31)

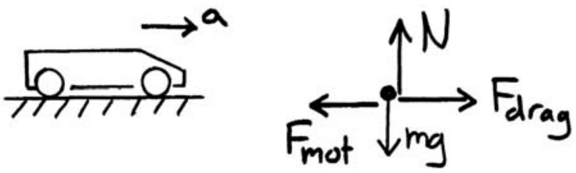
Givet: F_{drag}, F_{mot}

$m = 1630$ kg

Sökt: a) $v_{\max}$ på 5:an

b) a på 4:an vid $v = 100$ km/h

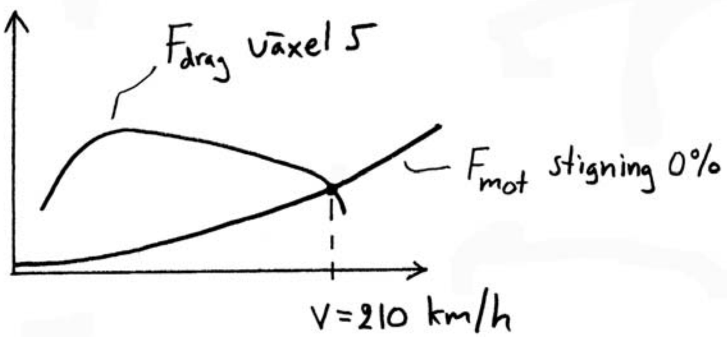
Frilägg bilen:



Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\rightarrow: \quad F_{\text{drag}} - F_{\text{mot}} = ma \qquad (1)$$

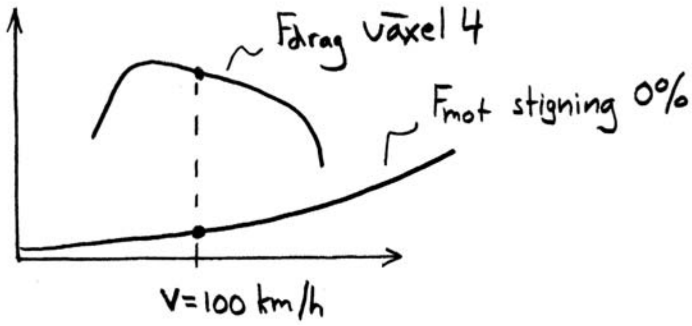
Vid $v_{\max}$ är $a = 0$, så $F_{\text{drag}} = F_{\text{mot}}$.



Grafen $\Rightarrow$ F_{drag} och F_{mot} skär varandra vid

$$v = \underline{\underline{v_{\max} = 210 \text{ km/h}}}$$

b)



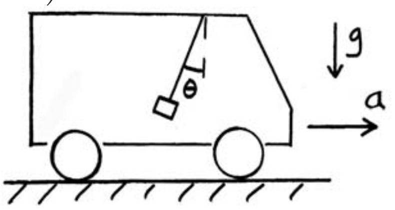
Grafen $\Rightarrow$ $F_{\text{drag}} = 3.0$ kN

$F_{\text{mot}} = 420$ N

Insättning i (1) $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{a}} = \frac{F_{\text{drag}} - F_{\text{mot}}}{m} = \underline{\underline{1.6 \text{ m/s}^2}}$$

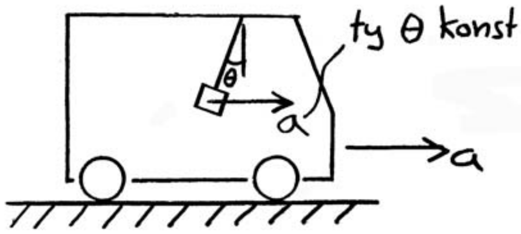
26)



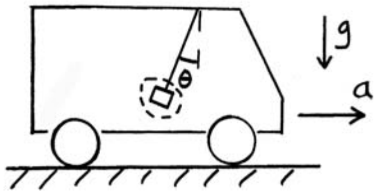
<u>Givet:</u> $a = 2.0$ m/s^2 konstant

<u>Sökt:</u> θ (konstant)

Frilägg tärningen:



Vid friläggningen av tärningen avlägsnas snöret och jorden från tärningen och dessa ersätts med krafter.



Från avsnitt 2.3 har vi utnyttjat hur följande krafter ser ut: tyngdkraften mg samt snörkraften S.

Eftersom θ är konstant, har tärningen samma acceleration som bilen, d.v.s. a åt höger.

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$\rightarrow$: $\quad S\sin\theta \;=\; ma \qquad (1)$

$\uparrow$: $\quad S\cos\theta \;-\; mg \;=\; 0 \qquad (2)$

(1) $\Rightarrow$

$$S \;=\; \frac{ma}{\sin\theta}$$

Insättning i (2) $\Rightarrow$

$$\frac{ma}{\tan\theta} \;-\; mg \;=\; 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{\theta = \arctan\left(\frac{a}{g}\right) \; = \; 11.5^\circ}}$$

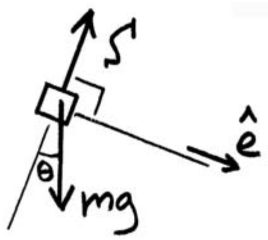
Dimensionen ok!

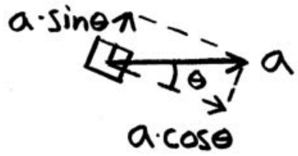
$a \uparrow \Rightarrow \;\theta \uparrow$ ok!

Vi utnyttjade ovan att θ är konstant. Vi ser nu att det bara kan vara fallet om a är konstant, vilket enligt uppgiften är fallet. (Även om a är konstant skulle man ju kunna ge tärningen en knuff så att θ ändå inte är konstant, men det är alltså inte fallet i denna uppgift.)

<u>Alt.:</u>

I stället för att teckna Newton II i horsiontal- och vertikalled, är det smartare att teckna den i riktningen $\hat{e}$ vinkelrät mot snöret eftersom den obekanta snörkraften "trillar bort" då. Jämför exempel 2.3 och 2.8.

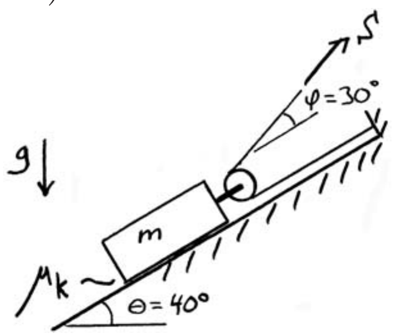




$$\hat{e}: \quad mg\sin\theta \; = \; ma\cos\theta \quad \Leftrightarrow$$

$$\tan\theta \; = \; \frac{a}{g}$$

27)



<u>Givet:</u> $m = 40$ kg

$\mu_k = 0.25$

$a = 2.0\ \mathrm{m/s^2}$

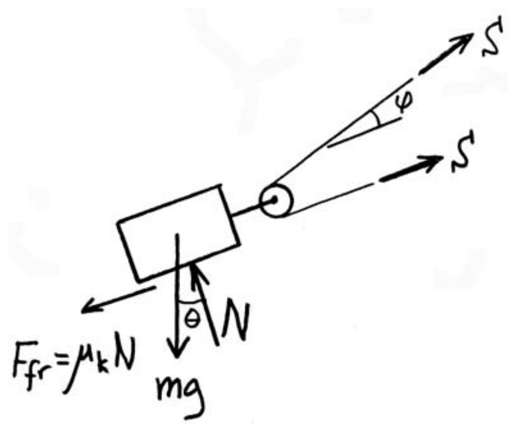
$\theta = 40°$

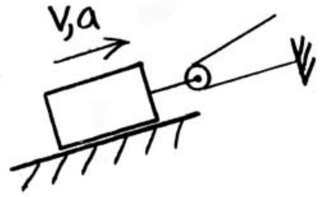
$\varphi = 30°$

<u>Sökt:</u> S

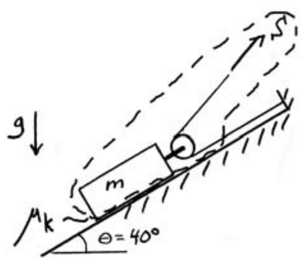
Frilägg klossen inklusive trissan med omliggande snöre:

Anledningen till att vi väljer att ta med trissan med omliggande snöre, är att vi vet hur snörkraften kan tecknas.





Vid friläggningen av klossen inklusive trissan med omliggande snöre, avlägsnas jorden, det lutande planet samt snöret.



Från avsnitt 2.3 har vi utnyttjat hur följande krafter ser ut: tyngdkraften mg, kontaktkraften med friktion (N, F_{fr}) samt snörkraften S.

Eftersom klossen glider på planet är $F_{\mathrm{fr}} = \mu_k N$ enligt (2.11), med F_{fr} enligt (2.10) motriktad glidhastigheten v.

För snörkraften har vi från avsnitt 2.3.2 utnyttjat att kraften i ett snöre är den samma överallt.

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

Det är lämpligast att teckna Newton II parallellt respektive vinkelrät mot planet.

$\nwarrow$: $S \sin\varphi + N - mg\cos\theta = 0 \qquad (1)$

$\nearrow$: $S\cos\varphi + S - \mu_k N - mg\sin\theta = ma \qquad (2)$

(1) $\Rightarrow$

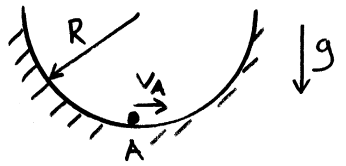
$N = mg\cos\theta - S\sin\varphi$

Insättning i (2) $\Rightarrow$

$S\cos\varphi + S - \mu_k mg\cos\theta + \mu_k S\sin\varphi - mg\sin\theta = ma$

$$\underline{\underline{S}} = \frac{ma + mg\sin\theta + \mu_k mg\cos\theta}{1 + \cos\varphi + \mu_k\sin\varphi} = \underline{\underline{205\ \text{N}}}$$

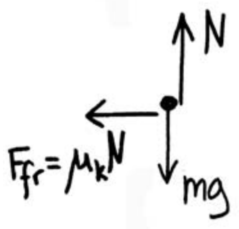
38)

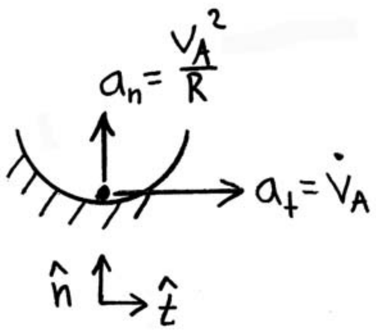


Givet: m, μ_k, $v_{\mathcal{A}}$

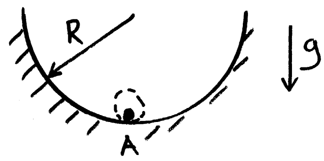
Sökt: N, $\dot{v}_{\mathcal{A}}$

Frilägg masspunkten vid $\mathcal{A}$:





Vid friläggningen av masspunkten avlägsnas underlaget och jorden.



Från avsnitt 2.3 har vi utnyttjat hur följande krafter ser ut: tyngdkraften mg samt kontaktkraften med friktion (N, F_{fr}).

Eftersom masspunkten glider på underlaget är $F_{\text{fr}} = \mu_k N$ enligt (2.11), med F_{fr} enligt (2.10) motriktad glidhastigheten $v_{\mathcal{A}}$.

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\hat{n}: \quad N - mg = \frac{mv_{\mathcal{A}}^2}{R} \qquad (1)$$

$$\hat{t}: \quad -\mu_k N = m\dot{v}_{\mathcal{A}} \qquad (2)$$

Eftersom masspunkten rör sig längs en krökt bana och vi söker fartändringen, d.v.s. accelerationen i tangentriktningen, är det lämpligt att teckna accelerationen i den naturliga basen enligt (1.14). Krökningsradien $\rho = R$ eftersom masspunkten rör sig längs en cirkel med radie R.

$$(1) \Rightarrow \quad \underline{\underline{N = mg + \frac{mv_{\mathcal{A}}^2}{R}}}$$

Dimensionen ok!

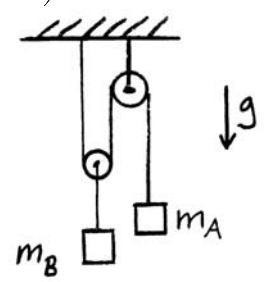
$N > mg$: jämför med att åka berg- och dalbana, ok!

$$(2) \Rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{v}_{\mathcal{A}}}} = -\frac{\mu_k}{m}\left(mg + \frac{mv_{\mathcal{A}}^2}{R}\right) = \underline{\underline{-\mu_k\left(g + \frac{v_{\mathcal{A}}^2}{R}\right)}}$$

Dimensionen ok!

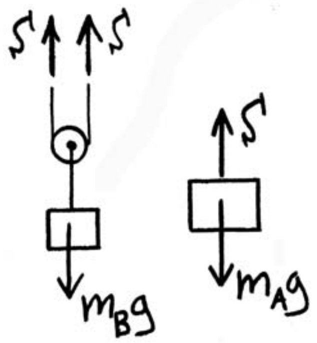
$\dot{v}_{\mathcal{A}} < 0$, ok ty farten minskar p.g.a. friktionen! Utan friktion ($\mu_k = 0$) är farten maximal i bottenläget $\mathcal{A}$, så att $\dot{v}_{\mathcal{A}} = 0$, ok!

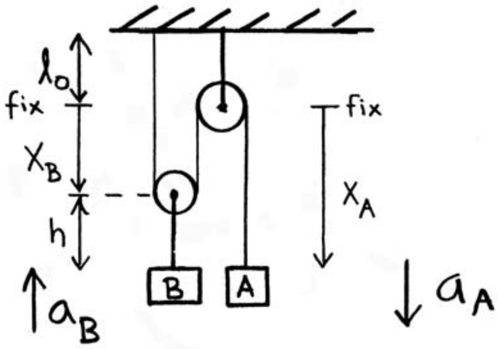
39)



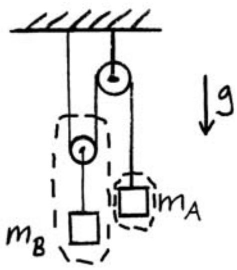
<u>Sökt:</u> $a_{\mathcal{A}}$

Frilägg $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$:





Vid friläggningen av $\mathcal{B}$ tar vi med trissan samt omliggande snöre eftersom vi vet hur snörkraften kan tecknas.



För snörkraften har vi från avsnitt 2.3.2 utnyttjat att kraften i ett snöre är den samma överallt.

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$\mathcal{A}$, $\downarrow$: $\quad m_{\mathcal{A}}g - S = m_{\mathcal{A}}a_{\mathcal{A}} \qquad (1)$

$\mathcal{B}$, $\uparrow$: $\quad 2S - m_{\mathcal{B}}g = m_{\mathcal{B}}a_{\mathcal{B}} \qquad (2)$

Vi väljer, helt godtyckligt, att definiera $a_{\mathcal{A}}$ positiv nedåt och $a_{\mathcal{B}}$ positiv uppåt. Huruvida $\mathcal{A}$ accelererar uppåt eller nedåt kommer bero på hur $m_{\mathcal{A}}$ och $m_{\mathcal{B}}$ är relaterade, se nedan.

Snörets längd, l:

$$l = l_0 + x_{\mathcal{A}} + 2x_{\mathcal{B}} + \text{konstant} = \text{konstant}$$

Vi har två ekvationer för tre obekanta (S, $a_{\mathcal{A}}$, $a_{\mathcal{B}}$). En tredje ekvation fås genom att utnyttja att snörets längd är konstant, vilket ger ett samband mellan $a_{\mathcal{A}}$ och $a_{\mathcal{B}}$, se exempel 2.7.

Vi för in koordinaterna $x_{\mathcal{A}}$ och $x_{\mathcal{B}}$, där $x_{\mathcal{A}}$ anger läget på $\mathcal{A}$ från en fix punkt, och $x_{\mathcal{B}} + h$ anger läget på $\mathcal{B}$ från en fix punkt, där h är en konstant.

Tidsderivering två gånger (l_0 konst.) $\Rightarrow$

$$\ddot{l} = \underbrace{\ddot{x}_{\mathcal{A}}}_{a_{\mathcal{A}}} + 2\underbrace{\ddot{x}_{\mathcal{B}}}_{-a_{\mathcal{B}}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

Eftersom $x_{\mathcal{A}}$ är positivt definierad nedåt, och mäts från en fix punkt, måste $\ddot{x}_{\mathcal{A}} = a_{\mathcal{A}}$ då även $a_{\mathcal{A}}$ är positivt definierad nedåt.

$\mathcal{B}$:s läge från en fix punkt ges av $x_{\mathcal{B}} + h$ där $x_{\mathcal{B}}$ är positivt definierad nedåt och h är en konstant, så det måste gälla att $(x_{\mathcal{B}} + h)^{\cdot\cdot} = \ddot{x}_{\mathcal{B}} = -a_{\mathcal{B}}$ då $a_{\mathcal{B}}$ är positivt definierad uppåt.

$$a_{\mathcal{B}} = \frac{a_{\mathcal{A}}}{2}$$

$$(1) \Rightarrow \quad S = m_{\mathcal{A}}g - ma_{\mathcal{A}}$$

Insättning i (2) $\Rightarrow$

$$2(m_{\mathcal{A}}g - m_{\mathcal{A}}a_{\mathcal{A}}) - m_{\mathcal{B}}g = \frac{m_{\mathcal{B}}a_{\mathcal{A}}}{2} \quad \Leftrightarrow$$

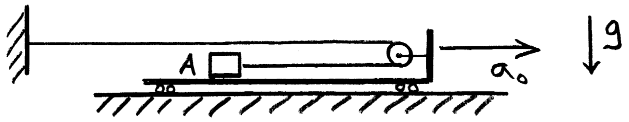
$$\underline{\underline{a_{\mathcal{A}} = \frac{4m_{\mathcal{A}}g - 2m_{\mathcal{B}}g}{4m_{\mathcal{A}} + m_{\mathcal{B}}}, \downarrow}}$$

Dimensionen ok!

$a_{\mathcal{A}}$ blir inte oändlig för någon kombination av $m_{\mathcal{A}} > 0$ och $m_{\mathcal{B}} > 0$, ok!

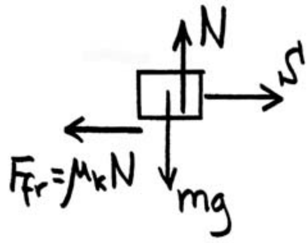
$m_{\mathcal{A}}$ stor i förhållande till $m_{\mathcal{B}} \Rightarrow \mathcal{A}$ accelererar nedåt, ok!

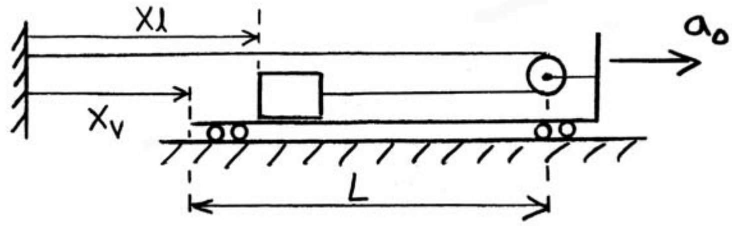
41)



Sökt: S

Frilägg klossen:





Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

Klossen glider åt höger relativt vagnen (klossen kommer ju allt närmare trissan), så friktionskraften $\mu_k N$ är riktad åt vänster.

$\rightarrow$: $\quad S - \mu_k N = m\ddot{x}_l$

$\uparrow$: $\quad N - mg = 0$

Vi för in koordinaten x_l som anger klossens läge från en fix punkt. Klossens acceleration åt höger är därför $+\ddot{x}_l$. Observera att $\ddot{x}_l \neq a_0$, där a_0 är vagnens acceleration, eftersom klossen rör sig relativt vagnen, jämför anmärkning 2.2.

$$\therefore \quad S = m\ddot{x}_l + \mu_k mg \qquad (1)$$

Snörets längd, l:

Vi måste teckna klossens acceleration $\ddot{x}_l$ som funktion av vagnens givna acceleration a_0. Vi utnyttjar att snörets längs är konstant.

$$l = x_v + 2L - (x_l - x_v) + \text{konstant}$$

Vi för in vagnens läge x_v från en fix punkt, samt det konstanta avståndet L mellan vagnens vänsterkant och trissan.

Tidsderivering två gånger (l, L konst.) $\Rightarrow$

$$2\underbrace{\ddot{x}_v}_{a_0} - \ddot{x}_l = 0 \quad \Leftrightarrow$$

Eftersom x_v är positivt definierad åt höger och mäts från en fix punkt, måste $\ddot{x}_v = a_0$ eftersom även a_0 är positivt definierad åt höger.

$$\ddot{x}_l = 2a_0$$

Insättning i (1) $\Rightarrow$

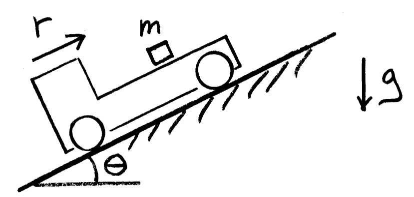
$$\underline{\underline{S = m(2a_0 + \mu_k g)}}$$

Dimensionen ok!

$a_0 \uparrow \Rightarrow\ S \uparrow$ ok!

$\mu_k \uparrow \Rightarrow\ S \uparrow$ ok!

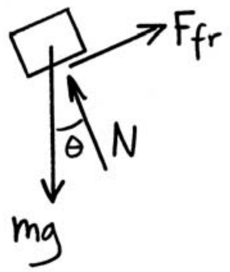
42)

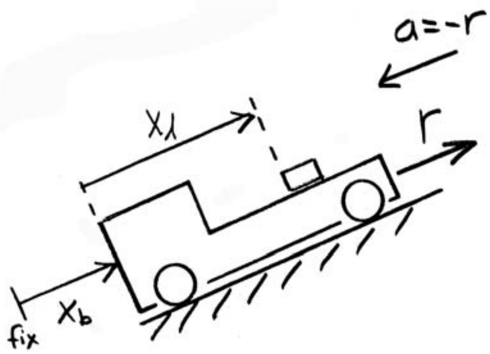


<u>Sökt:</u> μ_s så ej glider

Vi måste ta fram friktionskraften F_{fr} och normalkraften N eftersom villkoret för att det inte ska glida är att $|F_{\text{fr}}| \leq \mu_s N$.

Frilägg lådan:





Friktionskraften är riktad $\nearrow$: om lastbilen tvärnitar kommer ju lådan glida $\swarrow$, och friktionskraften är alltid motriktad glidhastigheten enligt (2.10).

För att kunna avgöra när det inte glider för vi in koordinaten x_l som anger lådans läge relativt lastbilen (mätt från lastbilens framkant). Om lådan inte glider på flaket är ju x_l konstant.

Vi för även in koordinaten x_b som anger lastbilens läge från en fix punkt. Lådans läge mätt från en fix punkt ges alltså av $x_b + x_l$, så att lådans acceleration relativt en fix referensram (inertialram) blir $(x_b + x_l)^{\cdot\cdot}$, vilket är den acceleration som ska stå i högerledet för Newton II för lådan, jämför anmärkning 2.2.

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\nearrow: \quad F_{\text{fr}} - mg\sin\theta = m(x_b + x_l)^{\cdot\cdot} \qquad (1)$$

$$\nwarrow: \quad N - mg\cos\theta = 0 \qquad (2)$$

Om lådan inte glider: x_l konstant

(1) $\Rightarrow$

$$F_{\text{fr}} - mg\sin\theta = m\ddot{x}_b = m(-a) = mr \quad \Leftrightarrow$$

Eftersom x_b är positivt definierad $\nearrow$ och mäts från en fix punkt, måste $\ddot{x}_b = -a$ eftersom lastbilens acceleration a är positivt definierad $\swarrow$. Retardationen r definieras som $r = -a$.

$$F_{\text{fr}} = mr + mg\sin\theta > 0$$

$$(2) \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta$$

Glider ej om $|F_{\text{fr}}| \leq \mu_s N \quad \Leftrightarrow$

Enligt (2.10).

$$\therefore \quad mr + mg\sin\theta \leq \mu_s mg\cos\theta \quad \Leftrightarrow$$

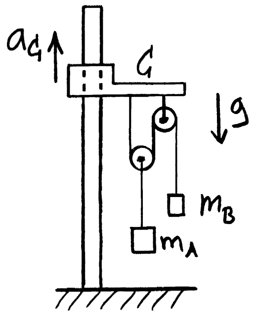
$$\underline{\underline{\mu_s \geq \frac{r}{g\cos\theta} + \tan\theta}}$$

Dimensionen ok!

$r \uparrow \Rightarrow \mu_s \uparrow$ ok!

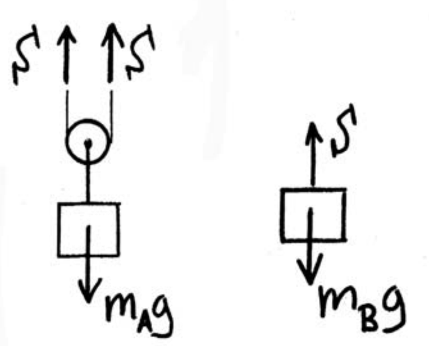
$r = 0$, $\theta = 0 \Rightarrow \mu_s = 0$ ok!

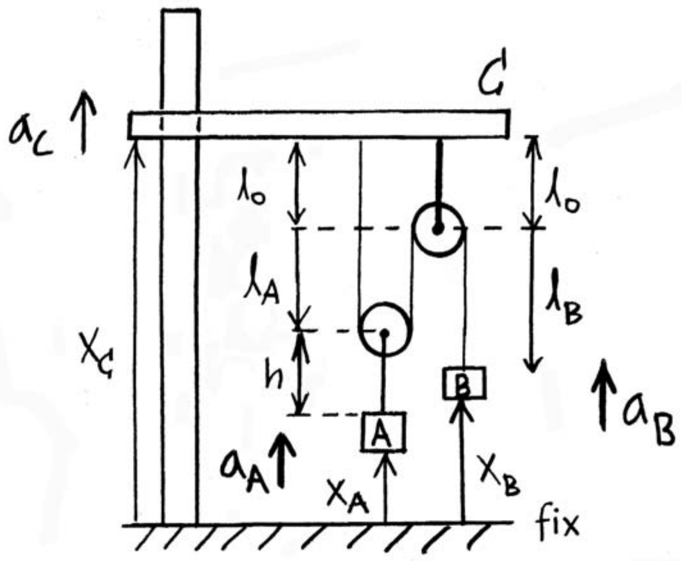
40)



<u>Sökt:</u> $a_{\mathcal{A}}$, $a_{\mathcal{B}}$

Frilägg $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$:



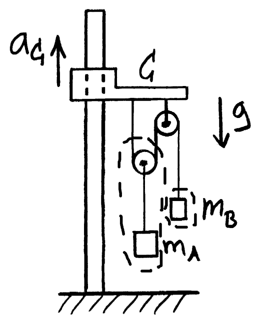


Vid friläggningen av $\mathcal{A}$ tar vi med trissan samt omliggande snöre eftersom vi vet hur snörkraften kan tecknas.

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$\mathcal{A}, \uparrow$: $\quad 2S - m_{\mathcal{A}}g = m_{\mathcal{A}}a_{\mathcal{A}} \qquad (1)$

$\mathcal{B}, \uparrow$: $\quad S - m_{\mathcal{B}}g = m_{\mathcal{B}}a_{\mathcal{B}} \qquad (2)$



För snörkraften har vi från avsnitt 2.3.2 utnyttjat att kraften i ett snöre är den samma överallt.

Vi väljer, helt godtyckligt, att definiera båden $a_{\mathcal{A}}$ och $a_{\mathcal{B}}$ positiva uppåt. Huruvida blocken accelererar uppåt eller nedåt kommer bero på hur $m_{\mathcal{A}}$, $m_{\mathcal{B}}$ och $a_{\mathcal{C}}$ är relaterade, se nedan.

Snörets längd, l:

$$l = l_0 + 2l_{\mathcal{A}} + l_{\mathcal{B}} + \text{konstant} = \text{konstant}$$

Tidsderivering två gånger (l_0 konst.) $\Rightarrow$

$$2\ddot{l}_{\mathcal{A}} + \ddot{l}_{\mathcal{B}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{l}_{\mathcal{B}} = -2\ddot{l}_{\mathcal{A}} \qquad (3)$$

Vi har två ekvationer för tre obekanta (S, $a_{\mathcal{A}}$, $a_{\mathcal{B}}$). En tredje ekvation fås genom att utnyttja att snörets längd är konstant, vilket ger ett samband mellan $a_{\mathcal{A}}$ och $a_{\mathcal{B}}$, se exempel 2.7.

Vi för in koordinaterna $x_{\mathcal{A}}$ och $x_{\mathcal{B}}$ som anger läget på $\mathcal{A}$ respektive $\mathcal{B}$ från det fixa golvet. Vidare för vi in koordinaten $x_{\mathcal{C}}$ som anger läget på $\mathcal{C}$ från det fixa golvet, samt l_0 (konstant), $l_{\mathcal{A}}$, h (konstant) samt $l_{\mathcal{B}}$.

Blockens accelerationer i en inertialram:

$$a_{\mathcal{A}} = \ddot{x}_{\mathcal{A}} = (x_{\mathcal{C}} - l_0 - l_{\mathcal{A}} - h)^{\cdot\cdot} =$$

$$= \ddot{x}_{\mathcal{C}} - \ddot{l}_{\mathcal{A}} = +a_{\mathcal{C}} - \ddot{l}_{\mathcal{A}} \qquad (4)$$

$$a_{\mathcal{B}} = \ddot{x}_{\mathcal{B}} = (x_{\mathcal{C}} - l_0 - l_{\mathcal{B}})^{\cdot\cdot} =$$

$$= \ddot{x}_{\mathcal{C}} - \ddot{l}_{\mathcal{B}} = +a_{\mathcal{C}} - \ddot{l}_{\mathcal{B}} \qquad (5)$$

Storheterna $\ddot{l}_{\mathcal{A}}$ och $\ddot{l}_{\mathcal{B}}$ måste på något sätt vara relaterade till blockens acceleration i en inertialram, d.v.s. $\ddot{x}_{\mathcal{A}}$ och $\ddot{x}_{\mathcal{B}}$. Sambanden fås ur figuren.

Eftersom $x_{\mathcal{A}}$ är positivt definierad uppåt och mäts från en fix punkt, måste $a_{\mathcal{A}} = \ddot{x}_{\mathcal{A}}$ eftersom även $a_{\mathcal{A}}$ är positivt definierad uppåt. På samma sätt måste $a_{\mathcal{B}} = \ddot{x}_{\mathcal{B}}$ och $a_{\mathcal{C}} = \ddot{x}_{\mathcal{C}}$. Här kan $x_{\mathcal{A}}$ och $x_{\mathcal{B}}$ tecknas i termer av $l_{\mathcal{A}}$, $l_{\mathcal{B}}$ och $x_{\mathcal{C}}$.

Insättning av (4), (5) i (3) $\Rightarrow$

$$a_{\mathcal{C}} - a_{\mathcal{B}} = -2(a_{\mathcal{C}} - a_{\mathcal{A}}) \quad \Leftrightarrow$$

$$a_{\mathcal{B}} = 3a_{\mathcal{C}} - 2a_{\mathcal{A}} \qquad (6)$$

Med (1), (2) och (6) har vi nu de tre ekvationer vi behöver.

(2), (6) $\Rightarrow$

$$S = m_{\mathcal{B}}g + m_{\mathcal{B}}(3a_{\mathcal{C}} - 2a_{\mathcal{A}})$$

Insättning i (1) $\Rightarrow$

$$2m_{\mathcal{B}}g + 6m_{\mathcal{B}}a_{\mathcal{C}} - 4m_{\mathcal{B}}a_{\mathcal{A}} - m_{\mathcal{A}}g = m_{\mathcal{A}}a_{\mathcal{A}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{a_{\mathcal{A}} = \frac{2m_{\mathcal{B}}g - m_{\mathcal{A}}g + 6m_{\mathcal{B}}a_{\mathcal{C}}}{m_{\mathcal{A}} + 4m_{\mathcal{B}}}, \uparrow}}$$

Dimensionen ok!

$a_{\mathcal{A}}$ blir inte oändlig för någon kombination av $m_{\mathcal{A}} > 0$ och $m_{\mathcal{B}} > 0$, ok!

$m_{\mathcal{A}}$ stor i förhållande till $m_{\mathcal{B}}$ och $a_{\mathcal{C}}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ accelererar nedåt, ok!

$a_{\mathcal{C}}$ stor i förhållande till $m_{\mathcal{A}}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ accelererar uppåt, ok!

$$(6) \Rightarrow \quad \underline{\underline{a_{\mathcal{B}} = 3a_{\mathcal{C}} - 2a_{\mathcal{A}}, \uparrow}}$$