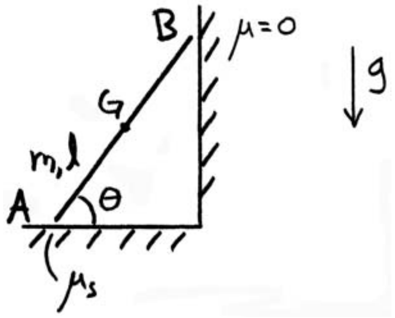
127)



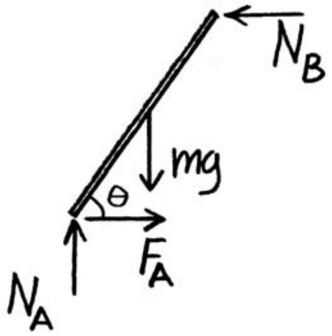
Givet: $l = 3.0$ m

$m = 10$ kg

$\mu_s = 0.6$

Sökt: Reaktionskrafterna vid $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ samt θ då på gränsen till glidning.

Frilägg stegen:



Från avsnitt 9.4 har vi utnyttjat hur följande krafter ser ut: tyngdkraften mg samt kontaktkraften med respektive utan friktion.

Jämvikt, (9.8), $\overline{F} = \overline{0}$, $\overline{M}_{\mathcal{A}} = \overline{0}$:

$$\uparrow: \quad N_{\mathcal{A}} - mg = 0 \qquad (1)$$

$$\rightarrow: \quad F_{\mathcal{A}} - N_{\mathcal{B}} = 0 \qquad (2)$$

$$\overset{\frown}{\mathcal{A}}: \quad mg\frac{l}{2}\cos\theta - N_{\mathcal{B}} l \sin\theta = 0 \qquad (3)$$

$$(1) \Rightarrow \quad \underline{\underline{N_{\mathcal{A}}}} = mg = \underline{\underline{98.1 \text{ N}}} \qquad (4)$$

$$(2) \Rightarrow \quad F_{\mathcal{A}} = N_{\mathcal{B}} > 0 \qquad (5)$$

$N_{\mathcal{B}} > 0$ eftersom stegen *trycker* mot väggen.

Vid jämvikt är $|F_{\mathcal{A}}| \leq \mu_s N_{\mathcal{A}}$. Enligt (9.6).

$\therefore$ På gränsen till att det ska börja glida gäller $|F_{\mathcal{A}}| = \mu_s N_{\mathcal{A}}$.

(5) $\Rightarrow$

$$|F_{\mathcal{A}}| = \underline{\underline{N_{\mathcal{B}}}} = \mu_s N_{\mathcal{A}} \overset{(4)}{=} \mu_s mg = \underline{\underline{58.9\ \mathrm{N}}}$$

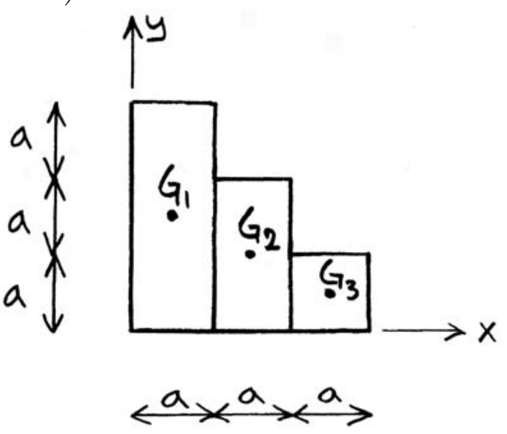
$$\underline{\underline{F_{\mathcal{A}}}} \overset{(2)}{=} N_{\mathcal{B}} = \underline{\underline{58.9\ \mathrm{N}}}$$

(3) $\Rightarrow$

$$mg\frac{l}{2}\cos\theta - \mu_s mgl\sin\theta = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2\mu_s} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\theta = 39.8^\circ}}$$

129)



Sökt: $x_{\mathcal{G}}$, $y_{\mathcal{G}}$

Del	1	2	3
A_i	$3a^2$	$2a^2$	a^2
$x_{\mathcal{G}_i}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3a}{2}$	$\frac{5a}{2}$
$y_{\mathcal{G}_i}$	$\frac{3a}{2}$	a	$\frac{a}{2}$

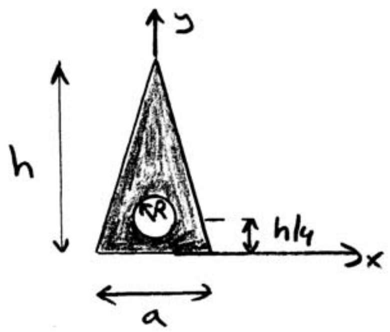
$$\underline{\underline{x_{\mathcal{G}}}} \overset{(10.4)}{=} \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i x_{\mathcal{G}_i}}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{\frac{3a^3}{2} + 3a^3 + \frac{5a^3}{2}}{3a^2 + 2a^2 + a^2} = \underline{\underline{\frac{7}{6}\,a}}$$

$$\underline{\underline{y_{\mathcal{G}}}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i y_{\mathcal{G}_i}}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{\frac{9a^3}{2} + 2a^3 + \frac{a^3}{2}}{6a^2} = \underline{\underline{\frac{7}{6}\,a}}$$

Dimensionen ok!

Att $x_{\mathcal{G}} = y_{\mathcal{G}}$ inses även av symmetriskäl.

131)



Sökt: $\underline{\text{Sökt:}}$ $x_{\mathcal{G}}$, $y_{\mathcal{G}}$

Symmetri $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x_{\mathcal{G}} = 0}}$

Dela in kroppen enligt:

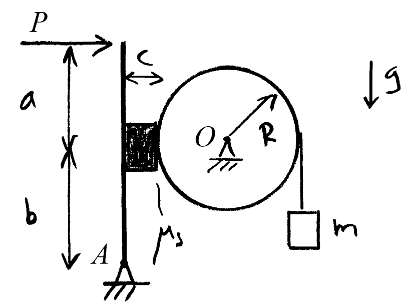
Del	1	2
A_i	$\dfrac{ah}{2}$	$-\pi R^2$
$y_{\mathcal{G}_i}$	$\dfrac{h}{3}$	$\dfrac{h}{4}$

Att en triangels masscentrum ligger på 1/3 av höjden får utnyttjas utan bevis, jämför även exempel 10.2

$$\underline{\underline{y_{\mathcal{G}}}} \overset{(10.4)}{=} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{2} A_i y_{\mathcal{G}_i}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{\dfrac{ah^2}{6} + \dfrac{h}{4}(-\pi R^2)}{\dfrac{ah}{2} + (-\pi R^2)} = \underline{\underline{\frac{h(2ah - 3\pi R^2)}{6ah - 12\pi R^2}}}$$

Dimensionen ok!

120)

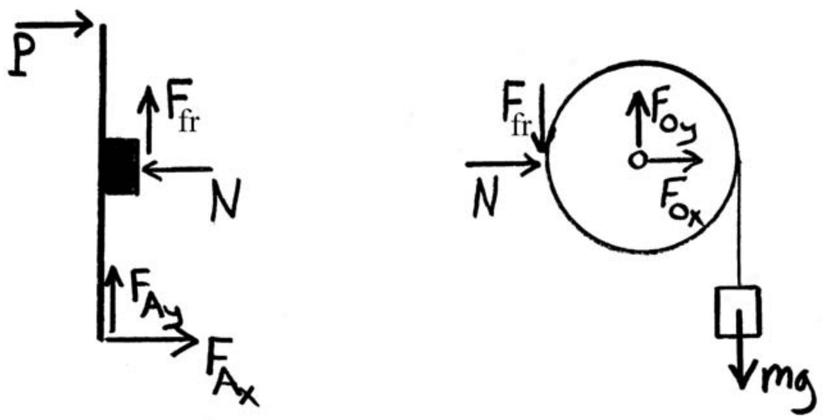


Sökt: P så jämvikt

P måste vara så pass stor att friktionskraften F_{fr} mellan armen och trumman orkar hålla kvar trumman. Enligt (9.6) är trumman stilla (d.v.s. i jämvikt) om $|F_{\text{fr}}| \leq \mu_s N$, där N är normalkraften mellan armen och trumman. För att kunna bestämma P måste vi alltså först ta fram F_{fr} och N.

Vi skulle naturligtvis kunna börja med att frilägga båda kropparna som ett enda system, men i denna uppgift medför detta ingen tidsvinst: hur vi än väljer momentpunkten ger de obekanta (och ej eftersökta!) krafterna vid $\mathcal{A}$ och/eller $\mathcal{O}$ bidrag till momentet. Genom att i stället frilägga båda kropparna var för sig och teckna momentjämvikt kring $\mathcal{A}$ respektive $\mathcal{O}$ får vi fram F_{fr} och N direkt.

Frilägg armen respektive trumman:



Jämvikt:

Arm:

$$\overset{\curvearrowright}{\mathcal{A}}: \quad P(a+b) - Nb - F_{\text{fr}}c = 0 \qquad (1)$$

Trumma:

$$\overset{\curvearrowright}{\mathcal{O}}: \quad mgR - F_{\text{fr}}R = 0 \qquad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \quad F_{\text{fr}} = mg \qquad (3)$$

$$(1) \Rightarrow \quad N = \frac{P(a+b) - mgc}{b} \qquad (4)$$

Trumman börjar inte rotera om $|F_{\mathrm{fr}}| \leq \mu_s N$.

Enligt (9.6).

$(3), (4) \Rightarrow$

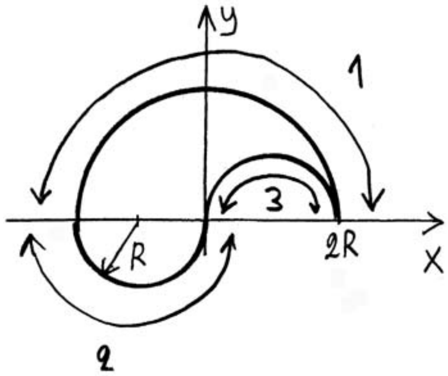
$$mgb \leq \mu_s \Big(P(a+b) - mgc \Big) \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{P \geq}} \frac{mg\left(\dfrac{b}{\mu_s} + c\right)}{a+b} = \underline{\underline{\frac{mg(b+\mu_s c)}{\mu_s(a+b)}}}$$

Dimensionen ok!

$m \uparrow \Rightarrow \ P \uparrow$ ok!
$\mu_s \uparrow \Rightarrow \ P \downarrow$ ok!

135)



Sökt: $x_{\mathcal{G}}$, $y_{\mathcal{G}}$

Symmetri $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x_{\mathcal{G}} = 0}}$

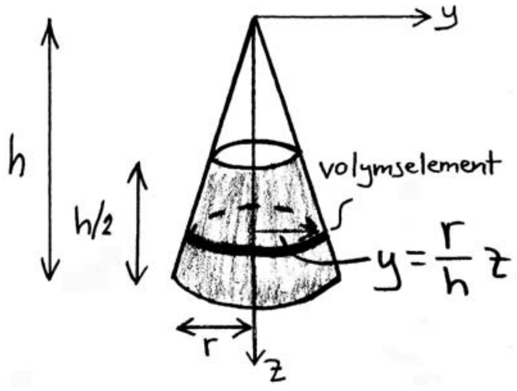
Del	1	2	3
l_i	$2\pi R$	πR	πR
$y_{\mathcal{G}_i}$	$\dfrac{4R}{\pi}$	$-\dfrac{2R}{\pi}$	$\dfrac{2R}{\pi}$

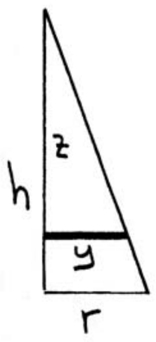
$y_{\mathcal{G}_i}$ beräknas enligt exempel 10.1.

$$\underline{\underline{y_{\mathcal{G}}}} \overset{(10.4)}{=} \frac{\sum_{i=1}^{3} l_i y_{\mathcal{G}_i}}{\sum_{i=1}^{3} l_i} = \frac{\frac{4R}{\pi}2\pi R - \frac{2R}{\pi}\pi R + \frac{2R}{\pi}\pi R}{4\pi R} = \underline{\underline{\frac{2R}{\pi}}}$$

Dimensionen ok!

134)



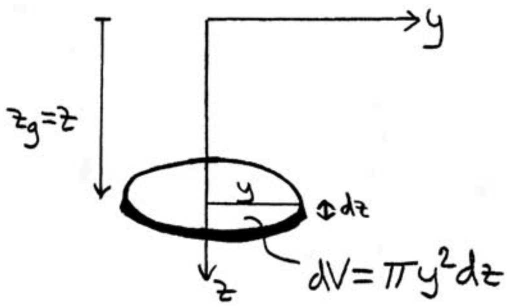


<u>Sökt:</u> $x_{\mathcal{G}}$, $y_{\mathcal{G}}$, $z_{\mathcal{G}}$

Vi för in bottenradien r (dess storlek påverkar inte läget av $\mathcal{G}$).

Symmetri $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x_{\mathcal{G}} = y_{\mathcal{G}} = 0}}$

Volymselement:

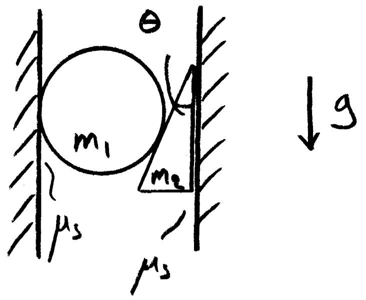


$$z_{\mathcal{G}} \overset{(10.2)}{=} \frac{\int z_g \, dV}{V} = \frac{\int_{h/2}^{h} z\, \pi y^2 \, dz}{\int_{h/2}^{h} \pi y^2 \, dz} =$$

$$= \frac{\int_{h/2}^{h} z\, \pi \left(\frac{rz}{h}\right)^2 dz}{\int_{h/2}^{h} \pi \left(\frac{rz}{h}\right)^2 dz} = \frac{\frac{1}{4}\left[z^4\right]_{h/2}^{h}}{\frac{1}{3}\left[z^3\right]_{h/2}^{h}} = \underline{\underline{\frac{45}{56}}}\, h$$

Dimensionen ok!

121)

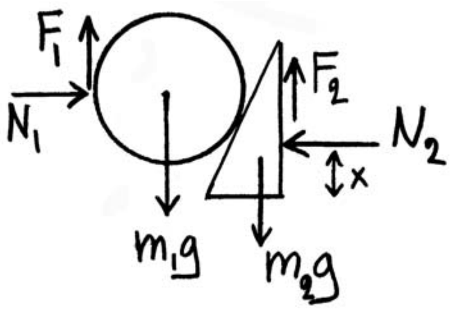


Sökt: μ_s så jämvikt

För att kropparna ska vara i jämvikt måste det enligt (9.6) gälla att $|F_{\text{fr}}| \leq \mu_s N$ vid båda kontaktställena med friktion (d.v.s. mellan cylindern och väggen samt mellan kilen och väggen). Vi börjar därför med att försöka bestämma friktions- och normalkrafterna.

Frilägg båda kropparna som *ett* system:

Det blir i denna uppgift ingen större skillnad i arbetsinsats om vi i stället frilägger båda kropparna var för sig.



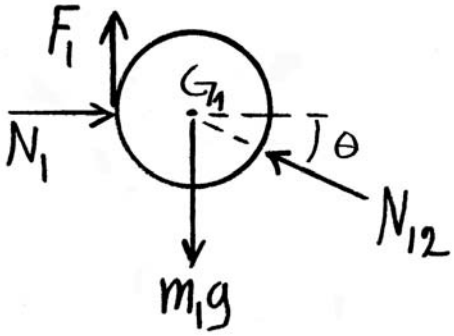
Från avsnitt 9.4 har vi utnyttjat hur följande krafter ser ut: tyngdkraften mg samt kontaktkraften med respektive utan friktion. Observera att N_2:s angreppspunkt x inte är känd, jämför sid. 192. Denna kan bestämmas genom att teckna momentjämvikt, men vi väljer att inte göra det eftersom vi inte behöver x.

Jämvikt:

$$\uparrow: \quad F_1 + F_2 - m_1 g - m_2 g = 0 \qquad (1)$$

$$\rightarrow: \quad N_1 - N_2 = 0 \qquad (2)$$

Frilägg cylindern:



Jämvikt:

$$\uparrow: \quad F_1 + N_{12}\sin\theta - m_1 g = 0 \qquad (3)$$

$$\rightarrow: \quad N_1 - N_{12}\cos\theta = 0 \qquad (4)$$

$$\overset{\curvearrowright}{\mathcal{G}_1}: \quad F_1 R = 0 \qquad (5)$$

Vi har nu fem ekvationer och fem obekanta (F_1, N_1, F_2, N_2, N_{12}).

$$(5) \Rightarrow \quad F_1 = 0$$

$$(3) \Rightarrow \quad N_{12} = \frac{m_1 g}{\sin\theta}$$

$$(4) \Rightarrow \quad N_1 = \frac{m_1 g}{\tan\theta}$$

$$(2) \Rightarrow \quad N_2 = \frac{m_1 g}{\tan\theta} \qquad (6)$$

$N_{12} > 0$, $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ ok, ty kropparna *trycker* mot varandra.

$$(1) \Rightarrow \quad F_2 = (m_1 + m_2)g \qquad (7)$$

Jämvikt om $|F_1| \leq \mu_s N_1$ och $|F_2| \leq \mu_s N_2$.

Enligt (9.6).

$F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad |F_1| \leq \mu_s N_1$ alltid uppfyllt.

(6), (7) $\Rightarrow$

$$(m_1 + m_2)g \;\leq\; \mu_s \frac{m_1 g}{\tan\theta} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{\mu_s \;\geq\; \frac{(m_1 + m_2)\tan\theta}{m_1}}}$$

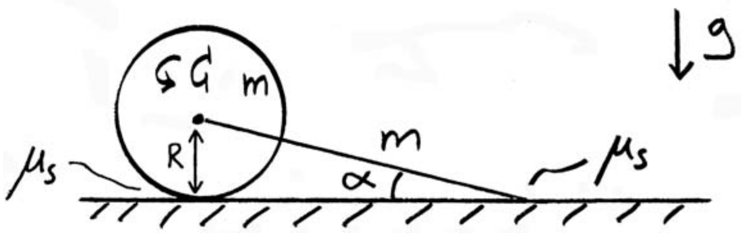
Dimensionen ok!

$m_2 \uparrow \Rightarrow \;\mu_s \uparrow$ ok!

$m_1 \uparrow \Rightarrow \;\mu_s \downarrow$ ok, ty kilen pressas hårdare mot väggen ju större m_1 är så att det räcker med ett litet μ_s.

Observera speciellt att man vid uppgifter där man, som här, har friktion vid flera kontaktställen inte vid friläggningen kan sätta $F_{\mathrm{fr}} = \mu_s N$ vid alla kontaktställen. I denna uppgift t.ex. ska det precis börja glida så att jämvikten förloras då $F_2 = \mu_s N_2$, men det gäller ju att $F_1 \neq \mu_s N_1$.

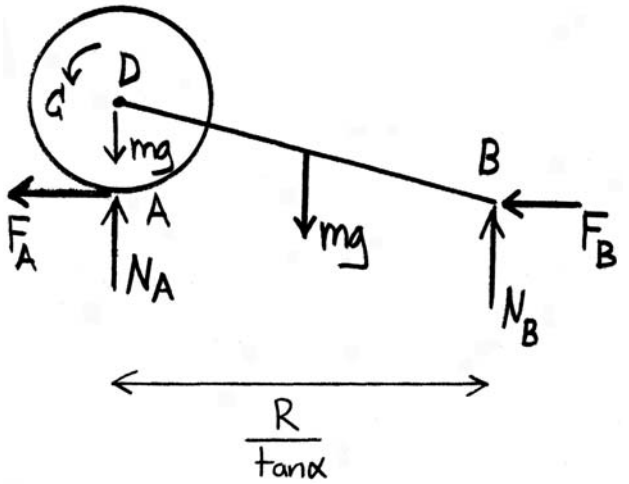
128)



Sökt: $C_{\max}$ för jämvikt

För att kropparna ska vara i jämvikt måste det enligt (9.6) gälla att $|F_{\text{fr}}| \leq \mu_s N$ vid båda kontaktställena med friktion (d.v.s. mellan skivan och underlaget samt mellan stången och underlaget). Vi börjar därför med att försöka bestämma friktions- och normalkrafterna.

Frilägg båda kropparna som *ett* system:



Från avsnitt 9.4 har vi utnyttjat hur följande krafter ser ut: tyngdkraften mg samt kontaktkraften med friktion. Vi väljer, helt godtyckligt, att definiera friktionskrafterna positiva åt vänster (en av krafterna måste i själva verket vara riktad åt höger – d.v.s. en av $F_\mathcal{A}$ och $F_\mathcal{B}$ kommer visa sig vara negativ – annars skulle anordningen accelerera åt vänster).

Jämvikt:

$$\leftarrow: \quad F_\mathcal{A} + F_\mathcal{B} = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad N_\mathcal{A} + N_\mathcal{B} - 2mg = 0 \qquad (2)$$

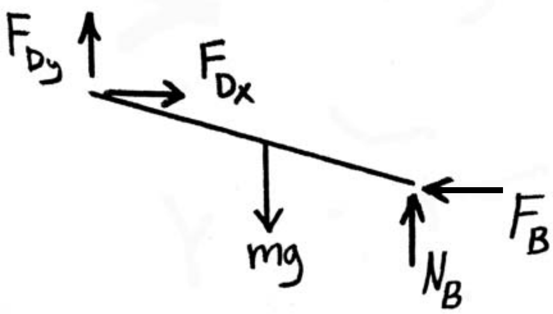
$$\overset{\curvearrowleft}{\mathcal{A}}: \quad N_\mathcal{B}\frac{R}{\tan\alpha} - mg\frac{R}{2\tan\alpha} + C = 0 \qquad (3)$$

$$(3) \Rightarrow \quad N_\mathcal{B} = \frac{mg}{2} - \frac{\tan\alpha}{R}C \qquad (4)$$

$$(1) \Rightarrow \quad N_\mathcal{A} = \frac{3mg}{2} + \frac{\tan\alpha}{R}C \qquad (5)$$

Frilägg stången:

Vi behöver en extra ekvation för att kunna bestämma friktionskrafterna.



Jämvikt:

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathcal{D}}: \quad N_{\mathcal{B}} \frac{R}{\tan\alpha} - F_{\mathcal{B}} R - mg \frac{R}{2\tan\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$F_{\mathcal{B}} = N_{\mathcal{B}} \frac{1}{\tan\alpha} - \frac{mg}{2\tan\alpha} \overset{(4)}{=}$$

$$= \frac{mg}{2\tan\alpha} - \frac{C}{R} - \frac{mg}{2\tan\alpha} = -\frac{C}{R} \qquad (6)$$

$$(1) \Rightarrow \quad F_{\mathcal{A}} = \frac{C}{R} \qquad (7)$$

Vid jämvikt gäller $|F_{\mathcal{A}}| \leq \mu_s N_{\mathcal{A}}$ och $|F_{\mathcal{B}}| \leq \mu_s N_{\mathcal{B}}$.

Enligt (9.6).

<u>$|F_{\mathcal{A}}| \leq \mu_s N_{\mathcal{A}}$:</u>

$(7), (5) \Rightarrow$

$$\frac{C}{R} \leq \mu_s \left(\frac{3mg}{2} + \frac{\tan\alpha}{R} C \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{C}{R}(1-\mu_s\tan\alpha) \;\le\; \frac{3mg}{2}\,\mu_s \qquad \Leftrightarrow$$

$$C \;\le\; \frac{3mgR}{2}\,\frac{\mu_s}{1-\mu_s\tan\alpha} \qquad\qquad (8)$$

$\underline{|F_{\mathcal{B}}| \le \mu_s N_{\mathcal{B}}:}$

(6), (4) $\Rightarrow$

$$\frac{C}{R} \;\le\; \mu_s\left(\frac{mg}{2} - \frac{\tan\alpha}{R}\,C\right) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{C}{R}(1+\mu_s\tan\alpha) \;\le\; \frac{mg}{2}\,\mu_s \qquad \Leftrightarrow$$

$$C \;\le\; \frac{mgR}{2}\,\frac{\mu_s}{1+\mu_s\tan\alpha} \qquad\qquad (9)$$

Vi ser att högerledet i (8) är större än högerledet i (9).

För att *både* (8) och (9) ska vara uppfyllda krävs alltså

$$C \;\le\; \frac{mgR}{2}\,\frac{\mu_s}{1+\mu_s\tan\alpha}$$

så att

$$\underline{\underline{C_{\max} = \frac{mgR}{2} \frac{\mu_s}{1 + \mu_s \tan\alpha}}}$$

Dimensionen ok!

Enligt (4) minskar $N_{\mathcal{B}}$ med ökande C. För att stången verkligen ska vara i kontakt med underlaget krävs att $N_{\mathcal{B}} > 0$. Detta är verkligen uppfyllt för $C = C_{\max}$ eftersom

$$N_{\mathcal{B}} = \frac{mg}{2} - \frac{mgR}{2} \frac{\mu_s}{1 + \mu_s \tan\alpha} \frac{\tan\alpha}{R} = \frac{mg}{2} \left(1 - \frac{\mu_s \tan\alpha}{1 + \mu_s \tan\alpha} \right) = \frac{mg}{2(1 + \mu_s \tan\alpha)} > 0.$$

Observera speciellt att man vid uppgifter där man, som här, har friktion vid flera kontaktställen inte vid friläggningen kan sätta $F_{\text{fr}} = \mu_s N$ vid alla kontaktställen. I denna uppgift t.ex. är $|F_{\mathcal{B}}| = \mu_s N_{\mathcal{B}}$ medan $|F_{\mathcal{A}}| < \mu_s N_{\mathcal{A}}$ när jämvikten är på gränsen att förloras.