Föreläsning 8, komplex analys

Från föreläsning 7:

- Om $c_0, c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{C}$ är givna och $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ då $|z|<R$ ← seriens konvergensradie

så är f analytisk i skivan $|z|<R$.

- Om f är analytisk (åtminstone) i skivan $|z|<r$, så finns $c_0, c_1, \ldots \in \mathbb{C}$, sådana att $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ då $|z|<r$, och potensserien (kallad Maclaurinserie) har konvergensradie $R \geq r$.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(s)}{s^{n+1}} \, ds \overset{\text{C.I.F}}{=} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Laurentserier

Betrakta nu serier av typen

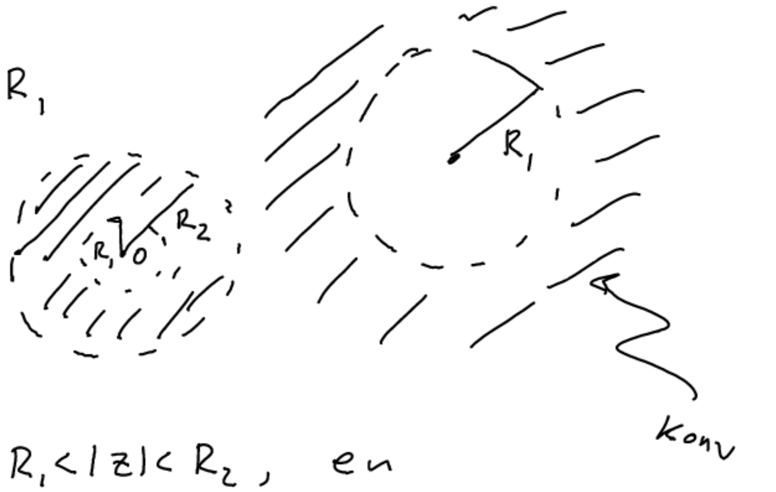
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n}_{\text{I}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}}_{\text{II}}$$

I: vanlig potensserie, konvergent i $|z|<R_2$, för något R_2

II: med $w = \frac{1}{z}$ är detta en potensserie

$\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} w^k$, konvergent i $|w|<\rho$ för något ρ

dvs i $|z| > \frac{1}{\rho} = R_1$



Om $R_1 < R_2$ är därför

$$f(z) \overset{def}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad R_1 < |z| < R_2, \text{ en}$$

analytisk funktion som får deriveras termvis.

SATS: Om f är analytisk (åtminstone) i $r_1 < |z| < r_2$, där $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$, så finns tal $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ sådana att

$$(*) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad r_1 < |z| < r_2,$$

där $c_n = \int_{C_\rho} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds$, $r_1 < \rho < r_2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Serien i $(*)$ kallas f:s Laurentserie i $r_1 < |z| < r_2$ och konvergerar åtminstone i denna ring.

Följdsats: (Cauchys olikheter)

$$|c_n| \le \frac{\max_{|s|=\rho} |f(s)|}{\rho^n}, \quad r_1 < \rho < r_2, \quad n \in \mathbb{Z}$$

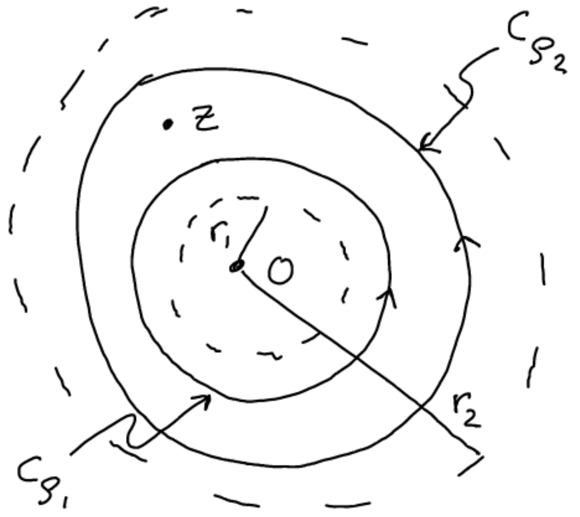
Bevis: ML-uppskattning.

Bevisskiss av sats:

Fixera z i ringen: $r_1<|z|<r_2$.

Tag sedan ρ_1 och ρ_2 sådana att $r_1<\rho_1<|z|<\rho_2<r_2$.

C.I.F på ringen $\omega=\{s\in\mathbb{C}: \rho_1<|s|<\rho_2\}$, med rand $\partial\omega = C_{\rho_2}-C_{\rho_1}$ ger:



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega}\frac{f(s)}{s-z}=\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_2}}\frac{f(s)}{s-z}ds}_{\text{I}}-\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_1}}\frac{f(s)}{s-z}ds}_{\text{II}}$$

I: ger precis som för Maclaurinserier $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

II: ger analogt:

$$-\frac{1}{s-z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\frac{s}{z}}_{\substack{\text{belopp}\\<1}}}$$, utveckling i avhuggen geometrisk serie.

(Detaljer, se boken)

Koefficienterna $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(s)}{s^{n+1}}ds$, där

$\rho=\rho_2$ om $n\geq 0$, $\rho=\rho_1$ om $n<0$

men C.I.S $\Rightarrow$ vilket ρ som helst, $r_1<\rho<r_2$ ger samma integral.

Så c_n oberoende av z.

$\therefore$ $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, $r_1<|z|<r_2$

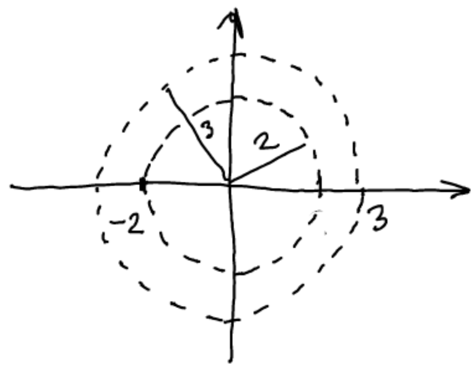
Ex: $f(z)=e^{1/z}$. Vet att $e^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}$, alla $w\in\mathbb{C}$.

, så med $w=\frac{1}{z}$ får vi:

$$e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\dots,\quad 0<|z|.$$

Laurentserien för f i $0<|z|$.

Ex: $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z-3)}$



Laurentutveckla i

a) $|z|<2$

b) $2<|z|<3$

c) $3<|z|$

Lösning:

a) Maclaurinserie!

b): $f(z)=\dfrac{\frac{-1}{5}}{z+2}+\dfrac{\frac{1}{5}}{z-3}=\dfrac{-1}{5z}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{2}{z}}-\dfrac{1}{5\cdot 3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{3}}$

$2<|z|<3$ belopp <1 belopp <1

$$=\left[\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n,\quad |q|<1\right]=\frac{-1}{5z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$$

$$=\frac{-1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n},\qquad 2<|z|<3$$

c) $f(z) = \dfrac{-2}{5z} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{2}{z}} + \dfrac{1}{5z} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{3}{z}}$

$|z|>3$

belopp<1 belopp<1

$= \ldots = \dfrac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n - (-2)^n}{z^{n+1}}, \quad |z|>3$

geom serie

Anmärkning: Laurentserier i områden av typen $r_1 < |z-z_0| < r_2$: byt variabel, $w = z - z_0$.

Följder av Cauchys olikheter, $|c_n| \leq \dfrac{\max_{|s|=\rho} |f(s)|}{\rho^n}$

Liouvilles sats! Om $f \in A(\mathbb{C})$ är begränsad, så är f konstant.

Bevis: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad R = \infty$

Om $|f| \leq M$ ger Cauchys olikheter:

$\underbrace{|c_n|}_{\text{konstant oberoende av } \rho} \leq \dfrac{M}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \rho < \infty$

Fixera $n \geq 1$ och låt $\rho \to \infty$. Eftersom $\dfrac{M}{\rho^n} \to 0$ får vi $c_n = 0$, $n \geq 1$.

$\therefore$ $f(z) = c_0$, alla z, alltså konstant.

$\blacksquare$

Algebrans fundamentalsats.

Varje polynom $p(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$, där $n \geq 1$ har (minst) ett nollställe i $\mathbb{C}$.

Bevis: Antag motsatsen, dvs att $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Sätt $f(z) = \frac{1}{p(z)}$. Då: $f \in A(\mathbb{C})$ och eftersom

$$\left| \frac{p(z)}{z^n} \right| \to |c_n| > 0 \quad \text{då } |z| \to +\infty$$

finns det ett R sådant att $|p(z)| \geq \frac{|c_n|}{2} |z|^n \geq \frac{|c_n|}{2} R^n$ då $|z| \geq R$.

$\therefore \; |f(z)| \leq \frac{2}{|c_n| \cdot R^n}$ då $|z| \geq R$.

men f är kontinuerlig på $|z| \leq R$, kompakt, så $|f|$ är begränsad även där!

$\therefore$ f begränsad i $\mathbb{C}$, dvs $\exists M$ så att $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\therefore$ Liouville $\Rightarrow$ f konstant $\Rightarrow$ p konstant!

Motsägelse

$\therefore$ p har komplext nollställe.

$\blacksquare$

Följd:

$\exists\, z_1, \ldots, z_n$ sådana att

$$p(z) = c_n (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n) \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

nollställen till $p(z)$

Nollställen till analytiska funktioner

SATS: Antag att f är analytisk i $|z| < r$ och att $f(0) = 0$.

Då gäller antigen.

1) $f(z) = 0 \quad \forall z, \ |z| < r$

eller

2) $f(z) \neq 0 \quad \forall z$ i någon punkterad skiva $0 < |z| < \rho$, dvs

nollstället är isolerat.

Bevis (skiss): $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ , \quad |z| < r$

eftersom $f(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$.

Två fall:

1) Alla $c_n = 0$. Trivialt $f(z) = 0 \quad \forall z : |z| < r$

2) $\exists$ en första koefficient $c_N \neq 0$. Då är

$$f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} c_n z^n = z^N \underbrace{(\underbrace{c_N}_{\neq 0} + c_{n+1} z + \ldots)}_{g(z),\ \text{samma } R \text{ som serien för } f.}$$

Speciellt är g kontinuerlig.

$g(0) = C_N \neq 0$, så $\exists \rho > 0$ sådan att

$g(z) \neq 0 \quad \forall z : |z| < \rho$

$\therefore \; f(z) = z^N g(z) \neq 0$ i $0 < |z| < \rho$

$\blacksquare$

Def: Om f är analytisk i z_0 så sägs f ha nollställe av multiplicitet N i z_0 om

$$f(z) = (z - z_0)^N g(z)$$

För någon funktion g som är analytisk i z_0 och uppfyller $g(z_0) \neq 0$.

Anmärkning: $\Leftrightarrow f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ \ldots,\ f^{(N-1)}(z_0) = 0,\ f^{(N)}(z_0) \neq 0.$