Föreläsning 5, komplex analys

Komplexa integraler

Reell envariabel: $\int_a^b f(t)\,dt$, där $a, b \in \mathbb{R}$

och f är en reellvärd funktion.

Vi utvidgar nu i två steg:

(I) $f = u + iv$ komplexvärd.

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dt \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\int_a^b u(t)\,dt}_{} + i \underbrace{\int_a^b v(t)\,dt}_{} = I(u) + i\,I(v).$$

Vanliga, reellvärda integraler.

Då blir I i $\mathbb{C}$ linjär, dvs. $\begin{cases} I(f+g) = I(f) + I(g) \\ I(cf) = c\,I(f), & c \in \mathbb{C} \end{cases}$

Samt $\mathrm{Re}(I(f)) = I(u) = I(\mathrm{Re}(f))$

$\mathrm{Im}(I(f)) = I(v) = I(\mathrm{Im}(f))$

OBS: viktigt att integrations-variabeln är reell

Vidare $\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$ om $a \le b$

DVS: $|I(f)| \le I(|f|)$

Bevis: skriv $I(f)$ i polär form: $I(f) = re^{i\theta}$

där $r>0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Vi får: $|I(f)| = r = e^{-i\theta} I(f) = I(e^{-i\theta} f) = \mathrm{Re}(I(e^{-i\theta} f)) =$

$\mathbb{C}$-linjär

talet är reellt.

$= I(\mathrm{Re}(e^{-i\theta} f)) \leq I(|e^{-i\theta} f|) = I(|f|)$ $\blacksquare$

se ovan för räkneregler.

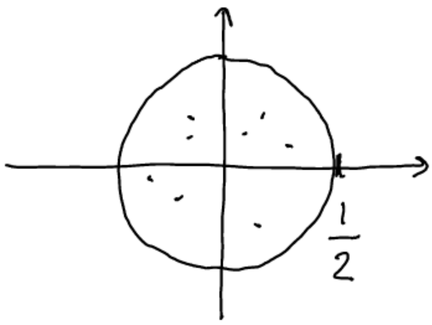
$|e^{-i\theta}| = 1$, ty $\theta \in \mathbb{R}$

$\mathrm{Re}(w) \leq |w|$

Ex: $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{it}\,dt = \left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{i\pi} - e^{0}}{i} = 2i$

Ex: $\displaystyle\left|\int_1^0 t e^{it^3}\,dt\right| \leq \int_0^1 |te^{it^3}|\,dt = \int_0^1 |t| = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$

Möjliga värden för ursprungsintegralen:



II Integration längs kurva i $\mathbb{C}$

Def: C sägs vara en C^1-kurva i $\mathbb{C}$ om kurvan C beskrivs av $z = z(t)$, $t: a \to b$, där $z' = \dfrac{dz}{dt}$ är kontinuerlig.

Vidare, C sägs vara styckvis C^1 om den är sammansatt av ändligt många C^1 kurvor.

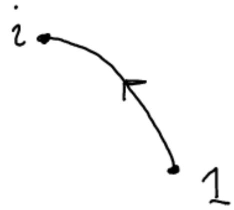
Def: (Komplex kurvintegral)

$$\int_C f(z)\,dz \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt$$

Anm: Oberoende av val av parametrisering.

Ex: Beräkna $\displaystyle\int_C (z-\bar{z})\,dz$ när

a)

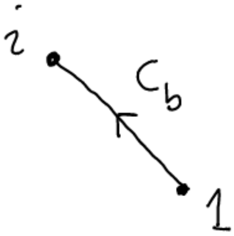


: $z = e^{it}$, $t: 0 \to \frac{\pi}{2}$ ger $z'(t) = ie^{it}$

så $$\int_{C_a} (z-\bar{z})\,dz = \int_0^{\pi/2} (e^{it} - e^{-it})\, i e^{it}\,dt = i\int_0^{\pi/2} (e^{2it} - 1)\,dt = \ldots = -1 - i\frac{\pi}{2}$$

---

b)



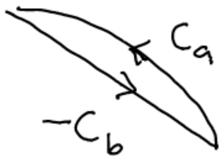
: $z = (1-t)\cdot 1 + ti$, $t: 0 \to 1$, $z'(t) = -1 + i$

$$\therefore \int_{C_b} (z-\bar{z})\,dz = \int_0^1 \Big[\big((1-t)+it\big)-\big((1-t)-it\big)\Big](-1+i)\,dt$$

$$= \int_0^1 (-2t-2it)\,dt = \ldots = -1-i.$$

Anmärkning: Vi ser alltså att $I_{(a)} \neq I_{(b)}$ "trots att" start och slutpunkter är samma.

Anmärkning:



$C = C_a - C_b$

$$\int_C (\ldots) = \int_{C_a} (\ldots) - \int_{C_b} (\ldots) = -i\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

Med $f = u+iv$ och $dz = dx+idy$ kan vi skriva

$$\int_C f\,dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \underbrace{\int_C u\,dx - v\,dy}_{} + i\underbrace{\int_C v\,dx + u\,dy}_{}$$

vanliga reella kurvintegraler.

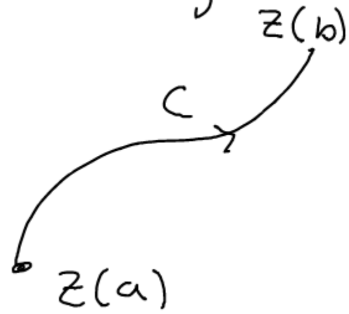
Sats: (ML-uppskattning)

Om f är kontinuerlig och C är styckvis C^1, så

$$\left|\int_C f\,dz\right| \leq M\cdot L, \text{ där } M = \max_C |f|,\ L = \text{längd}(C)$$

Bevis: låt $C: z = z(t),\ t: a \to b \qquad (a \le b)$

vara en parametrisering. Kurvan C är kompakt ty $[a,b]$ kompakt, så $M \overset{def}{=} \max_C |f|$ existerar ändligt.



Vidare: $L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$

$= \int_a^b |z'(t)|\, dt.$

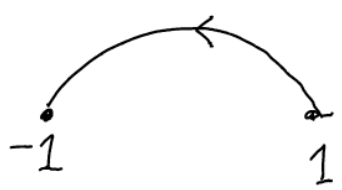
Vi får $\left| \int_C f\, dz \right| = \left| \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt \right| \le \int_a^b \underbrace{|f(z(t))|}_{\le M} |z'(t)|\, dt$

Enligt fall Ⅰ ovan $(a \le b)$

$\le M \int_a^b |z'(t)|\, dt = M \cdot L$

$\blacksquare$

Ex: Visa att $\left| \int_C \frac{e^{iz}}{z^2+3}\, dz \right| \le \frac{\pi}{2}$ där

C: 

, halvcirkel.

Bevis: uppskattning av integralen:

$|\text{täljaren}| = |e^{iz}| = [z = x + iy] = |e^{i(x+iy)}| = |e^{-y} \cdot \underbrace{e^{ix}}_{1 \text{ ty } x \in \mathbb{R}}|$

$= e^{-y} \leq 1$ på C, ty $y \geq 0$ där.

$|\text{nämnaren}| = |z^2+3| \geq \big||z^2| - 3\big| = |1-3| = 2$ på C

ty $|z| = 1$ där.

$\therefore$ $|\text{integranden}| \leq \frac{1}{2}$ på C

$$\therefore \quad \left| \int_C \frac{e^{iz}}{z^2+3}\, dz \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \text{längd}(C) = \frac{\pi}{2} \qquad \blacksquare$$

Sats: (om primitiv funktion finns)

Antag att $f \in C(\Omega)$ och att det finns F sådan att $\frac{dF}{dz} = f$ i Ω. Då gäller:

$$\int_C f\, dz = F(\text{slutpunkt}) - F(\text{startpunkt})$$ för alla styckvis C^1-kurvor i Ω.

Anmärkning:

Då blir $\int_C f\,dz$ oberoende av vägen

Anmärkning: Jämför med potential i vektoranalysen.

Bevis: Antag $C: z(t),\ t: a \to b,\ C^1$.

$$\int_C f\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t))\,dt.$$

$$\frac{dF}{dt} = f$$

$$= \Big[F(z(t))\Big]_{t=a}^{t=b} = F(z(b)) - F(z(a)) = F(\text{slutpunkt}) - F(\text{startpunkt})$$

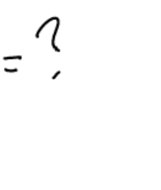
$\blacksquare$

<u>Ex</u>: $\int_C z\,dz$, då C:

Eftersom $\frac{d}{dz}\frac{z^2}{2} = z$ i hela $\mathbb{C}$, så

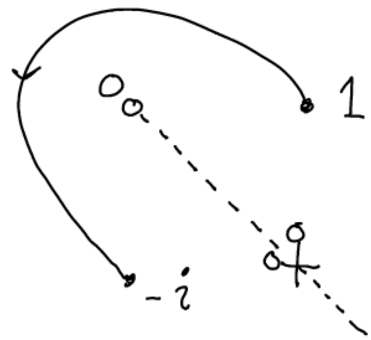
$$\int_C z\,dz = \frac{i^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \underline{\underline{-\frac{5}{2}}}.$$

<u>Ex</u>:



$\int_C z\cos z = ?$ Partiell integration!

Ex $\int_C \frac{1}{z}$, där



Vi vet att $\frac{d}{dz}\widetilde{\log}\, z = \frac{1}{z}$ för alla grenar till $\log z$.

Om vi väljer $\widetilde{\log}\, z = \ln|z| + i\,\theta(z)$ där $\frac{-\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}$

får vi: $\int_C \frac{1}{z} = \widetilde{\log}\, i - \widetilde{\log}\, 1 = i\,\frac{3\pi}{2} - i\cdot 0 = \frac{3\pi}{2} i.$

Sats: (Greens formel).

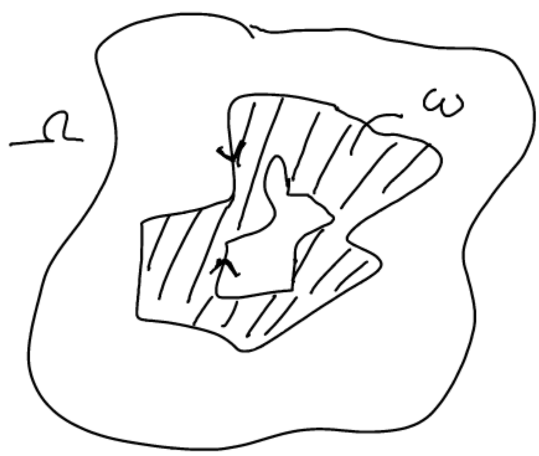
Om $P, Q \in C^1(\Omega)$, så

$$\int_{\partial\omega} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\omega} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$ där ω är en

begränsad öppen mängd, $\overline{\omega} \overset{def}{=} \omega \cup \partial\omega \subseteq \Omega$

och randen $\partial\omega$ består av ändligt många styckvis C^1 kurvor med positiv orientering.

Bevis: P-B Grön, kap 9.2.



Cauchys integralsats

Om $f \in A(\Omega) \cap C^1(\Omega)$

så $\displaystyle\int_{\partial\omega} f\,dz = 0 \quad \forall \omega$ i Ω.

Bevis: Greens formel ger:

Green

$$\int_{\partial\omega} f\,dz = \int_{\partial\omega} u\,dx - v\,dy + i\int_{\partial\omega} v\,dx + u\,dy = \iint_{\omega} (\underbrace{-v'_x - u'_y}_{=0})\,dx\,dy$$

$$+\, i\iint_{\omega} (\underbrace{u'_x - v'_y}_{=0})\,dx\,dy$$

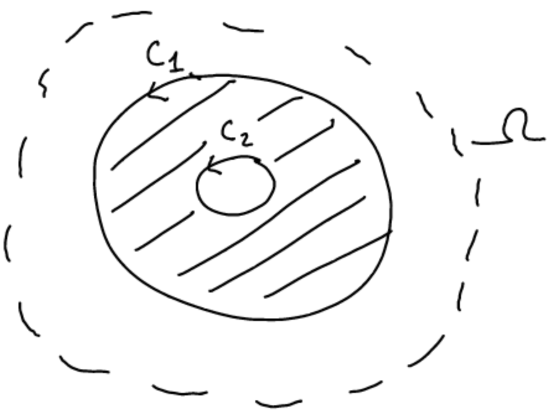
Cauchy-Riemanns ekvationer.

$= 0$

$\blacksquare$

Två viktiga specialfall:

$$f \in A(\Omega) \Rightarrow \int_C f\,dz = 0$$



$$f \in A(\Omega) \Rightarrow \int_{C_1} f\,dz = \int_{C_2} f\,dz.$$

$$\partial \omega = C_1 - C_2 .$$

Så $\int_{C_1 - C_2} f\,dz$ dvs $\int_{C_1} f\,dz = \int_{C_2} f\,dz .$