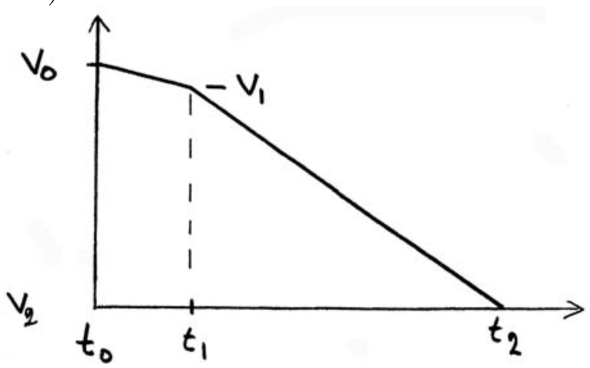
19)



<u>Givet:</u> $v_0 = 250 \text{ km/h} = \dfrac{250}{3.6} \text{ m/s}$

$v_1 = 240 \text{ km/h} = \dfrac{240}{3.6} \text{ m/s}$

$v_2 = 0 \text{ m/s}$

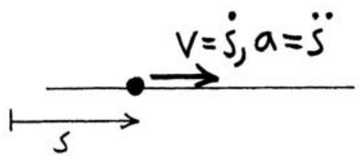
$t_0 = 0 \text{ s}$

$t_1 = 6 \text{ s}$

$t_2 = 52 \text{ s}$

<u>Sökt:</u> a) Acceleration a

b) Stoppsträcka s



Tåget rör sig rätlinjigt, så fartändringen $\dot{v} = \ddot{s}$ är *hela* accelerationen a, se (1.15).

$$a = \dot{v} = \frac{dv}{dt}$$

Diagrammet ger att a är styckvist konstant.

<u>$t_0 \leq t \leq t_1$:</u>

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \underline{\underline{-0.46 \ \ \text{m/s}^2}}$$

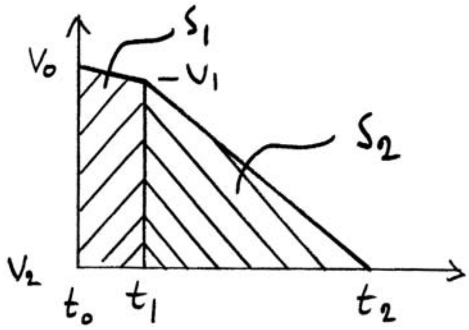
Negativ eftersom farten $v = \dot{s}$ minskar.

<u>$t_1 < t \leq t_2$:</u>

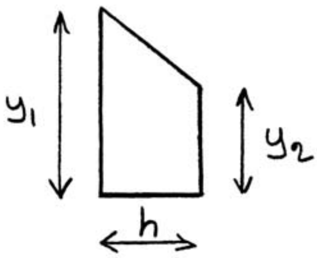
$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \underline{\underline{-1.45 \ \ \text{m/s}^2}}$$

b)

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad s = \int_{t_0}^{t_2} v\,dt$$



Diagrammet ger att $s = s_1 + s_2$, där



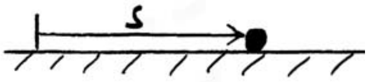
$$A = y_{\text{medel}} h = \frac{(y_1 + y_2)h}{2}$$

$$s_1 = \frac{(v_0 + v_1)(t_1 - t_0)}{2} = 408 \text{ m}$$

$$s_2 = \frac{(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)}{2} = 1533 \text{ m}$$

$$\therefore \; s = s_1 + s_2 = \underline{\underline{1940 \text{ m}}}$$

20)



Givet: $a = 10 - 0.4s$

$v = 4.0$ m/s vid $s = 0$

Sökt: v då $s = 10$ m

Varignons sats (1.17):

Lämplig att använda eftersom tiden varken är given eller sökt.

$$a_t \, ds = v \, dv \qquad (1)$$

Rätlinjig rörelse, så $a_t = a$, där a är *hela* accelerationen

Ty i (1.14) är normalaccelerationen $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$.

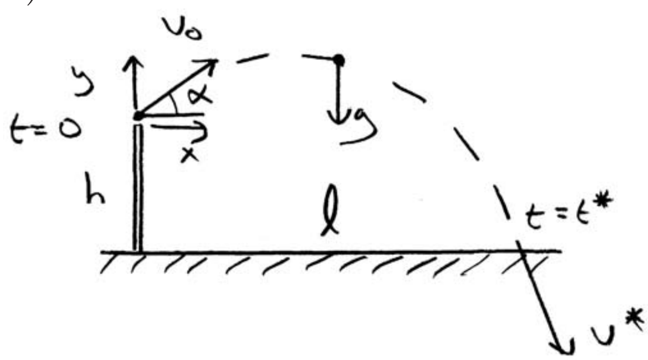
(1) $\Rightarrow$

$$\int_0^{10} (10 - 0.4s) \, ds = \int_{4.0}^{v} v \, dv \quad \Rightarrow$$

$$\left[10s - 0.2s^2 \right]_0^{10} = \left[\frac{v^2}{2} \right]_{4.0}^{v} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{v = 13.3 \text{ m/s}}}$$

3)



Sökt: a) h

b) Flygtid t^*

c) Nedslagsfart v^*

$$\overline{a} = -g\,\hat{y}$$

Lämpligt att använda kartesiska koordinater (naturliga basen eller polära koordinater blir högst omständliga att använda här).

Koordinatsystemets x- och y-axlar kan väljas godtyckligt. Här blir det enklast med ena axeln vertikal och den andra horisontell (jämför dock med exemplet från Fö 1).

Origo kan väljas godtyckligt, men det blir här smidigast att placera det där bollen är vid $t = 0$.

$$\therefore \quad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g$$

$$\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = C_1 \quad \Rightarrow \quad x = C_1 t + C_2$$

$$\ddot{y} = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = -gt + C_3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4$$

Begynnelsevillkor:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad C_1 = v_0 \cos\alpha$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0$$

$$\dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad C_3 = v_0 \sin\alpha$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

Träffar marken vid $t = t^*$ där $x = l$, $y = -h$:

$$x(t^*) = l \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t^* = \frac{l}{v_0 \cos\alpha}}}$$

Dimensionen ok!

$l \uparrow \Rightarrow \; t^* \uparrow$ ok!

$v_0 \uparrow \Rightarrow \; t^* \downarrow$ ok!

$\alpha = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow$ når aldrig $x = l$, så $t^* = \infty$ ok!

$$y(t^*) = -h \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -h = -\frac{1}{2} g \frac{l^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha \frac{l}{v_0 \cos\alpha}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{h = \frac{g l^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} - l \tan\alpha}} \qquad (1)$$

c)

$$v^* = \sqrt{\left(\dot{x}(t^*)\right)^2 + \left(\dot{y}(t^*)\right)^2}$$

$$\dot{x}(t^*) = v_0 \cos\alpha$$

$$\dot{y}(t^*) = -g \frac{l}{v_0 \cos\alpha} + v_0 \sin\alpha$$

$$\therefore \quad v^* = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + \frac{g^2l^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + v_0^2\sin^2\alpha - \frac{2glv_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 + \frac{g^2l^2}{v_0^2\cos^2\alpha} - 2gl\tan\alpha} \stackrel{(1)}{=} \underline{\underline{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}}$$

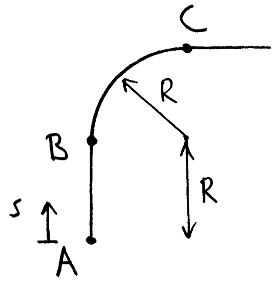
Dimensionen ok!

$v_0 \uparrow \Rightarrow \; v^* \uparrow$ ok!

$g \uparrow \Rightarrow \; v^* \uparrow$ ok!

$h \uparrow \Rightarrow \; v^* \uparrow$ ok!

8)



Givet: $v = k\sqrt{s}$

Sökt: $|\overline{a}|_{\mathcal{B}^-}$, $|\overline{a}|_{\mathcal{B}^+}$, $|\overline{a}|_{\mathcal{C}^-}$, $|\overline{a}|_{\mathcal{C}^+}$

$$\overline{a} \overset{(1.14)}{=} \underbrace{\dot{v}}_{a_t}\, \hat{t} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}}_{a_n}\, \hat{n}$$

Naturliga basen är lämpligast eftersom vi känner v som funktion av båglängden s.

$$\therefore \quad |\overline{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$\underline{\mathcal{AB}}$:

$\rho \to \infty$ (rätlinjig rörelse)

$$\therefore \quad a_n = 0$$

$$a_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{ds}}_{k\,\frac{1}{2\sqrt{s}}} \quad \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\dot{s}=v=k\sqrt{s}} = \frac{k^2}{2} \text{ konstant!}$$

Kedjeregeln behövs här ty $v = v(s(t))$.

$$\therefore \quad \underline{\underline{|\overline{a}|_{\mathcal{B}^-} = \frac{k^2}{2}}}$$

$\underline{\mathcal{BC}}$:

$$\rho = R$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{k^2 s}{R}$$

$$a_t = \frac{k^2}{2} \text{ som förut}$$

$$\therefore \quad |\overline{a}| = k^2 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{s^2}{R^2}}$$

$$\underline{\underline{|\overline{a}|_{\mathcal{B}^+}}} = \Big/ s = R \Big/ = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{2} k^2}} \quad (\approx 1.1k^2)$$

Storleken på accelerationen måste öka direkt efter $\mathcal{B}$ eftersom det då tillkommer en normalkomponent till accelerationen.

$$\underline{\underline{|\overline{a}|_{\mathcal{C}^-}}} = \Big/ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ett fjärdedels varv}}}{s = R + \frac{2\pi R}{4}} \Big/ = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{4} + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)^2} k^2}} \quad (\approx 2.6k^2)$$

Mellan $\mathcal{B}^+$ och $\mathcal{C}^-$ är ρ konstant, medan v ökar. Alltså ökar a_n. Eftersom a_t är konstant, måste även $|\overline{a}|$ öka.

Efter $\mathcal{C}$:

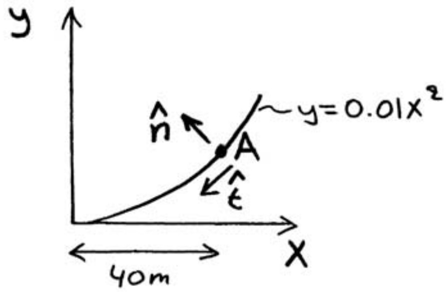
$\rho \to \infty$

$$\therefore \quad a_n = 0$$

$$a_t = \frac{k^2}{2} \text{ som förut}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{|\overline{a}|_{\mathcal{C}^+} = \frac{k^2}{2}}}$$

21)



Givet: $y = 0.01x^2$

Vid $\mathcal{A}$ $(x = 40\ \mathrm{m})$:

$v = 10\ \mathrm{m/s}$, $\dot{v} = 3.0\ \mathrm{m/s^2}$

Sökt: $|\overline{a}|$ vid $\mathcal{A}$

$$\overline{a} \overset{(1.14)}{=} \dot{v}\,\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}$$

Naturliga basen är lämpligast eftersom vi känner $\dot{v}$ och v, så det enda som återstår för att bestämma $|\overline{a}|$ är att ta fram krökningsradien ρ. Detta kan göras eftersom vi känner kurvans form: $\overline{r} = \overline{r}(x)$ är given.

$$\therefore \quad |\overline{a}| = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \qquad (1)$$

$\rho = \dfrac{1}{\kappa}$, där krökningen κ ges av

$$\kappa \overset{(1.9)}{=} \frac{\left|\dfrac{d\overline{r}}{dx} \times \dfrac{d^2\overline{r}}{dx^2}\right|}{\left|\dfrac{d\overline{r}}{dx}\right|^3} \qquad (2)$$

$$\overline{r} = x\,\hat{x} + 0.01x^2\,\hat{y} \quad \mathrm{m}$$

$$\therefore \quad \frac{d\overline{r}}{dx} = \hat{x} + 0.02x\,\hat{y}$$

$$\frac{d^2\overline{r}}{dx^2} = 0.02\,\hat{y} \quad \mathrm{m}^{-1}$$

$$\frac{d\overline{r}}{dx} \times \frac{d^2\overline{r}}{dx^2} = 0.02\,\hat{z}\ \mathrm{m}^{-1}, \qquad \left|\frac{d\overline{r}}{dx} \times \frac{d^2\overline{r}}{dx^2}\right| = 0.02\ \mathrm{m}^{-1}$$

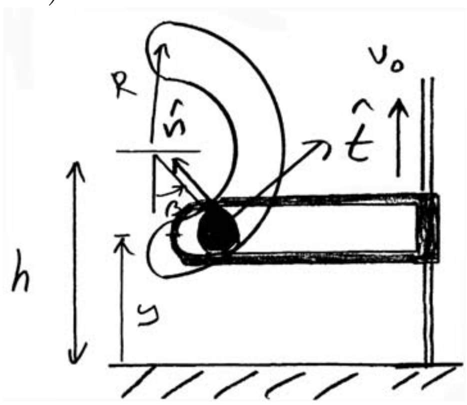
$$\left|\frac{d\overline{r}}{dx}\right| = \sqrt{1 + (0.02x)^2} = \Big/ x = 40\ \mathrm{m} \Big/ = 1.28$$

$$(2) \Rightarrow \quad \kappa = 0.0095\ \mathrm{m}^{-1}$$

$$\therefore \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = 105\ \mathrm{m}$$

Insättning i (1) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{|\overline{a}| = 3.15\ \mathrm{m/s^2}}}$

10)



<u>Givet:</u> v_0 konstant

<u>Sökt:</u> a_n, a_t

Vi ritar in tangentvektorn $\hat{t}$ längs med banans tangent, och $\hat{n}$ in mot centrum. Vi väljer – precis som i (1.16) – riktningen på $\hat{t}$ så att den pekar i riktning mot ökande β. Därmed blir hastigheten $\overline{v} = +R\dot{\beta}\,\hat{t}$.

Kulan utför cirkelrörelse. (1.16) $\Rightarrow$

(Om vi i stället hade valt $\hat{t}$ riktad snett nedåt åt vänster, skulle vi fått $\overline{v} = -R\dot{\beta}\,\hat{t}$. För att undvika minustecknet, väljer vi därför *alltid* att definiera $\hat{t}$ i riktning för ökande vinkel så att (1.16) gäller.)

$$a_n = R\dot{\beta}^2 \qquad (1)$$

$\dot{\beta}$?

Kulans fart är $v = R\dot{\beta}$. Eftersom kulan inte rör sig vertikalt relativt det horisontella spåret, måste spåret och kulan ha samma hastighet i vertikalled. Då vi känner det horisontella spårets fart v_0, kan vi därmed få fram $\dot{\beta}$.

Geometri $\Rightarrow$

Vi för in kulans vertikala läge y, samt avståndet h i figuren ovan. Eftersom h är konstant försvinner den vid tidsderiveringen, så vi behöver inte känna h:s storlek.

$$h = y + R\cos\beta$$

Tidsderivering $\Rightarrow$

$$0 = \dot{y} - R\sin\beta\,\dot{\beta} \qquad (2)$$

Vi måste använda kedjeregeln eftersom $\beta = \beta(t)$.

Men $\dot{y} = v_0$ ty kulan måste ha samma hastighet i vertikalled som spåret!

Kulan har hastigheten $\dot{y}$ i vertikalled och hastigheten $\dot{x}$ i horisontalled. Det är bara vertikalkomponenten $\dot{y}$ som sammanfaller med spårets vertikala hastighet v_0 eftersom kulan och spåret inte rör sig relativt varandra i vertikalled.

$$\therefore \quad \dot{\beta} = \frac{v_0}{R\sin\beta} \qquad (3)$$

Insättning i (1) $\Rightarrow$

$$a_n = \frac{v_0^2}{R\sin^2\beta}$$

Cirkelrörelse, (1.16), $\Rightarrow$

$$a_t = \dot{v} = R\ddot{\beta} \qquad (4)$$

$\ddot{\beta}$?

(2) $\Rightarrow$

$$0 = \underbrace{\ddot{y}}_{=0 \text{ ty } \dot{y} \text{ konst.}} - R\cos\beta\,\dot{\beta}^2 - R\sin\beta\,\ddot{\beta} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{\beta} = -\frac{\cos\beta\,\dot{\beta}^2}{\sin\beta}$$

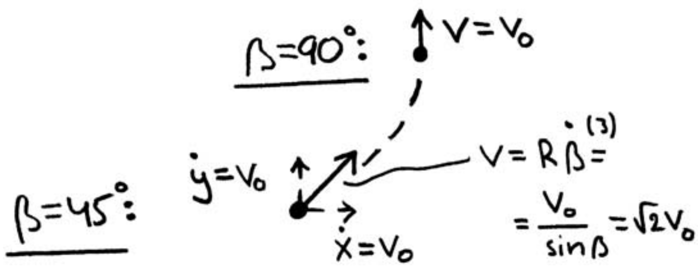
Insättning i (4) $\Rightarrow$

$$a_t \overset{(3)}{=} -\frac{Rv_0^2\cos\beta}{R^2\sin^2\beta\sin\beta} = -\frac{v_0^2\cos\beta}{R\sin^3\beta}$$

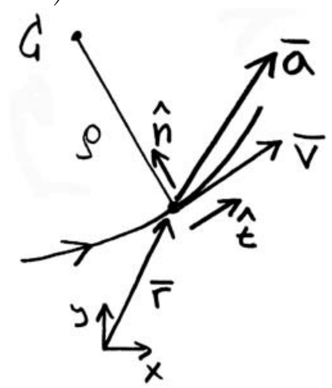
Dimensionen ok!

$a_n > 0$ ok!

$a_t = \dot{v} < 0$ $(0 < \beta < 90°)$ innebär att kulans fart minskar. Kulan har hela tiden en hastighetskomponent v_0 i vertikalled. För $\beta = 90°$ har kulan ingen horisontell hastighetskomponent, vilket den har innan den når $\beta = 90°$. Alltså måste farten minska när kulan närmar sig $\beta = 90°$.



22)



<u>Givet:</u> $\overline{r} = t^2\,\hat{x} + \dfrac{2}{3}t^3\,\hat{y}$ m

<u>Sökt:</u> Krökningscentrums läge $\overline{r}_C$ då $t = 1$ s

$$\overline{r}_C \overset{(1.12)}{=} \overline{r} + \rho\,\hat{n} \qquad (1)$$

Här måste vi ta fram krökningsradien ρ och normalriktningen $\hat{n}$.

Vi känner $\overline{r} = \overline{r}(t)$, så vi kan få fram $\overline{v}$ och $\overline{a}$ vid $t = 1$ s. När vi har $\overline{v}$, känner vi även tangentriktningen $\hat{t}$ eftersom $\overline{v} = v\,\hat{t}$. Med $\hat{t}$ känd kan vi få fram $\hat{n}$ och ρ m.h.a. det uträknade $\overline{a}$ och det allmänna uttrycket för accelerationen i (1.14).

$$\overline{r} = t^2\,\hat{x} + \frac{2}{3}t^3\,\hat{y} \;\text{ m } \Rightarrow$$

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}} = 2t\,\hat{x} + 2t^2\,\hat{y} \;\text{ m/s}$$

$$\overline{a} = \dot{\overline{v}} = 2\,\hat{x} + 4t\,\hat{y} \;\text{ m/s}^2$$

$$t = 1 \text{ s} \Rightarrow$$

$$\overline{v} = 2\,\hat{x} + 2\,\hat{y} \;\text{ m/s} \qquad (2)$$

$$\overline{a} = 2\,\hat{x} + 4\,\hat{y} \;\text{ m/s}^2 \qquad (3)$$

$\overline{v} = v\,\hat{t}$, så (2) $\Rightarrow$

$$v = \sqrt{8} \;\text{ m/s} \qquad (4)$$

$$\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\hat{x} + \hat{y}) \qquad (5)$$

$\hat{t}$ måste vara den enhetsvektor som har samma riktning som $\overline{v}$ eftersom $\overline{v} = v\,\hat{t}$.

$$\overline{a} \overset{(1.14)}{=} \dot{v}\,\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\,\hat{n} \qquad (6)$$

$(6) \Rightarrow \dot{v} = \overline{a} \cdot \hat{t}$, där $\overline{a}$ och $\hat{t}$ ges i (3) och (5):

$$\dot{v} = \overline{a} \cdot \hat{t} = (2\,\hat{x} + 4\,\hat{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\hat{x} + \hat{y}) = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{v^2}{\rho}\,\hat{n} \overset{(6)}{=} \overline{a} - \dot{v}\,\hat{t} \;=\; 2\,\hat{x} \;+\; 4\,\hat{y} \;-\; \frac{6}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\hat{x} + \hat{y}) \;=$$

$$= \; -\hat{x} + \hat{y} \; = \; \underbrace{\sqrt{2}}_{\frac{v^2}{\rho}}\,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\,(-\hat{x} + \hat{y})}_{\hat{n}}$$

Vi skriver i sista steget om $(v^2/\rho)\,\hat{n}$ som en skalär gånger en enhetsvektor. Därmed kan ju enhetsvektorn identifieras med $\hat{n}$ och skalären med v^2/ρ.

$$\therefore \quad \frac{v^2}{\rho} = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \frac{v^2}{\sqrt{2}} \overset{(4)}{=} \frac{8}{\sqrt{2}} \;=\; 4\sqrt{2}\ \ \mathrm{m}$$

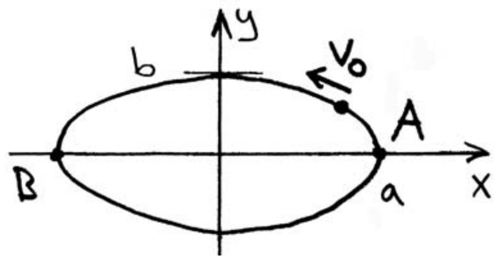
$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-\hat{x} + \hat{y})$$

Som sig bör är $\hat{n} \perp \hat{t}$.

Insättning i (1) $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{\overline{r}_{\mathcal{C}}}} \;=\; \overline{r} + \rho\,\hat{n} \;=\; \hat{x} \;+\; \frac{2}{3}\,\hat{y} \;+\; 4\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(-\hat{x} + \hat{y}) \;=\; \underline{\underline{-3\,\hat{x} + \frac{14}{3}\,\hat{y}\ \mathrm{m}}}$$

4)



<u>Givet:</u> $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$

$a > b > 0$

$v = v_0$ konstant

<u>Sökt:</u> $|\overline{a}|_{\max}$

$$\overline{a} = \underbrace{\dot{v}}_{\substack{=0 \text{ ty} \\ v=v_0 \text{ konst.}}} \hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} = \frac{v_0^2}{\rho}\hat{n} \qquad (1)$$

Genom att teckna accelerationen i den naturliga basen får vi, tack vare att farten är konstant, ett enkelt uttryck för accelerationens storlek. Om vi i stället direkt tecknade accelerationen i kartesiska koordinater skulle vi inte lika enkelt se var accelerationens storlek är som störst.

$\therefore$ $|\overline{a}|_{\max}$ där krökningsradien ρ är minimal, d.v.s. där krökningen κ är som störst ($\rho = 1/\kappa$), alltså vid $\mathcal{A}$ (eller $\mathcal{B}$).

Banan "svänger" ju mest vid $\mathcal{A}$ eftersom $a > b$.

$(1) \Rightarrow$

$$|\overline{a}|_{\max} = \frac{v_0^2}{\rho_{\mathcal{A}}} \qquad (2)$$

För att bestämma $|\overline{a}|_{\max}$ kan vi tänka oss två alternativ:
i) Ta fram krökningen vid $\mathcal{A}$ genom att parametrisera banan enligt
$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta, \end{cases}$
och använda (1.9).
ii) Tidsderivera det givna uttrycket för banan två gånger.

Vi väljer här alternativ *ii)*.

Bestäm $\overline{a}$ genom att tidsderivera uttrycket för banan:

$$\frac{2x\,\dot{x}}{a^2} + \frac{2y\,\dot{y}}{b^2} = 0$$

Vi använder kedjeregeln eftersom $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Derivera igen:

$$\frac{2\dot{x}^2}{a^2} + \frac{2x\,\ddot{x}}{a^2} + \frac{2\dot{y}^2}{b^2} + \frac{2y\,\ddot{y}}{b^2} = 0 \qquad (3)$$

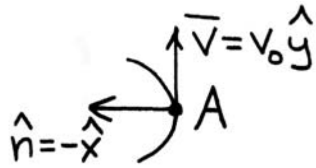
Vid $\mathcal{A}$ är $x = a$

$$y = 0$$

$$\dot{x} = 0$$

$$\dot{y} = v_0$$

$$\hat{n} = -\hat{x} \qquad (4)$$



$\hat{n}$ riktad *in* mot krökningscentrum.

(3) $\Rightarrow$

$$\frac{2\ddot{x}}{a} + \frac{2v_0^2}{b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} = -\frac{a}{b^2}v_0^2 \qquad (5)$$

$\ddot{y}$?

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = \frac{v_0^2}{\rho_{\mathcal{A}}}\hat{n} \overset{(4)}{=} -\frac{v_0^2}{\rho_{\mathcal{A}}}\hat{x} \qquad (6)$$

$$\therefore \quad \ddot{y} = 0$$

$$\overline{a} = \ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y} \overset{(5)}{=} -\frac{av_0^2}{b^2}\,\hat{x} \qquad (7)$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{|\overline{a}|_{\max} = \frac{av_0^2}{b^2}}}$$

Dimensionen ok!

$a = b = R \;\Rightarrow\; |\overline{a}|_{\max} = \frac{v_0^2}{R}$, ok ty cirkelrörelse!

Anm.:

$$(6),\ (7) \Rightarrow \quad \rho_{\mathcal{A}} = \frac{b^2}{a}.$$

$a = b = R \ \Rightarrow \ \rho_{\mathcal{A}} = R$, ok ty cirkel!