398)

Lösning

a) $\underline{xy' + y^2 = 1,\ x > 0;\ y(1) = 1/3.}$

$x\frac{dy}{dx} = 1 - y^2;\ 1 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1.$

$y = \pm 1$, de stationära lösningarna, uppfyller inte bivillkoret $y(1)=1/3$ och förkastas därför. Linjerna $y=\pm 1$ delar xy-planet i tre delar:

$$y<-1,\ -1<y<1 \text{ och } y>1.$$

$y(1)=1/3$, så jag använder "bandet" $\underline{x>0,\ -1<y<1}$.

$$x\frac{dy}{dx}=1-y^2 \Leftrightarrow \frac{2}{1-y^2}dy=\frac{2}{x}dx \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1-y}\right)dy=\frac{2}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int_{1/3}^{y}\left(\frac{1}{1+\eta}+\frac{1}{1-\eta}\right)d\eta=\int_1^x\frac{2}{\xi}d\xi \Leftrightarrow \left[\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right]_{1/3}^{y}=\left[2\ln\xi\right]_1^x$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{1+y}{1-y}=\ln 2+\ln x^2=\ln 2x^2 \Leftrightarrow \frac{1+y}{1-y}=2x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1}=-2x^2 \Leftrightarrow 1+\frac{2}{y-1}=-2x^2 \Leftrightarrow \frac{2}{1-y}=1+2x^2 \Leftrightarrow 1-y=\frac{2}{1+2x^2}$$

$$\Leftrightarrow y=1-\frac{2}{1+2x^2}=1-\frac{2}{2x^2+1} \Rightarrow \underline{y=\frac{2x^2-1}{2x^2+1},\ x>0.}$$

b) $\underline{xy'+y^2=1,\ x>0;\ y(1)=1.}$

Enligt utredningen ovan är $y=1$ den sökta lösningen.

Övning 9.17 (Sid. 399)

Lösning

$\underline{y'=+k(a-y)(b-y),\ y=y(t);\ y(0)=0.}$

$$\frac{dy}{(a-y)(b-y)}=kdt \Leftrightarrow \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{a-y}+\frac{1}{b-y}\right)dy=kdt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^y\left(\frac{1}{a-\eta}+\frac{1}{b-\eta}\right)d\eta=k(a-b)\int_0^t d\tau \Leftrightarrow \left[\ln\frac{a-\eta}{b-\eta}\right]_0^y=k(a-b)t$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{a-y}{b-y}=\ln\frac{a}{b}+k(a-b)t=\ln\frac{a}{b}e^{k(a-b)t} \Leftrightarrow \frac{a-y}{b-y}=$$

$$=\frac{a}{b}e^{k(a-b)t} \Leftrightarrow a-y=(b-y)\frac{a}{b}e^{k(a-b)t}=ae^{k(a-b)t}-$$

$$-y\frac{a}{b}e^{k(a-b)t} \Leftrightarrow \left(1-\frac{a}{b}e^{k(a-b)t}\right)y=a\left(1-e^{k(a-b)t}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underline{y=ab\cdot\frac{1-e^{k(a-b)t}}{b-ae^{k(a-b)t}},\ t>0.}$$

Testövning 9.18 (Sid. 400)

Lösning

$y_1''+ay_1'+by_1=f_1(x),\quad y=y(x).$

$$\forall c\in\mathbb{R}:\ y=cy_1 \Rightarrow (cy_1)''+a(cy_1)'+b(cy_1)=cy_1''+cay_1'+$$

$$+cby_1=c(y_1''+ay_1'+by_1)=cf_1(x).$$

Testövning 9.19 (Sid. 400)

Lösning

$$\begin{cases} y_1''+ay_1'+by_1=f_1(x) \\ y_2''+ay_2'+by_2=f_2(x)\end{cases} \Rightarrow (7y_1-3y_2)''+a(7y_1-3y_2)'+$$

$$+b(7y_1-3y_2)=(7y_1''-3y_2'')+a(7y_1'-3y_2')+b(7y_1-3y_2)=$$

$$=7(y_1''+ay_1'+by_1)-3(y_2''+ay_2'+by_2)=7f_1(x)-3f_2(x).$$

<u>Svar</u>: $g(x)=7y_1(x)-3y_2(x)$.

Svaret borde kunna skrivas ner direkt.

Testövning 9.20 (Sid. 404)

Lösning

a) $\underline{y''-3y'+2y=0}$

$y=e^{rx} \Rightarrow y'=ry \Rightarrow y''=ry'=r^2y \Rightarrow y''-3y'+2y=$

$=(r^2-3r+2)y=0 \Leftrightarrow r^2-3r+2=0 \Leftrightarrow r=1 \vee r=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=e^x \vee y=e^{2x} \Rightarrow \underline{y_h=C_1e^x+C_2e^{2x},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.}$

b) $\underline{y''+4y=0}$

$r^2+4=0 \Leftrightarrow r=\pm 2i \Leftrightarrow y=e^{2ix} \vee y=e^{-2ix} \Rightarrow y=C_1e^{2ix}+$

$+C_2e^{-2ix}=(C_1+C_2)\cos 2x+i(C_1-C_2)\sin 2x=\underline{A\cos 2x+B\sin 2x.}$

c) $\underline{y''+2y'+y=0}$

$r^2+2r+1=(r+1)^2=0 \Leftrightarrow r=r_1=r_2=-1 \Rightarrow y=e^{-x} \vee y=xe^{-x}$

$\Rightarrow y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}=\underline{(C_1+C_2x)e^{-x}.}$

d) $\underline{y''+6y'+25y=0}$

$r^2+6r+25=0 \Leftrightarrow r=-3\pm 4i \Rightarrow y=e^{-3x}\cos 4x \vee y=e^{-3x}\sin 4x$

$\Leftrightarrow y=C_1e^{-3x}\cos 4x+C_2e^{-3x}\sin 4=\underline{e^{-3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x).}$

Testövning 9.21 (Sid. 404)

$y''-y'-6y=0 \Rightarrow r^2-r-6=0 \Leftrightarrow r=-2 \vee r=3 \Rightarrow y=e^{-2x} \vee$

$\vee y=e^{3x} \Rightarrow y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x},\ C_1,C_2$ konstanter.

$\lim_{x\to\infty}|y(x)|<\infty \Rightarrow C_2\equiv 0 \Rightarrow \underline{y=C_1e^{-2x},\ C_1\in\mathbb{R}.}$

Testövning 9.22 (Sid. 404)

Lösning

$\underline{y''+k^2y=0,\ y(0)=y(1)=0}$

(1) $r^2+k^2=0 \Leftrightarrow r=ik \Rightarrow y=C_1\cos kx+C_2\sin kx,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$

(2) $y(0)=0 \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow y=C_2\sin kx$

(3) $y(1)=0 \Rightarrow \sin k=0 \Leftrightarrow k=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}_+.$

Resultat: $y=C\sin n\pi x,\ n=1,2,3,\ldots$

Övning 9.23 (Sid. 406)

Lösning

a) $\underline{y''-y=x^2}$

(1) $y''-y=0 \Leftrightarrow r^2-1=0 \Leftrightarrow r=1 \vee r=-1 \Leftrightarrow y=e^x \vee y=e^{-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{y_h=C_1e^x+C_2e^{-x},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.}$

(2) $y_P=ax^2+b \Rightarrow y_P''=2a \Rightarrow VL=y_P''-y_P=2a-ax^2-b=$

$=-ax^2+2a-b=x^2 \Leftrightarrow -a=1 \wedge 2a-b=0 \Leftrightarrow a=-1 \wedge b=-2$

$\Rightarrow \underline{y_P=-x^2-2.}$

Resultat: $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-x^2-2.$ $(y=y_h+y_p).$

b) $\underline{y''+2y'-3y=1-6x}$

(1) $y''+2y'-3y=0 \Rightarrow r^2+2r-3=(r-1)(r+3)=0 \Leftrightarrow r=1 \vee r=-3$

$\Leftrightarrow y=e^{x} \vee y=e^{-3x} \Rightarrow \underline{y_h=C_1e^{x}+C_2e^{-3x},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}}.$

(2) $y_p=ax+b \Rightarrow y_p'=a \Rightarrow y_p''=0 \Rightarrow y_p''+2y_p'-3y_p=$

$=0+2a-3(ax+b)=2a-3b-3ax=1-6x \Leftrightarrow 2a-3b=1 \wedge$

$\wedge -3a=-6 \Leftrightarrow a=2 \wedge b=1 \Rightarrow \underline{y_p=2x+1}.$

Resultat: $y=C_1e^{x}+C_2e^{-3x}+2x+1.$

c) $\underline{y''-3y'=x^2}$

(1) $y''-3y'=0 \Leftrightarrow r^2-3r=0 \Leftrightarrow r(r-3)=0 \Leftrightarrow r=0 \vee r=3$

$\Rightarrow y=1 \vee y=e^{3x} \Rightarrow \underline{y_h=C_1+C_2e^{3x},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}}.$

(2) $y_p=x(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx \Rightarrow y_p'=3ax^2+2bx+C$

$\Rightarrow y_p''=6ax+2b \Rightarrow y_p''-3y_p'=6ax+2b-3(3ax^2+2bx+C)=$

$=-9ax^2+(6a-6b)x+2b-3c=x^2+0\cdot x+0 \Leftrightarrow -9a=1$

$\wedge\ 6a-6b=0 \wedge \cdot 2b-3c=0 \Leftrightarrow a=b=-\frac{1}{9} \wedge c=-\frac{2}{27} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{y_p=-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{27}x}.$

Resultat: $y=C_1+C_2e^{3x}-\frac{1}{27}(3x^3+3x^2+2x),\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$

d) $\underline{4y''-12y'+9y=9(x^2-x)}.$

(1) $4y''-12y'+9y=0 \Rightarrow 4r^2-12r+9=(2r-3)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r=r_1=r_2=\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{y_h=(C_1+C_2x)e^{3x/2},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}}.$

(2) $y_p=ax^2+bx+c \Rightarrow y_p'=2ax+b \Rightarrow y_p''=2a.$

$4y_p''-12y_p'+9y_p=4\cdot 2a-12(2ax+b)+9(ax^2+bx+c)=$

$=8a-24ax-12b+9ax^2+9bx+9c=9ax^2+(-24a+9b)x-$

$-12b+9c\ =9x^2-9x+0 \Leftrightarrow 9a=9 \wedge -24a+9b=-9 \wedge$

$\wedge -12b+9c=0 \Leftrightarrow a=1 \wedge 9b=15 \wedge 3c=4b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=1 \wedge b=\frac{5}{3} \wedge c=\frac{20}{9} \Rightarrow \underline{y_p=x^2+\frac{5}{3}x+\frac{20}{9}}.$

Resultat: $y=(C_1+C_2x)e^{3x/2}+x^2+\frac{5}{3}x+\frac{20}{9}.$

Testövning 9.24 (Sid. 406)

Lösning

(1) $r_1=-4 \wedge r_2=3 \Rightarrow (r+4)(r-3)=0 \Leftrightarrow r^2+r-12=0$

$\Leftrightarrow \underline{y''+y'-12y=0}.$

(2) $y_p=x^3-x \Rightarrow y_p''+y_p'-12y_p=6x+3x^2-1-12x^3+12x=18x+$

$+3x^2-12x^3-1.$

Resultat: $y''+y'-12y=-1+18x+3x^2-12x^3.$

Testörning 9.25 (Sid. 408)

Lösning

a) $\underline{y''+2y'-8y=e^{5x}}$.

(1) $y''+2y'-8y=0 \Leftrightarrow r^2+2r-8=0 \Leftrightarrow r=2 \vee r=-4 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=e^{2x} \vee y=e^{-4x} \Rightarrow \underline{y_h=C_1e^{2x}+C_2e^{-4x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}}.$

(2) $y_p=e^{5x} \Rightarrow y_p'=5y_p \Rightarrow y_p''=5y_p'=25y_p;$

$25y_p+10y_p-8y_p=e^{5x} \Leftrightarrow 27y_p=e^{5x} \Leftrightarrow \underline{y_p=\frac{1}{27}e^{5x}}.$

Resultat: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-4x}+\frac{1}{27}e^{5x}.$

Anm. Samma y_p fås vid ansatsen $y_p=Ae^{5x}$.

b) $\underline{y'+2y'-8y=e^{2x}}.$

$y_p=Axe^{2x} \Rightarrow y_p'=A(2x+1)e^{2x} \Rightarrow y_p''=A(4x+4)e^{2x};$

$VL=y_p''+2y_p'-8y_p=A(4x+4+4x+2-8x)e^{2x}=6Ae^{2x}=$

$=e^{2x}=HL \Leftrightarrow 6A=1 \Leftrightarrow A=\frac{1}{6} \Rightarrow \underline{y_p=\frac{1}{6}xe^{2x}}$

Resultat: $y=(C_1+\frac{1}{6}x)e^{2x}+C_2e^{-4x}.$

Testörning 9.26 (Sid. 409)

Lösning

$y''-2y'=e^{2x}(x^2+x-3);\quad y(0)=y'(0)=2.$

(1) $y=ze^{2x} \Rightarrow y'=(z'+2z)e^{2x} \Rightarrow y''=(z''+4z'+4z)e^{2x};$

$y''-2y'=(z''+4z'+4z-2z'-4z)e^{2x}=(z''+2z')e^{2x}=$

$=e^{2x}(x^2+x-3) \Leftrightarrow \underline{z''+2z'=x^2+x-3}.$

(2) $y(x)=z(x)e^{2x} \Rightarrow y(0)=\underline{z(0)=2}.$

$y'(x)=(z'(x)+2z(x))e^{2x} \Rightarrow y'(0)=z'(0)+2z(0) \Rightarrow \underline{z'(0)=-2}.$

(3) $\underline{z''+2z'=x^2+x-3};\ \underline{z(0)=2,\ z'(0)=-2};\quad \underline{y=ze^{2x}}.$

$z''+2z'=0 \Leftrightarrow r^2+2r=r(r+2)=0 \Leftrightarrow r=0 \vee r=-2 \Rightarrow z=1 \vee$

$\vee\ z=e^{-2x} \Rightarrow z_h=C_1+C_2e^{-2x}.$

$z_p=x(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx \Rightarrow z_p'=3ax^2+2bx+c \Rightarrow$

$\Rightarrow z_p''=6ax+2b. \Rightarrow z_p''+2z_p'=6ax+2b+2(3ax^2+2bx+c)=$

$=6ax^2+(6a+4b)x+2b+2c=x^2+x-3 \Leftrightarrow 6a=1 \wedge$

$\wedge\ 6a+4b=1 \wedge 2b+2c=-3 \Leftrightarrow a=\frac{1}{6} \wedge b=0 \wedge c=-\frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{z_p=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x}.$

(4) $z=C_1+C_2e^{-2x}-\frac{3}{2}x+\frac{1}{6}x^3 \Rightarrow z(0)=C_1+C_2;$

$z'=-2C_2e^{-2x}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow z'(0)=-2C_2-\frac{3}{2};$

$$\begin{cases} z(0)=2 \Rightarrow C_1+C_2=2 \\ z'(0)=-2 \Rightarrow -2C_2-\frac{3}{2}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=\frac{7}{4} \\ C_2=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow z=\frac{7}{4}+\frac{1}{4}e^{-2x}-$$

$-3x+\frac{1}{6}x^3 \Leftrightarrow \underline{y=(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}x+\frac{1}{6}x^3)e^{2x}+\frac{1}{4}}.$

Övning 9.27 (Sid. 409)

Lösning

$$y''+y'-6y=e^{3x},\ \lim_{x\to-\infty}|y(x)|<\infty,\ y(0)=2.$$

(1) $y''+y'-6y=0 \Leftrightarrow r^2+r-6=(r+3)(r-2)=0 \Leftrightarrow r=-3 \vee r=2$

$\Leftrightarrow y=e^{-3x} \vee y=e^{2x} \Leftrightarrow \underline{y_h=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}}.$

(2) $y_P=Ae^{3x} \Rightarrow y_P''+y_P'-6y_P=9y_P+3y_P-6y_P=6y_P=$

$=e^{3x} \Leftrightarrow y_P=\frac{1}{6}e^{3x}.$

(3) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{6}e^{3x};$

$\lim_{x\to-\infty}|y(x)|<\infty \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow y=C_2e^{2x}+\frac{1}{6}e^{3x};\ (*)$

$y(0)=2 \overset{(*)}{\Rightarrow} C_2+\frac{1}{6}=2 \Leftrightarrow C_2=\frac{11}{6}.$

Resultat: $y=\frac{1}{6}(11e^{2x}+e^{3x}).$

Övning 9.28 (Sid. 409)

Lösning

a) $y''-3y'+2y=e^x+4x$

(1) $y''-3y'+2y=0 \Leftrightarrow y_h=C_1e^x+C_2e^{2x}$ (Se 9.20 a)).

(2) $y=e^x$ ingår i y_h, för $C_1=1$ och $C_2=0$, så jag ansätter som y_P funktionen $y_P=axe^x+bx+c$.

$y_P=axe^x+bx+c \Rightarrow y_P'=a(x+1)e^x+b \Rightarrow y_P''=a(x+2)e^x;$

$VL=y_P''-3y_P'+2y_P=a(x+2-3x-3+2x)e^x-3b+2bx+2c)=$

$=a(-1)e^x+2bx-3b+2c;$

$HL=e^x+4x;$

$VL=HL \Rightarrow -a=1 \wedge 2b=4 \wedge -3b+2c=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases};$

Resultat: $y=(C_1-x)e^x+C_2e^{2x}+2x+3.$

b) $y''+2y'+y=e^x-e^{-x}$

$y=ze^{-x} \Rightarrow y'=(z'-z)e^{-x} \Rightarrow y''=(z''-2z'+z)e^{-x};$

$VL=y''+2y'+y=(z''-2z'+z+2z'-2z+z)e^{-x}=z''e^{-x};$

$VL=HL=e^x-e^{-x} \Rightarrow z''e^{-x}=e^x-e^{-x} \Leftrightarrow z''=e^{2x}-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z'=\frac{1}{2}e^{2x}-x+C_1 \Leftrightarrow z=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2.$

Resultat: $y=\frac{1}{4}e^x+(C_2+C_1x-\frac{1}{2}x^2)e^{-x}.$

Övning 9.29 (Sid. 409)

Lösning

$y''+4y=0;\ y(0)=4,\ y'(0)=0 \qquad (y=y(t)).$

$r^2+4=0 \Leftrightarrow r=\pm 2i \Rightarrow y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t.$

$y(0)=4 \Rightarrow C_1=4 \Rightarrow y=4\cos 2t+C_2\sin 2t \Rightarrow y'=-8\sin 2t+$

$+2C_2\cos 2t \Rightarrow y'(0)=2C_2$; $y'(0)=0 \Rightarrow C_2=0$.

$y=4\cos 2t_0=0 \Rightarrow 2t_0=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t_0=\frac{\pi}{4}$.

Resultat: $y=4\cos 2t_0$; $t_0=\pi/4$.

Testövning 9.30 (Sid. 414)

Lösning

a) $y''+4y'+4y=25\cos x$

(1) $y''+4y'+4y=0 \Leftrightarrow r^2+4r+4=0 \Leftrightarrow (r+2)^2=0 \Leftrightarrow$

$r=r_1=r_2=-2 \Rightarrow y=e^{-2x} \vee y=xe^{-2x} \Rightarrow y_h=(C_1+C_2x)e^{-2x}$

(2) $u''+4u'+4u=25e^{ix}$, $y_p=\text{Re}\{u_p\}$.

$u_p=Ae^{ix} \Rightarrow u_p'=Aie^{ix} \Rightarrow u_p''=-Ae^{ix}$;

$VL=u_p''+4u_p'+4u_p=A(-1+4i+4)e^{ix}=A(3+4i)e^{ix}$;

$VL=HL=5^2e^{ix} \Rightarrow A\cdot(3+4i)=25 \Leftrightarrow A(3+4i)(3-4i)=$

$=25(3-4i) \Leftrightarrow A=3-4i \Rightarrow u_p=(3-4i)e^{ix} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_p=\text{Re}\{3\cos x+4\sin x+i(3\sin x-4\cos x)\}=$

$=3\cos x+4\sin x$.

Resultat: $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+3\cos x+4\sin x$.

b) $y''-6y'+9y=e^{3x}+\sin x$

(1) $y''-6y'+9y=0 \Leftrightarrow r^2-6r+9=(r-3)^2=0 \Leftrightarrow r=r_1=r_2=3$

$\Rightarrow y=e^{3x} \vee y=xe^{3x} \Rightarrow y_h=(C_1+C_2x)e^{3x}$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

(2) $y''-6y'+9y=e^{3x}$

$y=ze^{3x} \Rightarrow y'=(z'+3z)e^{3x} \Rightarrow y''=(z''+6z'+9z)e^{3x}$;

$y''-6y'+9y=(z''+6z'+9z-6z'-18z+9z)e^{3x}=z''e^{3x}=e^{3x}$

$\Leftrightarrow z''=1 \Rightarrow z'=x \Rightarrow z=\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y_{p_1}=\frac{1}{2}x^2e^{3x}$

(3) $u''-6u'+9u=e^{ix}$, $y_{p_2}=\text{Im}\,u_p$.

$u_p=Ae^{ix} \Rightarrow u_p'=Aie^{ix} \Rightarrow u_p''=-Ae^{ix}$;

$VL=u_p''-6u_p'+9u_p=A(-1-6i+9)e^{ix}=A(8-6i)e^{ix}$;

$HL=e^{ix} \Rightarrow A\cdot(8-6i)=1 \Leftrightarrow A(8-6i)(8+6i)=8+6i$

$\Leftrightarrow 100A=8+6i \Leftrightarrow A=\frac{4+3i}{50} \Rightarrow u_p=\frac{1}{50}(4+3i)e^{ix}=$

$=\frac{1}{50}(4\cos x-3\sin x+i(4\sin x+3\cos x)\} \Rightarrow y_{p_2}=\text{Im}\,u_p=$

$=\frac{1}{50}(4\sin x+3\cos x)$.

Resultat: $y=(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2)e^{3x}+\frac{1}{50}(4\sin x+3\cos x)$.

c) $y''-3y'+2y=e^{3x}\sin x$.

(1) $y''-3y'+2y=0 \Leftrightarrow y_h=C_1e^x+C_2e^{2x}$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$. (9.20a)

(2) $u''-3u'+2u=e^{(3+i)x}$, $y_p=\text{Im}\,u_p$.

$u_p=Ae^{(3+i)x} \Rightarrow u_p'=(3+i)u_p \Rightarrow u_p''=(3+i)^2u_p=(8+6i)u_p$

$u_p''-3u_p'+2u_p=(8+6i-9-3i+1)u_p=3iu_p=e^{(3+i)x}$

$\Leftrightarrow u_p=\frac{i}{3}e^{(3+i)x}\Rightarrow y_p=\frac{1}{3}e^{3x}\cos x.$

<u>Resultat</u>: $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{3}e^{3x}\cos x.$

d) $\underline{y''-6y'+10y=e^{3x}\sin x}$

$y=ze^{3x}\Rightarrow y'=(z'+3z)e^{3x}\Rightarrow y''=(z''+6z'+9z)e^{3x};$

$y''-6y'+9y=(z''+6z'+9z-6z'-18z+10z)e^{3x}=(z''+z)e^{3x};$

$(z''+z)e^{3x}=e^{3x}\sin x\Leftrightarrow \underline{z''+z=\sin x}.$

(1) $z''+z=0\Leftrightarrow \underline{z_h=C_1\cos x+C_2\sin x}.$

(2) $\sin x$ ingår i z_h (för $C_1=0, C_2=1$), så jag ansätter som partikulärlösning

$$z_p=Ax\cos x.$$

Ansatsen ska vara udda, ty $HL=\sin x$ är det och detsamma måste vara $VL=z_p''+z_p$. Man ska komma ihåg att f udda $\Rightarrow$ $\Rightarrow f'$ jämn $\Rightarrow f''$ udda osv, s.a $f''+f$ udda.

$z_p=Ax\cos x\Rightarrow z_p'=A(\cos x-x\sin x)\Rightarrow z_p''=$

$=A(-2\sin x-x\cos x)=-2A\sin x-z_p\Leftrightarrow z_p''+z_p=$

$=-2A\sin x=\sin x\Leftrightarrow A=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow z_p=-\frac{1}{2}x\cos x;$

(3) $z''+z=\sin x\Leftrightarrow z=(C_1-\frac{x}{2})\cos x+C_2\sin x.$

<u>Resultat</u>: $y=e^{3x}((C_1-x/2)\cos x+C_2\sin x).$

Testövning 9.31 (Sid. 414)

Lösning

$$my''(t)+ky(t)=\mathcal{F}(t)\Rightarrow \underline{y''+\omega^2y=\frac{1}{m}\sin\omega t}.$$

Jag har satt $\omega=\sqrt{k/m}$

(1) $y''+\omega^2y=0\Leftrightarrow y(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t=y_h(t).$

(2) $\sin\omega t$ ingår i y_h (för $C_1=0, C_2=1$), så jag ansätter som partikulärlösning funktionen

$$y_p=A\cdot t\cos\omega t.$$

$y_p''+\omega^2y_p=-2A\omega\sin\omega t=\frac{1}{m}\sin\omega t\Leftrightarrow A=-\frac{1}{2m\omega}$

(3) $y=(C_1-\frac{t}{2\sqrt{mk}})\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$; denna växer till beloppet obegränsat. Fenomenet går under namnet <u>resonanskatastrof.</u>

Testövning 9.32 (Sid. 416)

Lösning

a) $\underline{(D+a)^2f(x)}=(D+a)((D+a)f(x))=(D+a)(Df(x)+af(x))=$

$= D(Df(x)+af(x))+a(Df(x)+af(x)) = D^2f(x)+aDf(x)+$

$+aDf(x)+a^2f(x) = D^2f(x)+2aDf(x)+a^2f(x) =$

$$=\underline{(D^2+2aD+a^2)f(x)}.$$

b) $(D+a)^3f(x) = (D+a)(D+a)^2f(x) = (D+a)(D^2f(x)+$

$+2aDf(x)+a^2f(x) = D(D^2f(x)+2aDf(x)+a^2f(x))+$

$+a(D^2f(x)+2aDf(x)+a^2f(x)) = D^3f(x)+2aD^2f(x)+$

$+a^2Df(x)+aD^2f(x)+2a^2Df(x)+a^3f(x) = D^3f(x)+$

$+3aD^2f(x)+3a^2Df(x)+a^3f(x) = \underline{(D^3+3aD^2+3a^2D+a^3)f(x)}.$

Testörning 9.33 (Sid. 416)

Lösning

(1) $y = ze^{ax} \Rightarrow y' = z'e^{ax}+z.ae^{ax} = (z'+az)e^{ax} \Rightarrow y'' =$

$=(z''+az')e^{ax}+(z'+az)ae^{ax} = (z''+2az'+a^2z)e^{ax} \Rightarrow$

$\Rightarrow y''' = (z'''+2az''+a^2z')e^{ax}+(z''+2az'+a^2z)ae^{ax} =$

$=(z'''+2az''+a^2z+az''+2a^2z'+a^3z)e^{ax} = (z'''+3az''+$

$+3a^2z'+a^3z)e^{ax}.$

(2) $y'' = D^2e^{ax}z = e^{ax}(D+a)^2z = e^{ax}(z''+2az'+a^2z)$;

$y''' = D^3e^{ax}z = e^{ax}(D+a)^3z = e^{ax}(z'''+3az''+$

$+3a^2z'+a^3z)$, enl. föregående testörning.

Testörning 9.34 (Sid. 416)

Lösning

En linjär homogen DE av andra ordningen kan skrivas

$$y''+ay'+by=0,\ y=y(x) \qquad (1)$$

eller med derivatoperatorn D:

$$(D^2+aD+b)y(x)=0 \qquad (2)$$

Om vi inför polynomet

$$P(r)=r^2+ar+b \qquad (3)$$

är det naturligt att skriva DE (1) på formen

$$P(D)y = D^2y+aDy+by=0. \qquad (4)$$

En första ordningens DE med konstanta koefficienter kan skrivas

$$y'-ry=0 \text{ eller } (D-r)y=0 \qquad (5)$$

Denna har lösningen $y=Ce^{rx}$. Det ligger därför nära till hands att undersöka om exp-funktionen kan vara lösning också till $P(D)y=0$. Eftersom $De^{rx}=re^{rx}$ får vi

$$P(D)e^{rx} = D^2e^{rx} + aDe^{rx} + be^{rx} = (r^2+ar+b)e^{rx} =$$
$$= P(r)e^{rx}; \qquad (6)$$

Exp-funktionen e^{rx} är alltså lösning precis då r är rot till ekvationen $P(r)=0$. Denna ekvation, den karakteristiska ekvationen, kan ha två olika rötter $r_1 \neq r_2$ eller en dubbelrot r_0. $P(r)$ kan faktoriseras således enligt

$$P(r) = (r-r_1)(r-r_2) \qquad (7)$$

eller om dubbelrot förekommer

$$P(r) = (r-r_0)^2 \qquad (8)$$

DE (4) kan därför skrivas

$$P(D)y = (D-r_1)(D-r_2)y = 0 \qquad (9)$$

eller $$P(D)y = (D-r_0)^2 y = 0 \qquad (10)$$

(1) $u = (D-r_2)y \Rightarrow (D-r_1)u = 0 \Leftrightarrow u = C_1e^{r_1x} \Rightarrow$
$\Rightarrow (D-r_2)y = Ce^{r_1x} \Leftrightarrow y' - r_2y = C_1e^{r_1x} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e^{-r_2x}y' - r_2e^{-r_2x}y = C_1e^{(r_1-r_2)x} \Leftrightarrow (e^{-r_2x}y)' = C_1e^{(r_1-r_2)x}$

(2) Om $r_1 \neq r_2$ har vi

$e^{-r_2x}y = \frac{C_1}{r_1-r_2}e^{(r_1-r_2)x} + C_2 \Leftrightarrow \underline{y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}}.$

(3) Om $r_1 = r_2 = r_0$, så har vi ekvationen

$$D(e^{-r_0x}y) = C_1$$

som har lösningen

$e^{-r_0x}y = C_1x + C_2 \Leftrightarrow y = (C_1x+C_2)e^{r_1x} = (C_1x+C_2)e^{r_2x}$

Testövning 9.35 (Sid. 416)

Lösning

$\underline{y'' + ay' + by = f(x);\ \ y = y(x);\ \ y_1 = e^{r_1x}}$ $\underline{\text{lösning}}$.

$y = z\cdot y_1 \Rightarrow y' = z'\cdot y_1 + z\cdot y_1' \Rightarrow y'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'' \Rightarrow$

$\Rightarrow y'' + ay' + by = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'' + a(z'y_1 + zy_1') + bzy_1 =$

$= z''\cdot y_1 + (2y_1' + ay_1)z' + z(\underbrace{y_1'' + ay_1' + by_1}_{=0}) = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z''e^{r_1x} + (2r_1+a)z'e^{r_1x} = f(x) \Leftrightarrow \underline{z'' + (2r_1+a)z' = f(x)e^{-r_1x}}$

$u = z' \Rightarrow \underline{u' + (2r_1+a)u = f(x)e^{-r_1x}}$ (1:a ordningens).

Testövning 9.36 (Sid. 418)

Lösning

a) $\underline{y''' - 3y' + 2y = 0}$

$r^3 - 3r + 2 = (r-1)^2(r+2) = 0 \Leftrightarrow r = r_1 = r_2 = 1 \vee r = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = e^x \vee y = xe^x \vee y = e^{-2x} \Rightarrow \underline{y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{-2x}}.$

b) $y^{(4)}-3y''-4y=0$

$r^4-3r^2-4=0 \Leftrightarrow (r^2+1)(r^2-4)=0 \Leftrightarrow r=\pm i \vee r=\pm 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x},\ C_i\in\mathbb{R}.$

Testövning 9.37 (Sid. 418)

Lösning

$r=r_1=r_2=r_3=-3+4i$ och $r=r_4=r_5=r_6=-3-4i$ ger

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{(-3+4i)x}+(C_4+C_5x+C_6x^2)e^{(-3-4i)x}$$

$$=e^{-3x}((C_1+C_2x+C_3x^2)e^{4ix}+(C_4+C_5x+C_6x^2)e^{-4ix})$$

$$=e^{-3x}(((C_1+C_4)+x(C_2+C_5)+x^2(C_3+C_6))\cos 4x+$$

$$+((C_1-C_4)i+x(C_2-C_5)i+x^2(C_3-C_6)i)\sin 4x)=$$

$$=e^{-3x}((k_1+k_2x+k_3x^2)\cos 4x+(k_4+k_5x+k_6x^2)\sin 4x).$$

Anm. $k_1,\dots,k_6$ kan alltid väljas reella.

Ett uttryck av typ $e^{\lambda x}P(x)\cos\mu x$ eller $e^{\lambda x}P(x)\sin\mu x$ kallas exponentialmonom

Testövning 9.38 (Sid. 420)

Lösning

a) $y'''+y''-4y'-4y=2-4x.$

(1) $y'''+y''-4y'-4y=0 \Rightarrow r^3+r^2-4r-4=r^2(r+1)-4(r+1)=$

$=(r+1)(r^2-4)=(r+1)(r+2)(r-2)=0 \Leftrightarrow r=1 \vee r=\pm 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=e^{-x} \vee y=e^{-2x} \vee y=e^{2x} \Rightarrow y_h=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{2x}.$

(2) $y_P=ax+b \Rightarrow y_P'=a \Rightarrow y_P''=y_P'''=0.$

$y_P'''+y_P''-4y_P'-4y_P=-4a-4ax-4b=2-4x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4a=-4 \wedge -4a-4b=2 \Leftrightarrow a=1 \wedge b=-\frac{3}{2}.$

Resultat: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{2x}+x-\frac{3}{2}.$

b) $y'''-y''-2y'=4x+3$

(1) $y'''-y''-2y'=0 \Rightarrow r^3-r^2-2r=r(r^2-r-2)=r(r+1)(r-2)=$

$=0 \Leftrightarrow r=0 \vee r=-1 \vee r=+2 \Rightarrow y=1 \vee y=e^{x} \vee y=e^{2x}$

$\Rightarrow y_h=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}.$

(2) $y_P=x(ax+b)=ax^2+bx \Rightarrow y_P'=2ax+b \Rightarrow y_P''=2a \Rightarrow$

$\Rightarrow y_P'''-y_P''-2y_P'=-2a-2(2ax+b)=-4ax-2a-2b=$

$=4x+3 \Leftrightarrow -4a=4 \wedge -2a-2b=3 \Leftrightarrow a=-1 \wedge b=-\frac{1}{2}$

Resultat: $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}-x^2-\frac{1}{2}x.$

c) $y'''-y=e^x+\sin x$

(1) $y'''-y=0 \Leftrightarrow r^3-1=(r-1)(r^2+r+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1=1 \\ r_2=(-1-\sqrt{3}i)/2 \\ r_3=\overline{r_2} \end{cases}$

$\Rightarrow y_1 = e^x \vee y_2 = e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \vee y_3 = e^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$\Rightarrow y_h = C_1e^x + e^{-x/2}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$

(2) $\underline{y''' - y = e^x \; ; \; y_{P_1} \text{ sökes.}}$

e^x ingår i y_h (för $C_1=1, C_2=C_3=0$), så jag ansätter som partikulärlösning $y_{P_1} = Axe^x$.

$y_P''' - y_P = A(x+3)e^x - Axe^x = 3Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{3}$.

(2) $\underline{u''' - u = e^{ix} \; , \; y_{P_2} = \mathrm{Im}\, u_p \text{ sökes.}}$

$u_p = \; e^{ix} \Rightarrow u_p''' - u_p = -iAe^{ix} - Ae^{ix} = -(1+i)Ae^{ix} =$

$= e^{ix} \Leftrightarrow (1+i)A = -1 \Leftrightarrow 2A = -1+i \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}(-1+i) \Rightarrow$

$\Rightarrow u_{P_2} = \frac{1}{2}(-1+i)e^{ix} = \frac{1}{2}(-\cos x - \sin x + i(\cos x - \sin x) \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{P_2} = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x).$

<u>Resultat:</u> $y = (C_1 + \frac{x}{3})e^x + e^{-x/2}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$
$+ \frac{1}{2}(\cos x - \sin x).$

Övning 9.39 (Sid. 423)

Lösning

a) $y(x) = 1 + \int_0^x y(t)dt \Rightarrow y'(x) = y(x) \wedge y(0) = 1 \Rightarrow y = e^x$.

b) $x - 2 + y(x) = \int_x^2 y(t)^2 dt = -\int_2^x y(t)^2 dt \Rightarrow y(2) = 0 \wedge$

$\wedge\; 1 + y'(x) = -y(x)^2 \Leftrightarrow \underline{y' = -(y^2+1) \wedge y(2) = 0.}$

$\frac{dy}{y^2+1} = -dx \Rightarrow \int_0^y \frac{d\eta}{1+\eta^2} = -\int_2^x d\xi \Leftrightarrow \arctan y = 2 - x$

$\Leftrightarrow y = \tan(2-x);$

$-\frac{\pi}{2} < 2 - x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x - 2 < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2 - \frac{\pi}{2} < x < 2 + \frac{\pi}{2}.$

<u>Resultat:</u> $y = \tan(2-x)$, $2 - \pi/2 < x < 2 + \pi/2$.

Övning 9.40 (Sid. 423)

Lösning

$\int_0^x y(t)dt + (1+x^2)y(x) = 1$

(1) Sätt $x=0$ för att bestämma begynnelsevillkoret

$0 + y(0) = 1 \Leftrightarrow y(0) = 1.$

(2) Derivera ekvationen! $y(x) + 2xy(x) + (1+x^2)y'(x) =$

$= 0 \Leftrightarrow (1+x^2)y'(x) + (2x+1)y(x) = 0.$

(3) $\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{2x+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1})dx \Rightarrow \int_1^y \frac{d\eta}{\eta} =$

$= -\int_0^x (\frac{2\xi}{\xi^2+1} + \frac{1}{\xi^2+1})d\xi \Leftrightarrow \ln y = -\ln(x^2+1) - \mathrm{atn}\,x$

$\Leftrightarrow y = \exp\{\ln(x^2+1)^{-1} - \mathrm{atn}\,x\} \Rightarrow \underline{y = \frac{e^{-\mathrm{atn}\,x}}{x^2+1}}.$

Övning 9.41 (Sid. 423)

Lösning Se nästa sida.

(1) $y(x)=\cos x+\int_x^{\pi}\left(\int_0^t y(s)ds\right)dt \Rightarrow y(\pi)=-1;$

(2) $y'(x)=-\sin x-\int_0^x y(s)ds \Rightarrow y'(0)=0;$

(3) $y''(x)=-\cos x-y(x) \Leftrightarrow y''+y=-\cos x.$

(4) $y''+y=0 \Leftrightarrow y_h=C_1\cos x+C_2\sin x.$

(5) $y_P=Ax\sin x \Rightarrow y_P'=A\sin x+Ax\cos x \Rightarrow y_P''=2A\cos x-$

$-Ax\sin x=2A\cos x-y_P \Leftrightarrow y_P''+y_P=2A\cos x=-\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A=-\frac{1}{2} \Rightarrow y_P=-\frac{1}{2}x\sin x.$

(6) $y=C_1\cos x+(C_2-\frac{x}{2})\sin x \Rightarrow y(\pi)=-C_1\ ;\ y(\pi)=-1 \Rightarrow \underline{C_1=1.}$

$y=\cos x+(C_2-\frac{x}{2})\sin x \Rightarrow y'=-\sin x-\frac{1}{2}\sin x+(C_2-\frac{x}{2})\cos x$

$y'(0)=0 \Rightarrow \underline{C_2=0.}$

Resultat: $y=\cos x-\frac{1}{2}x\sin x.$

Övning 9.42 (Sid. 426)

Lösning

$y'-xy=x^3y^2 \Leftrightarrow \frac{y'-xy}{y^2}=x^3 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}y'-x\frac{1}{y}=x^3;$

$z=\frac{1}{y} \Rightarrow z'=-\frac{y'}{y^2} \Rightarrow -z'-xz=x^3 \Leftrightarrow z'+xz=-x^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=x \Rightarrow \mathcal{F}(x)=\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \mu(x)=e^{x^2/2}$ integr. faktor.

$(ze^{x^2/2})'=-x^3e^{x^2/2} \Rightarrow ze^{x^2/2}=-\int x^3e^{x^2/2}dx=[t=x^2/2]=$

$=-\int 2te^t dt=2(1-t)e^t+C=(2-x^2)e^{x^2/2}+C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=2-x^2+Ce^{x^2/2} \Leftrightarrow \underline{y=1/(Ce^{x^2/2}+2-x^2).}$

Övning 9.43 (Sid. 426)

Lösning

$x^2y'=3xy-2y^2 \Leftrightarrow y'=3\frac{y}{x}-2(\frac{y}{x})^2 \Rightarrow f(z)=3z-2z^2;$

(1) $y=xz \Rightarrow y'=xz'+z=3z-2z^2 \Leftrightarrow xz'=2(z-z^2);$

(2) $z-z^2=0 \Rightarrow z=0 \vee z=1 \Leftrightarrow \underline{y=0} \vee \underline{y=x.}$

(3) $z\neq 0,1 \Rightarrow \frac{dz}{z-z^2}=\frac{2}{x}dx \Rightarrow \int(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z})dz=2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\frac{z}{1-z}=$

$=\ln x^2+\ln C \Leftrightarrow \frac{z}{1-z}=Cx^2 \Leftrightarrow \frac{1-z}{z}=\frac{1}{Cx^2} \Leftrightarrow \frac{1}{z}-1=\frac{1}{Cx^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{z}=1+\frac{1}{Cx^2}=\frac{Cx^2+1}{Cx^2} \Leftrightarrow z=\frac{Cx^2}{Cx^2+1} \Leftrightarrow y=\frac{Cx^3}{Cx^2+1},\ C\in\mathbb{R}.$

Resultat: $y=x$ eller $y=\frac{Cx^3}{Cx^2+1},\ C\in\mathbb{R}.$

Övning 9.44 (Sid. 426)

Lösning

$\underline{x^2y''-2xy'+2y=2x^2,\ x>0.}$

Exempel 9.24 konsulteras.

$z''-z'-2z'+2z=2e^{2t} \Leftrightarrow \underline{z''-3z'+2z=2e^{2t}}$

(1) $z''-3z'+2z=0 \Leftrightarrow r^2-3r+2=0 \Leftrightarrow r=1 \vee r=2 \Leftrightarrow z=e^t$

$\vee\ z=e^{2t} \Rightarrow \underline{z_h=C_1e^t+C_2e^{2t},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.}$

(2) $z_p = Ate^{2t} \Rightarrow z_p' = A(1+2t)e^{2t} \Rightarrow z_p'' = A(4t+4)e^{2t}$;

$z_p'' - 3z_p' + 2z_p = A(4t+4-3-6t+2t)e^{2t} = Ae^{2t} = e^{2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 1 \Rightarrow z_p = te^{2t}$.

(3) $z = C_1e^t + (t+C_2)e^{2t} \Leftrightarrow \underline{y = C_1x + (C_2 + \ln x)x^2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$.

Testövning 9.48 (Sid. 437)

Lösning

$\underline{(1+x^2)y' - \sqrt{y}\ln x = 0,\ y(1) = 0.}$

(1) $y \equiv 0$ är faktiskt en lösning som uppfyller det givna bivillkoret.

(2) $\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx \Rightarrow \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx \Leftrightarrow \sqrt{y} = -\frac{\ln x}{2(x+1)} +$
$+ \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x(x+1)} = \frac{-\ln x}{2(x+1)} + \frac{1}{2}\int(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})dx = -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+1} + C$

$y(1) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2}(\ln\frac{x}{x+1} - \frac{\ln x}{x+1})$.

Resultat: $y = \frac{1}{4}(\ln\frac{x}{x+1} - \frac{\ln x}{x+1})^2$ eller $y = 0$.

Övning 9.49 (Sid. 437)

Lösning

$\underline{\cos x \cdot y'(x) + (2\sin x)y(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x},\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};\ y(0) = 1.}$

$y' + 2\frac{\sin x}{\cos x}y = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \Rightarrow f(x) = 2\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow F(x) = \ln(\cos x)^{-2}$

$\Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow (\frac{y}{\cos^2 x})' = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^4 x} \cdot \sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y}{\cos^2 x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\sin x dx = [t = \cos x] = \int \frac{t^2 - 1}{t^4}dt =$

$= \int(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4})dt = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C. \Rightarrow y(0) = -\frac{2}{3} + C;$

Resultat: $y = \frac{1}{3\cos x} - \cos x + \frac{5}{3}\cos^2 x$.

Övning 9.50 (Sid. 437)

Lösning

$\underline{y'' + 2y' + 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.}$

$r^2 + 2r + 3 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow y = e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x)$;

$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow y = e^{-x}(\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x)$;

$y'(x) = -y(x) + e^{-x}(-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x + \sqrt{2}C_2\cos\sqrt{2}x)$;

$y'(0) = 0 \Rightarrow -1 + \sqrt{2}C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = 1/\sqrt{2}$.

Resultat: $y = e^{-x}(\cos\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x)$.

Anm. $y''(0) = -2y'(0) - 3y(0) = -3 < 0 \Rightarrow$ lokalt maximum förekommer i $x = 0$.

Övning 9.51 (Sid. 438)

Lösning

$\underline{(x^3 + x^2 + x + 1)y'(x) - 2(x^2+1)y(x) = 2x + 2,\ x > -1.}$

$(x^2+1)(x+1)y'(x)+2(x^2+1)y(x)=2(x+1) \Leftrightarrow (x>-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y'(x)+\frac{2}{x+1}y(x)=\frac{2}{x^2+1} \Rightarrow f(x)=\frac{2}{x+1} \Rightarrow \mathcal{F}(x)=$

$=\ln(x+1)^2 \Rightarrow \mu(x)=e^{\mathcal{F}(x)}=(x+1)^2 \Rightarrow ((x+1)^2y(x))'=$

$=2\frac{(x+1)^2}{x^2+1}=2(1+\frac{2x}{x^2+1}) \Rightarrow (x+1)^2y(x)=2(x+\ln(x^2+1))+C$

$\Leftrightarrow y(x)=\frac{2(x+\ln(x^2+1)+C}{(x+1)^2} \Rightarrow y(0)=C$; $C=1$ alltså.

Svar: $y(x)=\frac{2(x+\ln(x^2+1))+1}{(x+1)^2}$.

Övning 9.52 (Sid. 438)

Lösning

$\underline{y''+2y'+y=x-\cos x;\quad y(0)=0,\ y'(0)=-1.}$

(1) $y''-2y'+y=0 \Leftrightarrow r^2+2r+1=0 \Leftrightarrow (r+1)^2=0 \Leftrightarrow r_1=-1=r_2$

$\Rightarrow y=e^{-x} \vee y=xe^{-x} \Rightarrow y_h=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}=\underline{(C_1+C_2x)e^{-x}}$.

(2) $\underline{y''+2y'+y=x;\ y_{P_1}}$ sökes.

$y_{P_1}=ax+b \Rightarrow y'_{P_1}=a \Rightarrow y''_{P_1}=0$;

$y''_{P_1}+2y'_{P_1}+y_{P_1}=2a+ax+b=ax+2a+b=x \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$;

(3) $\underline{y''+2y'+y=-\cos x;\ y_{P_2}}$ sökes.

$y_{P_2}=A\cos x+B\sin x \Rightarrow y'_{P_2}=-A\sin x+B\cos x \Rightarrow y''_{P_2}=-y_{P_2}$;

$y''_P+2y'_{P_2}+y_{P_2}=2y'_{P_2}=-2A\sin x+2B\cos x=-\cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow A=0 \wedge B=-\frac{1}{2} \Rightarrow y_{P_2}=-\frac{1}{2}\sin x$.

(4) $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+x-2-\frac{1}{2}\sin x$;

$y(0)=0 \Rightarrow C_1=2 \Rightarrow y=(2+C_2x)e^{-x}+x-2-\frac{1}{2}\sin x$;

$y'(x)=(C_2-2-C_2x)e^{-x}+1-\frac{1}{2}\cos x$;

$y'(0)=-1 \Rightarrow C_2-2+1-\frac{1}{2}=-1 \Leftrightarrow C_2=\frac{1}{2}$;

Resultat: $y=(2+\frac{1}{2}x)e^{-x}+x-2-\frac{1}{2}\sin x$.

Övning 9.53 (Sid. 438)

Lösning

$\underline{y'''-(a+2)y''+(2a+1)y'-ay=1.}$

(1) $\underline{y'''-(a+2)y''+(2a+1)y'-ay=0}$

$r^3-(a+2)r^2+(2a+1)r-a=(r-1)^2(r-a)=0$;

(2) $\underline{a=1} \Rightarrow r=r_1=r_2=r_3=1 \Rightarrow y_h=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x$

$y_{P_1}=A \Rightarrow y'''_{P_1}-3y''_{P_1}+3y'_{P_1}-y_{P_1}=-A=1 \Leftrightarrow A=-1$;

$\therefore y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x-1$.

(3) $\underline{a\neq1} \Rightarrow r=r_1=r_2=1 \wedge r=a \Rightarrow y_h=(A_1+A_2x)e^x+A_3e^{ax}$

$y_{P_2}=-\frac{1}{a}$ fås "by inspection" (med blotta ögat).

$\therefore y=(A_1+A_2x)e^x+A_3e^{ax}-1/a$.

Övning 9.54 (Sid. 438)

Lösning

(1) $y = y(t) =$ salthalten vid tiden t.

Salt in $= 5 l/min \cdot 0{,}02\, kg/l = 0{,}1\, kg/min$.

Salt ut $= 5 l/min \cdot 0{,}01 \cdot y\, kg/l = 0{,}05y\, kg/min$.

Nettoinflöde $= 0{,}1 - 0{,}05y = \frac{dy}{dt}$.

(2) $\underline{y' + 0{,}05y = 0{,}1 \,,\; y(0) = 0{,}01 \cdot 100 = 1}$.

$e^{0{,}05t}y' + 0{,}05 \cdot e^{0{,}05t}y = 0{,}1 e^{0{,}05t} \Leftrightarrow (ye^{0{,}05t})' =$

$= 0{,}1 \cdot e^{0{,}05t} \Leftrightarrow ye^{0{,}05t} = \frac{0{,}1}{0{,}05}e^{0{,}05t} + C \Leftrightarrow y(t) =$

$= 2 + Ce^{-0{,}05t}$; $y(0) = 1 \Rightarrow 2 + C = 1 \Leftrightarrow C = -1$.

(3) $y(t) = 2 - e^{-0{,}05t}$; $y(\tau) = 1{,}5 \Rightarrow 2 - e^{-0{,}05\tau} = 1{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}05\tau} = 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}05\tau = \ln 2 \Leftrightarrow \tau = 20\ln 2 = 13{,}9$.

Svar: Ca 14 minuter.

Övning 9.56

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$, $b = f(a)$

$x = 0 \Rightarrow \underline{y = f(a) - af'(\alpha) = \alpha(a + f(a))}$. $\underline{f(0) = 1}$.

$f(x) - xf'(x) = \alpha(x + f(x)) \Leftrightarrow \underline{xf'(x) + (\alpha - 1)f(x) = -\alpha x}$...