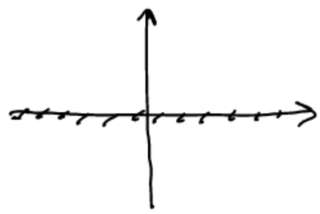
Föreläsning 9, komplex analys

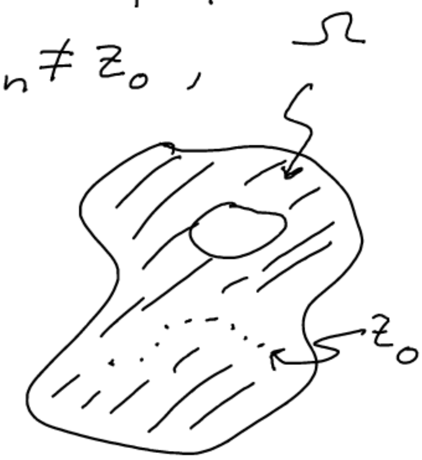
Entydighetssatsen för analytiska funktioner

Tidigt i kursen formulerade vi: Om $f, g \in A(\mathbb{C})$ och $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, så är $f(z) = g(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

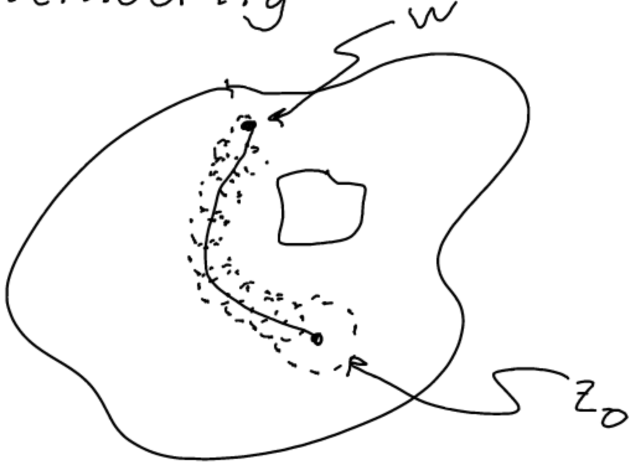


Sats (Entydighet):
Om $f, g \in \Omega$, där Ω är sammanhängande och $f(z_n) = g(z_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ för någon följd $z_n \in \Omega$, för vilken $z_n \to z_0 \in \Omega$, $z_n \neq z_0$, i så fall så är $f(z) = g(z)$ $\forall z \in \Omega$.

Anmärkning: z_0 kallas hopningspunkt till följden $z_1, z_2, \ldots$



Bevis: Sätt $h = f - g$.
Då gäller: $h \in A(\Omega)$, $h(z_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ och eftersom h är kontinuerlig gäller även $h(z_0) = 0$



Men nollstället z_0 ej isolerat, så $h=0$ i en hel skiva runt z_0.

Med samma resonemang som för maximum-principen får vi $h=0$ i Ω

$\blacksquare$

Ex: Vi vet att $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Sätt $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$, $g(z) = 1$, $f, g \in A(\mathbb{C})$

$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore \; f(z) = g(z), \; \forall z \in \mathbb{C}$

dvs $\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \; \forall z \in \mathbb{C}$.

Ex: Antag $f \in A(\Omega)$, $\Omega : |z| < 1$.

och $f(\frac{i}{n}) = e^{1/n}$, $n = 2, 3, \ldots$

Med $z_n = \frac{i}{n}$ får vi $z_n \to 0 \in \Omega$

Sätt $g(z) = e^{-iz}$. Då får vi $f, g \in A(\Omega)$,

$f(z_n) = g(z_n)$ då $n = 2, 3, \ldots$

$\therefore$ Entydighetssatsen $\Rightarrow f = g$ i hela Ω

dvs $f(z) = \underline{\underline{e^{-iz}}}$

Singulariteter

Def: En singularitet för f om:

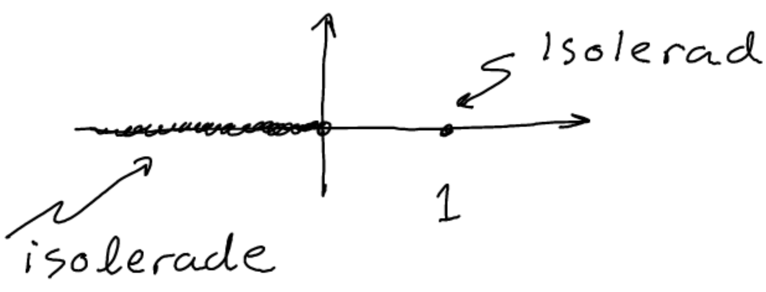
- f ej är analytisk i z_0

och

- f är analytisk i någon punkt till varje omgivning till z_0.

Singulariteten kallas <u>isolerad</u> om f är analytisk i $0<|z-z_0|<\delta$ för något $\delta>0$.

<u>Ex</u>: $f(z)=\dfrac{e^z}{\operatorname{Log} z}$



$\operatorname{Log} z$ ej analytisk då $z=x\le 0$ (Ej ens def i $z=0$)

$\operatorname{Log} z=0 \Leftrightarrow z=1$.

Antag att f har isolerad singularitet i z_0.
då har f Laurentserie

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, $0<|z-z_0|<\delta$ för något

$\delta>0$

och
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=\underbrace{\left(c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\dots\right)}_{\text{snäll del}}+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\dots\right)}_{\text{"stygg" del.}}$$

Singulariteten sägs vara:

- **hävbar** om $c_n = 0 \quad \forall n < 0$, dvs om

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad 0 < |z-z_0| < \delta$$

Om vi sätter $f(z_0) \overset{\text{def}}{=} c_0$ så blir f analytisk i $|z-z_0| < \delta$

- **En pol av ordning N** om $C_n = 0, \forall n < -N$ och $C_{-N} \neq 0$

dvs $f(z) = \dfrac{C_{-N}}{(z-z_0)^N} + \dots + \dfrac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + \dots$

$= \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^N}$, där $g(z) = \underbrace{C_{-N}}_{\neq 0} + C_{-N+1}(z-z_0) + \dots$

där med är $g(z_0) \overset{\text{def}}{=} C_{-N}$, g är analytisk i $|z-z_0| < \delta$ och $g(z_0) \neq 0$

- **Väsentlig** annars, dvs om oändligt många av $C_{-1}, C_{-2}, \dots$ är $\neq 0$.

jämför med definition av nollställe:

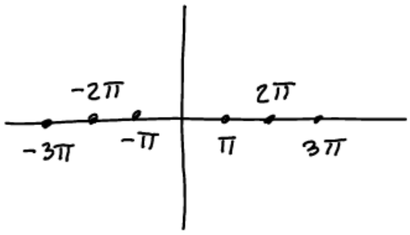
$f(z) = (z-z_0)^N g(z)$ där g är analytisk i z_0 och $g(z_0) \neq 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ har nollställe av multiplicitet } N \text{ i } z_0 \\ \Leftrightarrow 1/f \text{ har pol av ordning } N \text{ i } z_0 \end{array}}$$

Ex: $f(z) = \dfrac{1}{\sin z} - \dfrac{1}{z}$

$\sin z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Leftrightarrow 2iz = \log 1 = i2\pi n \Leftrightarrow z = n\pi \,, n \in \mathbb{Z}$

$z = 0 \Leftrightarrow z = 0$



$\therefore$ isolerade singulariteter:

$z = n\pi \,, n \in \mathbb{Z}$

Nära $z = 0$: $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z \sin z} =$ ML-utveckling

$= \dfrac{z^3/6 + O(z^5)}{z^2 + O(z^4)} = z \cdot \dfrac{1/6 + O(z^2)}{1 + O(z^2)}$

Analytisk i origo, $\neq 0$ i 0

$\therefore$ f har hävbar singularitet i $z = 0$

med $f(0) \overset{def}{=} 0$, blir f analytisk i $z = 0$ (f har enkelt nollställe i 0)

nära $z = n\pi \,, n \neq 0$:

$f(z) = \dfrac{1}{\sin z} - \dfrac{1}{z}$

analytisk i $n\pi$, $n \neq 0$

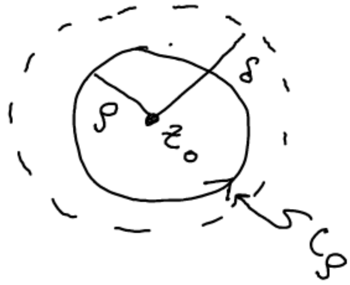
Eftersom $\sin z$ har enkelt nollställe i $z = n\pi$

($g(z) = \sin z \Rightarrow g(n\pi) = 0$, $g'(n\pi) = \cos n\pi = (-1)^n \neq 0$)

har därmed $\dfrac{1}{\sin z}$ och därmed $f(z)$ enkelpol där.

Residyer

Antag att f har isolerad singularitet i z_0, så att $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$



$0 < |z-z_0| < \delta$

där

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds \quad , \; 0 < \rho < \delta$$

specialfallet $n=-1$ ger

alltså $\int_{C_\rho} f(s)\, ds = 2\pi i\, C_{-1}$

Def: Residyn för f i z_0,

$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1}$, koefficient för $\frac{1}{z-z_0}$ i

Laurentserien för f $0 < |z-z_0| < \delta$

Ex: $\operatorname{Res}_{z=0} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$, singulär i $z=0$

$=$ koefficienten för $\frac{1}{z}$ i Laurentserien kring 0.

$\sin w = w - \frac{w^3}{6} + \frac{w^5}{120} - \dots$ konvergerar $\forall w \in \mathbb{C}$

med $w = \frac{1}{z}$ då $z \neq 0$ får vi:

$$f(z) = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z^5} - \dots\right) = z - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{z^3} - \dots, \; 0<|z|$$

$$\therefore \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \underline{\underline{\frac{-1}{6}}}$$

(så t.ex. $\displaystyle\oint_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{-\pi i}{3}$)

I poler kan man använda följande för att beräkna residyer.

- Om $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^N}$, g analytisk i z_0, $N = 1, 2, \dots$

(t.ex. om f har pol av ordning N i z_0)

så ger Taylorutveckling:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad \text{i någon skiva } |z-z_0| < \delta$$

och därmed

endast $n = N-1$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) =$$

$$= \frac{g^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\underbrace{\left((z-z_0)^N f(z)\right)}_{g(z)}$$

Viktiga specialfall

- $N=1$: $f(z)=\dfrac{g(z)}{z-z_0}$, $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = g(z_0)$

- $N=2$ $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^2}$, $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = g'(z_0)$

- $N=3$ $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^3}$, $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{1}{2!}g''(z_0)$

$\vdots$

Om $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ där p, q är analytiska i z_0,

q har enkelt nollställe, så

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Bevis:

$$q(z) = \underbrace{q(z_0)}_{=0} + q'(z_0)(z-z_0) + \mathcal{O}((z-z_0)^2)$$

Taylor

så $(z-z_0)f(z) = (z-z_0)\dfrac{p(z)}{q'(z_0)(z-z_0)+\mathcal{O}((z-z_0)^2)}$

$$= \frac{p(z)}{q'(z_0)+\mathcal{O}(z-z_0)}$$

Ex:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{e^{2z}}{z(z+1)^2}$$

analytisk i -1, $g(z)$

$$= g'(-1) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{2z}}{z}\right)\Bigg|_{z=-1} = \ldots$$

Ex:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z+1}{z^2+9} = 0$$

funktionen är analytisk i 1.