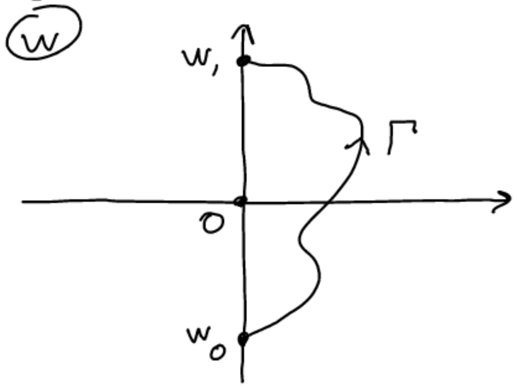
Föreläsning 12, komplex analys

Argumentprincipen

Argumenttillskott längs kurvor



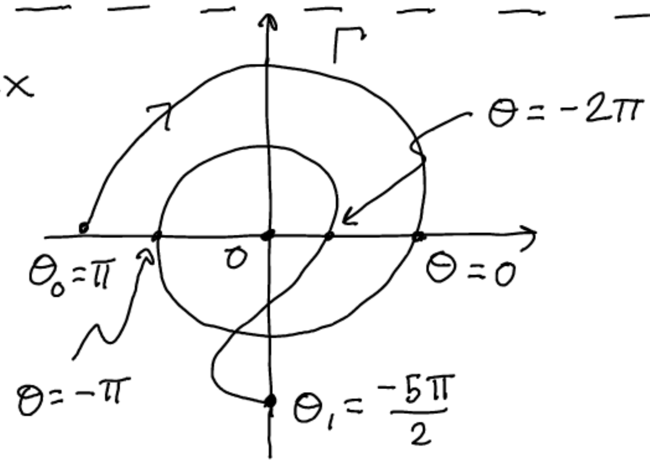
Startpunkt: $\theta_0 = \frac{-\pi}{2}$ (eller $\frac{3\pi}{2}$) är ett argument för w_0.

θ varierar kontinuerligt längs Γ.

Slutpunkt: $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ för w_1 $\left(\frac{5\pi}{2}\right)$

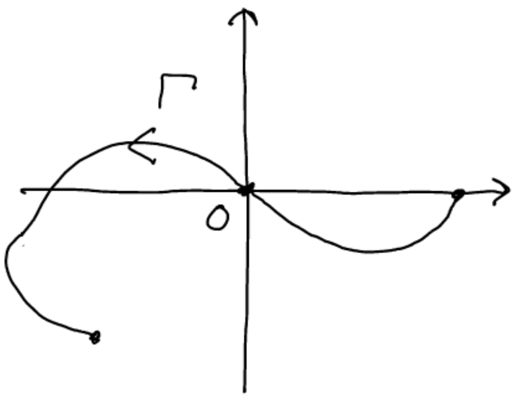
Argumenttillskottet $\Delta_\Gamma \arg w \overset{\text{def}}{=} \theta_1 - \theta_0 = \pi$

Ex



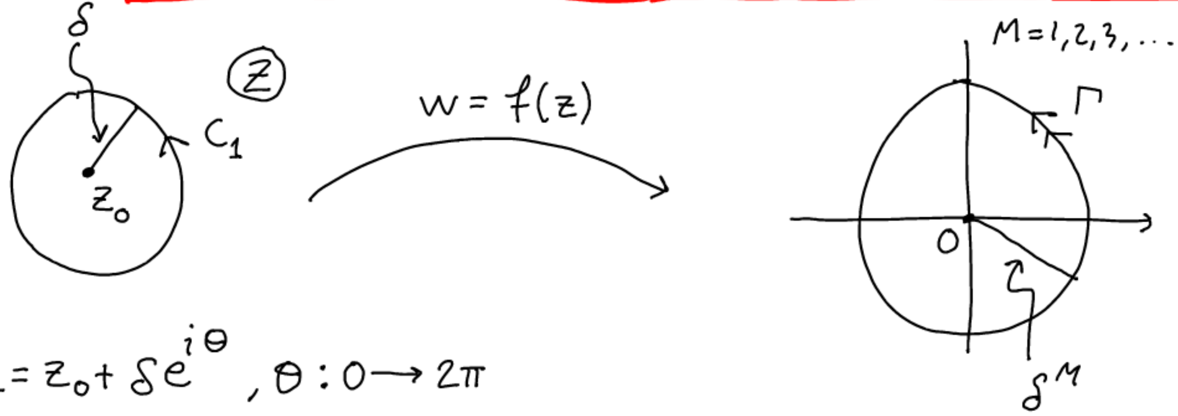
$\Delta_\Gamma \arg w = \frac{-7\pi}{2}$

Ex



$\Delta_\Gamma \arg w$ är odefinerat ty $\arg 0$ är odefinerat $(0 \in \Gamma)$

Små cirklar runt nollställen och poler



$z = z_0 + \delta e^{i\theta}$, $\theta : 0 \to 2\pi$

$f(z) = (z - z_0)^M = \delta^M e^{iM\theta}$

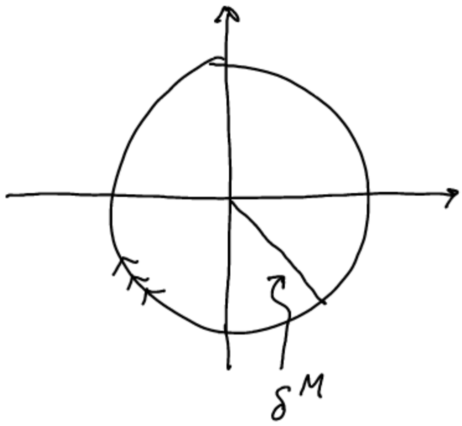
där $M\theta$ går från

0 till $M \cdot 2\pi$.

(Nollställe av multiplicitet M)

Vi går M varv i positiv led runt origo.

Vi går −M varv i negativ led runt origo.



$M = -1, -2, -3, \ldots$

(pol av ordning −M)

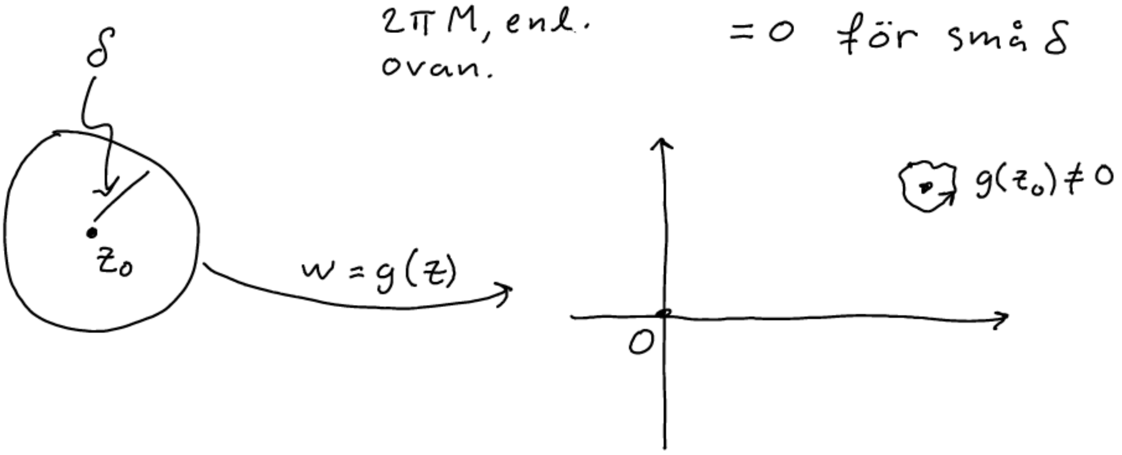
I båda fallen:

$\Delta_C \arg f(z) = \Delta_\Gamma \arg w = 2\pi M$

Allmänt: Om f har isolerat nollställe eller pol i z_0 så är $f(z) = (z - z_0)^M g(z)$ för något heltal M.
($M > 0$: Nollställe; $M < 0$: pol) och någon funktion g som är analytisk i z_0 och skild från 0 där

Vi får nu:

$$\Delta_C \arg f(z) = \underbrace{\Delta_C \arg (z-z_0)^M}_{2\pi M,\ \text{enl. ovan.}} + \underbrace{\Delta_C \arg (g(z))}_{=0 \text{ för små } \delta}$$



$\therefore\ \Delta_C \arg f(z) = 2\pi M$ även nu!

SATS: (Argumentprincipen)

Om f är analytisk på och innanför C, enkel, sluten, styckvis C^1, positivt orienterad, utom möjligen i poler innanför C, så gäller

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = \#\text{nollställen} - \#\text{poler för } f \text{ innanför } C,$$

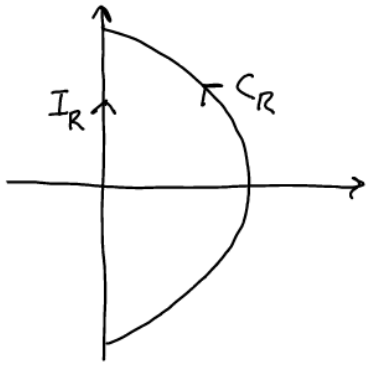
räknade med multipliciteter/ordningar.

Beviset bygger på residysatsen tillämpad på f'/f

<u>Ex</u>: Hur många nollställen har $p(z) = z^4 + iz^2 + 2z - 1$ då $\operatorname{Re} z > 0$?

Lösning:

Använd argumentprincipen på kurvorna $C_R - I_R$



Undersök $\Delta_{C_R} \arg p(z)$ och $\Delta_{I_R} \arg p(z)$!

C_R: $p(z) = z^4 + iz^2 + 2z - 1 = z^4\left(1 + \frac{i}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^4}\right)$, så

$$\Delta_{C_R} \arg p(z) = \underbrace{\Delta_{C_R} \arg z^4}_{\substack{4\Delta_{C_R}\arg z \\ = 4\pi}} + \underbrace{\Delta_{C_R} \arg \underbrace{\left(1 + \frac{i}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^4}\right)}_{\to 1 \text{ då } |z| \to \infty}}_{\to 0 \text{ då } R \to \infty}$$

$\to 4\pi$ då $R \to \infty$

I_R: $z = iy$ ger $p(z) = p(iy) = y^4 - iy^2 + 2iy - 1 =$

$= \underbrace{(y^4 - 1)}_{u} + i\underbrace{(2y - y^2)}_{v}$, $y \in \mathbb{R}$

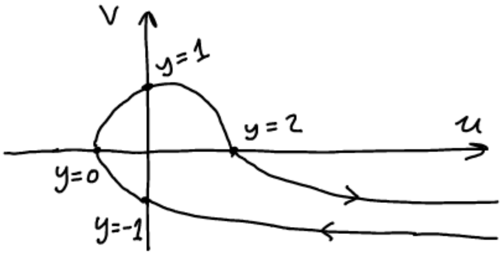
Teckenstudium och kvadrantvandring:

$u = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1 \quad (y \in \mathbb{R})$

$v = 0 \Leftrightarrow y = 0$ eller $y = 2$.

y		-1		0		1		2	
u	+	0	−	−	−	0	+ +	+	+
v	−	−	−	0	+	+	+ +	0	− −
Kvadrant	4		3		2		1		4

Dessutom $\frac{v}{u} \to 0$ då $y \to \pm\infty$ ("u drar mer än v")



$\therefore \Delta_{I_R} \arg p(z) \longrightarrow -2\pi$ då $R \to \infty$

$\therefore$ Argumentprincipen ger $\# \text{nollställen} - \underbrace{\# \text{poler}}_{=0} =$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R - I_R} \arg p(z) = \frac{1}{2\pi}\big(4\pi - (-2\pi)\big) = 3$$

$\therefore$ 3 nollställen i $\operatorname{Re} z > 0$.

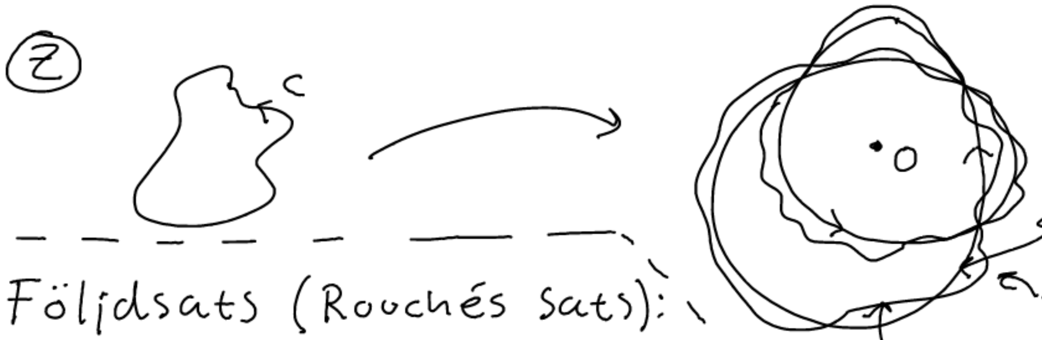
Rouchés sats

$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = \#$ varv runt 0, med tecken

sluten, enkel, etc.

som kurvan $w = f(z)$ gör =

$= \#$ nollställen $- \#$ poler för f innanför C.



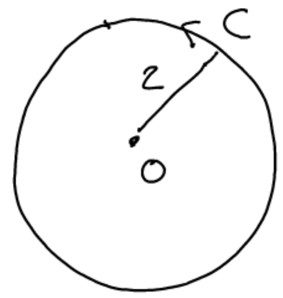
Följdsats (Rouchés sats):

Om C är enkel, sluten, styckvis C^1 positivt orienterad, f, g analytiska på och innanför C så har f och $f+g$ samma antal nollställen innanför C.

$w = f(z) + g(z)$, hund där $|g(z)| < |f(z)|$ $\forall z \in C$, $g(z)$ kopplet.

<u>Ex</u>: Bestäm antalet nollställen som

$p(z) = z^5 - 3z^3 + z^2 - 1$ har i området $|z| < 2$



Lösning: Sätt $f(z) = z^5$ och $g(z) = -3z^3 + z^2 - 1$

då $|z| = 2$ får vi $|f(z)| = |z^5| = |z|^5 = 2^5 = 32$

och $|g(z)| = |-3z^3 + z^2 - 1| \leq 3|z|^3 + |z|^2 + 1 = 29$

så $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in C$

Rouché $\Rightarrow$ f och $\underbrace{f+g}_{p}$ har samma antal nollställen

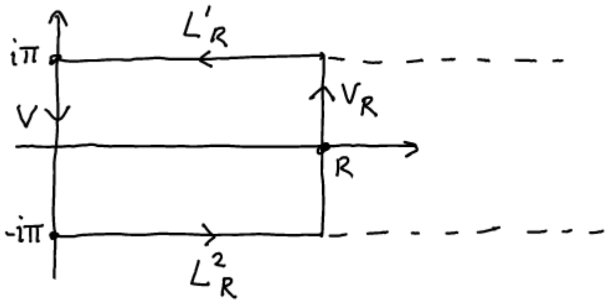
i $|z| < 2$, dvs 5. (ty z^5 har 5 nollställen i origo.)

Svar: 5.

<u>Ex</u>: Hur många nollställen har $f(z) = z - e^z$ i

halvremsan $\operatorname{Re} z > 0$, $|\operatorname{Im} z| < \pi$?

Lösning:



$$f(z) = z - e^z = (x+iy) - e^x(\cos y + i \sin y) = \underbrace{(x - e^x \cos y)}_{u} + i\underbrace{(y - e^x \sin y)}_{v}$$

$z = x + iy$

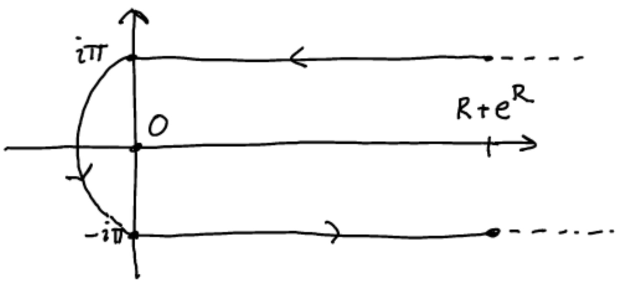
$L_R^1: y=R, x: R \to 0$; $\begin{cases} u = x+e^x, & \text{strängt växande} \\ v = \pi \end{cases}$

$V: x=0, y: \underset{\text{OBS}}{\underline{\underline{\pi \to -\pi}}}$; $\begin{cases} u = -\cos y \\ v = y - \sin y \end{cases}$

y	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
u	1	$+$	0	$-$	0	$+$	1
v	$-\pi$	?	$-$	?	$+$	?	π

$L_R^2: y=-\pi, x: 0 \to R$; $\begin{cases} u = x+e^x, & \text{strängt växande} \\ v = -\pi \end{cases}$

Dessa 3 bitar i följd



$\therefore \Delta_{L_R^1+V+L_R^2} \arg f(z) \longrightarrow 2\pi$ då $R \to \infty$

Återstår V_R: $\Delta_{V_R} \arg(z-e^z) = \Delta_{V_R} \arg\left(e^z\left(\frac{z}{e^z}-1\right)\right) =$

$$= \underbrace{\Delta_{V_R} \underbrace{\arg e^z}_{y}}_{=2\pi} + \underbrace{\Delta_{V_R} \arg\underbrace{\left(\frac{z}{e^z}-1\right)}_{\to 1}}_{\to 0} \longrightarrow 2\pi \text{ då } R\to\infty \text{ ty } |z| \leq R+\pi \text{ på } V_R.$$

$|e^z| = e^x = e^R$ på V_R, så $\left|\frac{z}{e^z}\right| \leq \frac{R+\pi}{e^R} \longrightarrow 0$ då $R \to \infty$

$\therefore \quad \frac{1}{2\pi} \Delta_{L_R^1 + V + L_R^2 + V_R} \arg(z - e^z) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}(2\pi + 2\pi) = 2$ då $R \to \infty$.

Poler saknas, så # nollställen i halvremsan är $\underline{\underline{2}}$