Komplex analys föreläsning 2.

* Derivata: $f'(c) = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(c+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.

Om c är en inre punkt i D_f.

OBS: f deriverbar $\Rightarrow$ f kontinuerlig

$$f(c+\Delta z) - f(c) = \underbrace{\frac{f(c+\Delta z) - f(c)}{\Delta z}}_{\to f'(c)} \underbrace{\Delta z}_{\to 0} \longrightarrow 0 \text{ då } \Delta z \to 0.$$

Med samma bevis som i reell analys får vi:

$(z^n)' = n z^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$ (ej i 0 om $n<0$).

och räknereglerna:

$$(f+g)' = f' + g'$$

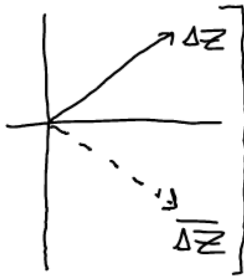
$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot g'(z).$$

Ex: $f(z) = \bar{z}$ är inte deriverbar någonstans:

$$\frac{f(c+\Delta z) - f(c)}{\Delta z} = \frac{\overline{c+\Delta z} - \bar{c}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \left[\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} \right.$$



$= e^{-2i\theta}$ saknar gränsvärde då $r \to 0$ och θ varierar fritt.

$\therefore$ $f'(c)$ existerar ej.

Cauchy-Riemanns ekvationer (C-R).

$$f = u + iv$$

Kan ha derivata i vår komplexa mening.

Kan ha partiella derivator som i flervariabeln: u'_x, u'_y, v'_x, v'_y.

Sats: Låt $c = a + ib$

(I) Om $f'(c)$ existerar, så existerar också u'_x, u'_y, v'_x, v'_y i (a,b) och

$$\underbrace{\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}}_{\text{Cauchy-Riemanns ekvationer.}}$$

(II) Omvänt: Om $u, v \in C^1$ (så att u'_x, u'_y, v'_x, v'_y är kontinuerliga) och Cauchy-Riemanns ekvationer gäller, så existerar $f'(c)$.

Dessutom:

III $\quad f' = u'_x + i v'_x \quad (= v'_y - i u'_y)$ när $f'(c)$ existerar.

Anmärkning: om $u, v \in C^1$ gäller alltså:

$$f'(c) \text{ existerar} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$ (Cauchy-Riemanns ekvationer är uppfyllda).

Bevis av I

Antag att $f'(c)$ existerar. Om $\Delta z = \Delta x$ får vi:

$$\underbrace{\frac{f(c+\Delta z) - f(c)}{\Delta z}}_{\xrightarrow{\text{Antagandet}} f'(c).} = \underbrace{\frac{u(a+\Delta x, b) - u(a,b)}{\Delta x}}_{\text{reellt.}} + i \underbrace{\frac{v(a+\Delta x, b) - v(a,b)}{\Delta x}}_{\text{reellt.}}$$

$\therefore$ Gränsvärdet till höger existerar.

$\therefore$ u'_x och v'_x existerar i (a,b).

$\therefore$ $f'(c) = u'_x(a,b) + i v'_x(a,b)$.

Om istället $\Delta z = i\Delta y$ får vi:

$$\underbrace{\frac{f(c+\Delta z) - f(c)}{\Delta z}}_{\to f'(c)} = \frac{u(a, b+\Delta y) - u(a,b)}{i\Delta y} + i \frac{v(a, b+\Delta y) - v(a,b)}{i\Delta y}$$

$$= -i\underbrace{\frac{u(a,b+\Delta y)-u(a,b)}{\Delta y}}_{\text{reellt.}} + \underbrace{\frac{v(a,b+\Delta y)-v(a,b)}{\Delta y}}_{\text{reellt.}}$$

P.s.s som tidigare får vi att $u'_y(a,b)$ och $v'_y(a,b)$ existerar och att: $f'(c) = v'_y(a,b) - i\,u'_y(a,b)$

Sammantaget: $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$ i (a,b) ∎

Bevis av II bygger på: $u,v \in C^1 \Rightarrow$ u,v differentierbara och detta ger resultatet (se Boken).

III har vi visat under I!

Ex: $f(z) = e^z = e^x e^{iy} = \underbrace{e^x \cos y}_{u} + i\underbrace{e^x \sin y}_{v.}$

$u,v \in C^1$ och:

$$u'_x = e^x \cos y \quad \vdots \quad v'_x = e^x \sin y$$
$$u'_y = -e^x \sin y \quad \vdots \quad v'_y = e^x \cos y$$

Så $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$ (Cauchy-Riemanns ekvationer är uppfyllda).

$\therefore$ $f'(z)$ existerar, och $f' = u'_x + iv'_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$.

$\therefore \frac{d}{dz} e^z = e^z$.

<u>Ex</u>: $f(z) = \bar{z} = x - iy = \underbrace{x}_{u} + i\underbrace{(-y)}_{v}$

$u'_x = 1$, $v'_x = 0$

$u'_y = 0$ $\quad v'_y = -1$

Så $u'_x \neq v'_y$ överallt!

$\therefore$ Cauchy-Riemanns ekvationer gäller ingenstans.

$\therefore$ f' existerar inte någonstans.

<u>Ex</u>: $f(z) = |z|^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{u} + i \cdot \underbrace{0}_{v}$.

$u, v \in C^1$, och $\begin{cases} u'_x = 2x, & u'_y = 2y \\ v'_x = 0, & v'_y = 0. \end{cases}$

Så $\quad$ C-R $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = -0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ och $y = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$\therefore$ $f'(z)$ existerar $\Leftrightarrow z = 0$ och $f'(0) = u'_x(0,0) + iv'_x(0,0) = 0$.

Analytiska funktioner. Harmoniska funktioner.

Def: Låt $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ vara en öppen mängd.
Vi säger att $f: \Omega \to \mathbb{C}$ är <u>analytisk</u> <u>i Ω</u>
om $f'(z)$ existerar $\forall z \in \Omega$.
Vi skriver $f \in A(\Omega)$.

Om $f \in A(\mathbb{C})$ säger vi att f är hel (analytisk)

Ex: $f(z) = e^z$ är hel; $f'(z) = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Ex: $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $f'(z) = -\dfrac{2z}{(z^2+1)^2} \quad \forall z \neq \pm i$

(OBS $z^2+1=0 \Leftrightarrow z = \pm i$)

$\therefore$ f är analytisk i $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$

Def: f sägs vara analytisk i z_0 om f är analytisk i någon öppen omgivning till z_0.

Åter till våra ex(empel):

- $f(z) = e^z$ analytisk i $\mathbb{C}$.
- $f(z) = \bar{z}$ inte deriverbar någonstans, därmed ej analytisk någonstans.
- $f(z) = |z|^2$ deriverbar endast i $z=0$, ej analytisk någonstans.

Vi ska senare i kursen se följande;

SATS: (Regularitet)
$f \in A(\Omega) \Rightarrow f \in C^\infty(\Omega)$, dvs $u, v \in C^\infty(\Omega)$.

SATS: (Entydighet)
Om $f, g \in A(\mathbb{C})$ och $f(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$
så är $f(z) = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Ex: Antag $f \in A(\mathbb{C})$ och att $f(x) = e^{ix} - x^2 + 2ix$ då $x \in \mathbb{R}$. Sätt $g(z) = e^{iz} - z^2 + 2iz$, $z \in \mathbb{C}$

då: $g \in A(\mathbb{C})$ (ty $g'(z) = ie^{iz} - 2z + 2i$, $z \in \mathbb{C}$).

och $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ $f(z) = g(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$

DVS $f(z) = e^{iz} - z^2 + 2iz$.

Låt $f \in A(\Omega)$ då: $u, v \in C^\infty(\Omega)$ och

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$ (Cauchy-Riemanns ekvationer).

Alltså

$$u''_{xx} = (u'_x)'_x \overset{C-R}{=} (v'_y)'_x \underset{v \in C^2}{=} (v'_x)'_y = (-u'_y)'_y = -u''_{yy}$$

$\therefore$ $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ P.s.s $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$.

Def: $h \in C^2(\Omega)$ sägs vara harmonisk i Ω om $\Delta h \overset{def}{=} h''_{xx} + h''_{yy} = 0$ i Ω.

$\therefore$ $f \in A(\Omega) \Rightarrow \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$ harmoniska i Ω.

Ex Bestäm alla hela $f(z)$ med realdel $u = 2xy + e^{-x}\cos y$.

Lösning:

Direkt uträkning ger $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, så det nödvändiga villkoret för att f ska finnas är uppfyllt. (Anmärkning: också tillräckligt i enkelt sammanhängande områden).

C-R: $\begin{cases} u'_x = v'_y & (1) \\ u'_y = -v'_x & (2) \end{cases}$ Bestäm v!

$(1) \Leftrightarrow v'_y = 2y - e^{-x}\cos y \Leftrightarrow v = y^2 - e^{-x}\sin y + g(x)$ ← reell.

insättning i (2):

$2x - e^{-x}\sin y = -e^{-x}\sin y - g'(x) \Leftrightarrow g'(x) = -2x \Leftrightarrow$

$g(x) = -x^2 + A$, $A \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $f = u + iv = 2xy + e^{-x}\cos y + i(y^2 - e^{-x}\sin y - x^2 + A)$

$f \in A(\mathbb{C})$, på realaxeln är $f = e^{-x} + i(-x^2 + A)$.

$\therefore$ $f(z) = \underbrace{e^{-z} + i(-z^2 + A)}_{\text{hel, rätt värden på realaxeln.}}$, $A \in \mathbb{R}$