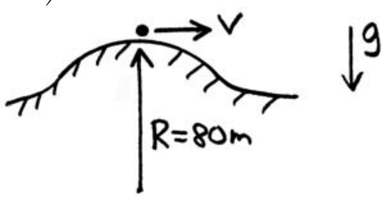
28)



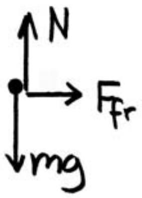
Givet: $R = 80$ m

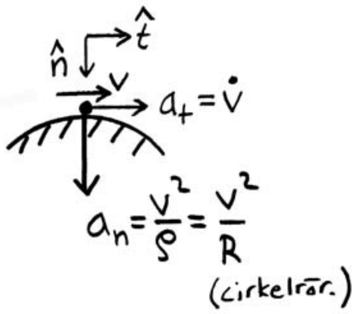
Sökt: $v_{\max}$ så ej lättar.

Bilen förlorar kontakten med vägen då normalkraften $N = 0$. Vi tecknar därför ett allmänt uttryck för N och kontrollerar när $N = 0$.

Eftersom bilen utför cirkelrörelse är det lämpligast att teckna accelerationen i naturliga basen enligt (1.14) (eller i polära koordinater).

Frilägg bilen:





Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\downarrow: \quad mg - N = \frac{mv^2}{R} \quad \Leftrightarrow$$

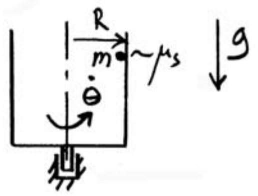
$$N = mg - \frac{mv^2}{R} > 0 \quad \Leftrightarrow$$

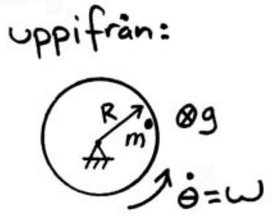
Bilen är i kontakt med vägen om $N > 0$.

$$v < \sqrt{Rg}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{v_{\max} = \sqrt{Rg} = 29 \text{ m/s} = 29 \cdot 3.6 = 101 \text{ km/h}}}$$

29)





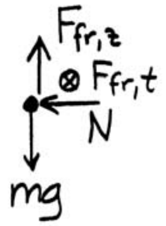
<u>Givet:</u> $\dot{\theta} = \omega$ konstant

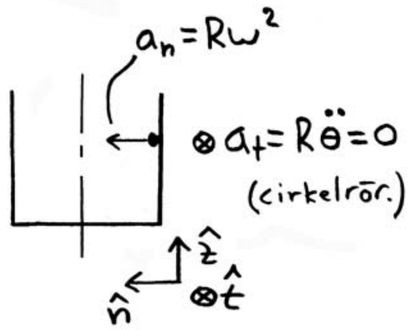
<u>Sökt:</u> ω_{min} så ej glider ner.

Villkoret för att masspunkten inte ska glida är att $|\overline{F}_{\text{fr}}| \leq \mu_s N$ enligt (2.10).

För att kunna bestämma minsta erforderligt ω måste vi därför först ta fram friktionskraften $\overline{F}_{\text{fr}}$ och normalkraften N.

Frilägg masspunkten:





Eftersom masspunkten utför cirkelrörelse är det lämpligt att teckna accelerationen i den naturliga basen enligt (1.16) (eller i polära koordinater enligt (1.27)). Ekvation (1.16) är lämpligare än det allmänna uttrycket (1.14) eftersom vi söker vinkelhastigheten $\dot{\theta} = \omega$, inte farten v.

I det fall masspunkten inte glider ner, har den ingen vertikal acceleration.

Från avsnitt 2.3 har vi utnyttjat hur följande krafter ser ut: tyngdkraften mg samt kontaktkraften med friktion (N, $\overline{F}_{\text{fr}}$). Observera att friktionskraften här, rent allmänt, kan ha nollskilda komponenter både i $\hat{z}$-led och i $\hat{t}$-led.

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\uparrow: \quad F_{\text{fr},z} - mg = 0 \quad \text{om inte glider ner} \qquad (1)$$

$$\otimes: \quad F_{\text{fr},t} = mR\ddot{\theta} = 0 \qquad (2)$$

$$\leftarrow: \quad N = mR\omega^2 \qquad (3)$$

$$(1), (2) \Rightarrow |\overline{F}_{\text{fr}}| = \sqrt{F_{\text{fr},z}^2 + F_{\text{fr},t}^2} = mg \qquad (4)$$

Glider ej om $|\overline{F}_{\text{fr}}| \leq \mu_s N$.

Enligt (2.10).

$(3), (4) \Rightarrow$

$$mg \leq \mu_s m R \omega^2 \quad \Rightarrow$$

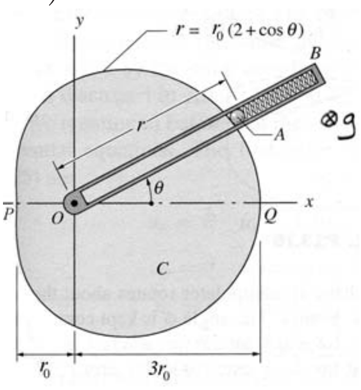
$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}}}}$$

Dimensionen ok!

$\mu_s \downarrow \Rightarrow \omega_{\min} \uparrow$ ok!

44)



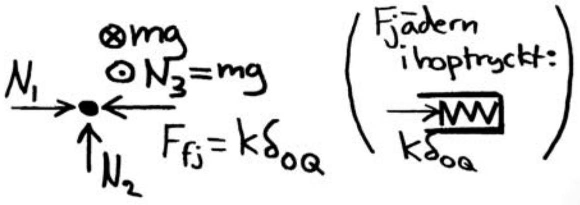
<u>Givet:</u> $\dot{\theta} = \omega$ konstant

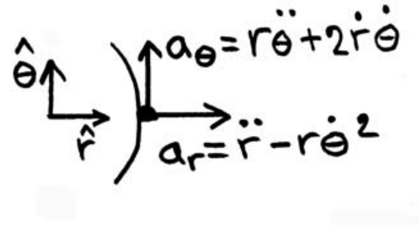
$\mathcal{A}$ vid $\mathcal{P}$ i vila $\Rightarrow F_{\text{fj}} = F_0$

<u>Sökt:</u> k så i kontakt vid $\mathcal{Q}$.

Rullen $\mathcal{A}$ är i kontakt med kammen om normalkraften N_1 på rullen från kammen uppfyller $N_1 > 0$. Vi bestämmer därför ett allmänt uttryck på N_1 och kontrollerar när $N_1 > 0$.

Frilägg rullen när den är vid $\mathcal{Q}$:





Eftersom vi känner kammens form i polära koordinater, tecknar vi $\mathcal{A}$:s acceleration i just dessa koordinater enligt (1.25).

Från avsnitt 2.3 har vi utnyttjat hur följande krafter ser ut: tyngdkraften mg, fjäderkraften samt kontaktkraften utan friktion (N_1, N_2, N_3), där N_1 är normalkraften från kammen, N_2 är normalkraften från armen samt N_3 är normalkraften från golvet.

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\hat{r}: \quad N_1 - k\delta_{\mathcal{OQ}} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad (1)$$

Fjäderns hoptryckning när armen står i läge $\mathcal{OQ}$ kallar vi $\delta_{\mathcal{OQ}}$, så att fjäderkraften är $k\delta_{\mathcal{OQ}}$.
För att få fram N_1, måste vi först bestämma $\delta_{\mathcal{OQ}}$ och $\ddot{r}$. Vi börjar med $\ddot{r}$, vilken kan bestämmas eftersom vi känner $r = r(\theta)$ samt $\dot{\theta}$ och $\ddot{\theta}$.

$\ddot{r}$?

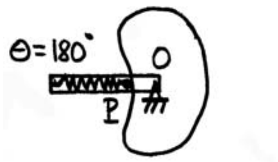
$$r = r_0(2 + \cos\theta) \Rightarrow$$

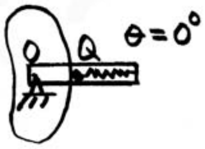
$$\dot{r} = -r_0 \sin\theta\,\dot{\theta} = -r_0 \sin\theta \underbrace{\omega}_{\text{konst.}}$$

Kedjeregeln.

$$\ddot{r} = -r_0\omega\cos\theta\,\dot{\theta} = -r_0\omega^2\cos\theta \qquad (2)$$

$\delta_{\mathcal{OQ}}$?





Vi känner fjäderkraften då rullen är vid $\mathcal{P}$. Detta ger oss direkt fjäderns hoptryckning $\delta_{\mathcal{OP}}$ då rullen är vid $\mathcal{P}$. Därefter kan fjäderns hoptryckning $\delta_{\mathcal{OQ}}$ när rullen är vid $\mathcal{Q}$ bestämmas eftersom vi kan beräkna hur r ändras mellan $\mathcal{P}$ och $\mathcal{Q}$.

Med rullen vid $\mathcal{P}$ är fjäderkraften $k\delta_{\mathcal{OP}} = F_0$.

$$\therefore \quad \text{Hoptryckningen } \delta_{\mathcal{OP}} = \frac{F_0}{k} \qquad (3)$$

Med $\mathcal{A}$ vid $\mathcal{P}$ är $r = r(\theta = 180°) = r_0(2-1) = r_0$

Med $\mathcal{A}$ vid $\mathcal{Q}$ är $r = r(\theta = 0) = r_0(2+1) = 3r_0$

Fjädern är alltså $3r_0 - r_0 = 2r_0$ kortare vid $\mathcal{Q}$ än vid $\mathcal{P}$, så fjäderns hoptryckning måste vara $2r_0$ större vid $\mathcal{Q}$ än vid $\mathcal{P}$.

$\therefore$ Hoptryckningen vid $\mathcal{Q}$ är $3r_0 - r_0 = 2r_0$
större än vid $\mathcal{P}$:

$$\delta_{\mathcal{OQ}} = \delta_{\mathcal{OP}} + 2r_0$$

(3) $\Rightarrow$

$$\therefore \quad \delta_{\mathcal{OQ}} = \frac{F_0}{k} + 2r_0 \qquad (4)$$

Insättning av (2), (4) i (1) $\Rightarrow$

$$N_1 = k\left(\frac{F_0}{k} + 2r_0\right) + m\big(-r_0\omega^2 \underbrace{\cos\theta}_{1} - 3r_0\omega^2\big) =$$

$$= F_0 + 2kr_0 - 4mr_0\omega^2 > 0$$

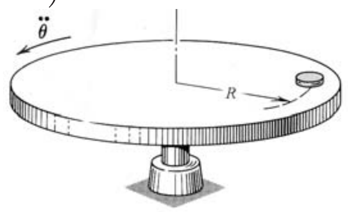
Förlorar inte kontakten vid $\mathcal{Q}$ om $N_1 > 0$.

$$\therefore \quad \underline{\underline{k > 2m\omega^2 - \frac{F_0}{2r_0}}}$$

Dimensionen ok!

$\omega \uparrow \Rightarrow \quad k \uparrow$ ok! (Rullen vill slungas utåt p.g.a. rotationen. Det behövs en mycket stark fjäder för att förhindra detta om ω är stor.)

46)



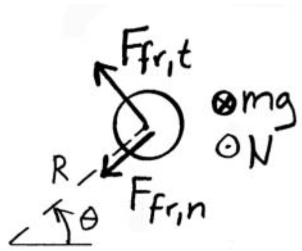
Givet: Startar i vila.

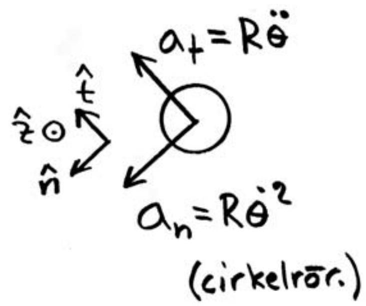
$$\ddot{\theta} = \alpha \text{ konstant}$$

Sökt: Antal varv N innan glider.

I gränsfallet att det ska börja glida gäller enligt (2.10) $|\overline{F}_{\text{fr}}| = \mu_s N$. För att kunna bestämma när det börjar glida, måste vi alltså först räkna ut friktionskraften $\overline{F}_{\text{fr}}$ och normalkraften N.

Frilägg myntet vid godtycklig vinkel θ innan det börjat glida:





Innan myntet börjar glida, utför det cirkelrörelse med radien R. Det är därför lämpligt att teckna accelerationen i den naturliga basen enligt (1.16). Vi använder (1.16) i stället för det allmänna uttrycket i (1.14) eftersom vi känner $\ddot{\theta}$.

Observera att riktningen på friktionskraften inte är känd. Vi för därför in två komponenter av friktionskraften: $F_{\text{fr},t}$ och $F_{\text{fr},n}$, se anmärkning 2.7.

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\hat{n}: \quad F_{\text{fr},n} = mR\dot{\theta}^2 \qquad (1)$$

$$\hat{t}: \quad F_{\text{fr},t} = mR\ddot{\theta} = mR\alpha \qquad (2)$$

$$\hat{z}: \quad N - mg = 0 \qquad (3)$$

$$(3) \Rightarrow N = mg$$

$$(1), (2) \Rightarrow$$

$$|\overline{F}_{\text{fr}}| = \sqrt{F_{\text{fr},n}^2 + F_{\text{fr},t}^2} = mR\sqrt{\dot{\theta}^4 + \alpha^2}$$

Börjar glida då $|\overline{F}_{\text{fr}}| = \mu_s N$ vid vinkeln

$\theta = \theta_g$ (då $\dot{\theta} = \dot{\theta}_g$):

Enligt (2.10).

$$mR\sqrt{\dot{\theta}_g^4 + \alpha^2} = \mu_s mg \quad \Leftrightarrow$$

$$\dot{\theta}_g^4 + \alpha^2 = \left(\frac{\mu_s g}{R}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\theta}_g^2 = \sqrt{\left(\frac{\mu_s g}{R}\right)^2 - \alpha^2} \qquad (4)$$

Vi söker antalet varv N innan det börjar glida. Det kan vi bestämma genom att först beräkna vinkeln θ_g då det börjar glida.

Eftersom vi känner $\ddot{\theta} = \alpha$ samt $\dot{\theta} = \dot{\theta}_g$ då det börjar glida, kan vi använda Varignons sats för att få fram vinkeln $\theta = \theta_g$ då det börjar glida.

Varignons sats, (1.26):

$$\ddot{\theta}\, d\theta = \dot{\theta}\, d\dot{\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^{\theta_g} \underbrace{\ddot{\theta}}_{\substack{\alpha,\\ \text{konst.}}} d\theta = \int_0^{\dot{\theta}_g} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha\theta_g = \frac{1}{2}\dot{\theta}_g^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\theta_g = \frac{1}{2\alpha}\dot{\theta}_g^2$$

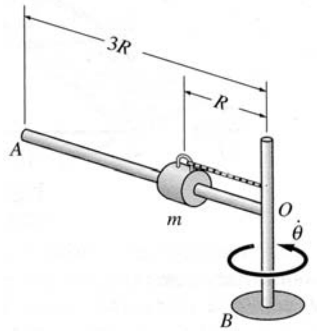
$$\therefore \quad N_g = \frac{\theta_g}{2\pi} = \frac{\dot{\theta}_g^2}{4\pi\alpha} \overset{(4)}{=} \underline{\underline{\frac{1}{4\pi}\sqrt{\left(\frac{\mu_s g}{R\alpha}\right)^2 - 1}}}$$

Dimensionen ok!

$\mu_s \uparrow \Rightarrow N_g \uparrow$ ok! (Lättare att ligga kvar, ju större μ_s är.)

$\alpha \uparrow \Rightarrow N_g \downarrow$ ok! (Svårare att ligga kvar, ju högre vinkelacceleration är.)

45)

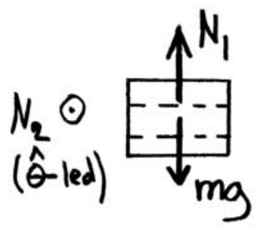


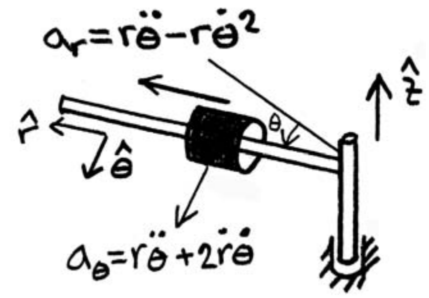
<u>Givet:</u> Klipper vid $t = 0$.

<u>Sökt:</u> a) Kragens rörelseekv.

b) $v_{\mathcal{A}}$

Frilägg kragen på godtyckligt avstånd r från $\mathcal{O}$ efter klippet:





Efter klippet ändras avståndet r mellan kragen och $\mathcal{O}$. Det är därför lämpligt att föra in polära koordinater r och θ för att beskriva kragens läge. Accelerationen i polära koordinater ges av (1.25).

Observera att riktningen för normalkraften på kragen från armen $\mathcal{OA}$ inte är känd. Vi för därför in två komponenter av denna: N_1 i vertikalled och N_2 i $\hat{\boldsymbol{\theta}}$-led, jämför anmärkning 2.7.

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\hat{r}: \quad 0 = m(\ddot{r} - r\underbrace{\dot{\theta}^2}_{\omega^2}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{\ddot{r} - r\omega^2 = 0}} \qquad (1)$$

<u>Begynnelsevillkor:</u>

$$\underline{\underline{r(t=0) = R, \quad \dot{r}(t=0) = 0}}$$

För att kunna lösa denna differentialekvation, behövs även begynnelsevillkoren.

Man klipper snöret vid $t = 0$ då $r = R$. Precis före klippet är r konstant, så $\dot{r}(t = 0^-) = 0$. Avklippningen av snöret orsakar ju ingen knuff i radiell led för kragen, så $\dot{r}(t = 0) = 0$.

b)

$$\overline{v} \overset{(1.24)}{=} \dot{r}\,\hat{r} + r\underbrace{\dot{\theta}}_{\omega}\,\hat{\theta} \qquad (2)$$

Hastigheten i polära koordinater ges av (1.24). Vid $\mathcal{A}$, $r = 3R$, känner vi allt utom $\dot{r}$.

$\dot{r}$?

Vi kan bestämma $\dot{r}$ vid $r = 3R$ m.h.a. Varignons sats eftersom vi känner $\ddot{r} = \ddot{r}(r)$ och $\dot{r}$ vid $r = R$.

Varignons sats, (1.26):

$$\underbrace{\ddot{r}}_{\overset{(1)}{=}\ r\omega^2} dr = \dot{r}\,d\dot{r} \quad \Rightarrow$$

$$\int_R^{3R} r\omega^2\,dr = \int_0^{\dot{r}_{\mathcal{A}}} \dot{r}\,d\dot{r} \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{\omega^2}{2}\left(9R^2 - R^2\right) = \frac{1}{2}\dot{r}_{\mathcal{A}}^2 \quad \Leftrightarrow$$

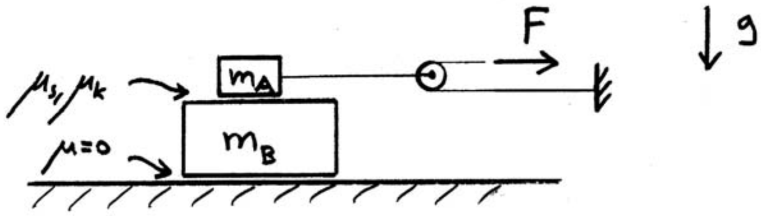
$$\dot{r}_{\mathcal{A}}^2 = 8R^2\omega^2$$

$(2) \Rightarrow$

$$\underline{\underline{|\overline{v}_{\mathcal{A}}|}} = \sqrt{\dot{r}_{\mathcal{A}}^2 + (3R\omega)^2} = \sqrt{8+9}\,R\omega = \underline{\underline{\sqrt{17}\,R\omega}}$$

Dimensionen ok!

30)



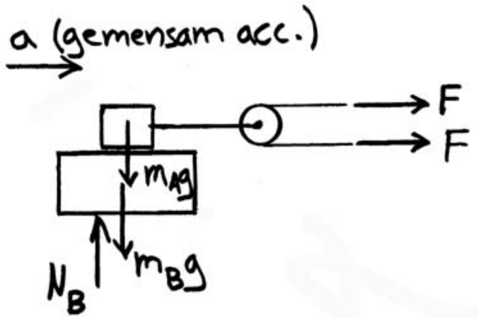
Sökt: a) F_{max} så ej glider

b) $a_{\mathcal{A}}$ och $a_{\mathcal{B}}$ då glider

Villkoret för att det inte ska glida mellan klossarna är enligt (2.10) att $|F_{\mathcal{A}}| \leq \mu_s N_{\mathcal{A}}$, där $F_{\mathcal{A}}$ och $N_{\mathcal{A}}$ är friktions- respektive normalkraften på kloss $\mathcal{A}$ från kloss $\mathcal{B}$. För att kunna bestämma maximal snörkraft F_{max} måste vi därför ta fram $F_{\mathcal{A}}$ och $N_{\mathcal{A}}$.

Eftersom det här inte glider mellan $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$, kan klossarna ses som en enda kloss med massan $m_{\mathcal{A}} + m_{\mathcal{B}}$. Klossarnas gemensamma acceleration kallas a. Genom att teckna Newton II för $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ får vi fram a som funktion av snörkraften F. Tecknar vi därefter Newton II för $\mathcal{A}$ får vi fram $F_{\mathcal{A}}$ och $N_{\mathcal{A}}$ som funktion av snörkraften F.

Frilägg $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$:

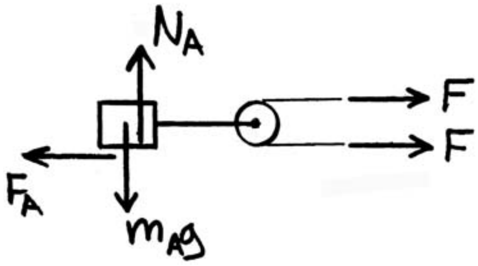


Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\rightarrow: \quad 2F = (m_{\mathcal{A}} + m_{\mathcal{B}})a \quad \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{2F}{m_{\mathcal{A}} + m_{\mathcal{B}}} \qquad (1)$$

Frilägg $\mathcal{A}$:



Newton II:

$\rightarrow$: $2F - F_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}} a$ (2)

$\uparrow$: $N_{\mathcal{A}} - m_{\mathcal{A}} g = 0$ (3)

(2) $\Rightarrow$

$$F_{\mathcal{A}} \overset{(1)}{=} 2F - m_{\mathcal{A}} \frac{2F}{m_{\mathcal{A}} + m_{\mathcal{B}}} = 2F \frac{m_{\mathcal{B}}}{m_{\mathcal{A}} + m_{\mathcal{B}}}$$

(3) $\Rightarrow$

$$N_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}} g$$

Glider ej om $|F_{\mathcal{A}}| \leq \mu_s N_{\mathcal{A}} \quad \Leftrightarrow$

Enligt (2.10).

$$2F \frac{m_{\mathcal{B}}}{m_{\mathcal{A}} + m_{\mathcal{B}}} \leq \mu_s m_{\mathcal{A}} g$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{F_{\max} = \frac{\mu_s m_{\mathcal{A}} g}{2 m_{\mathcal{B}}} (m_{\mathcal{A}} + m_{\mathcal{B}})}}$$

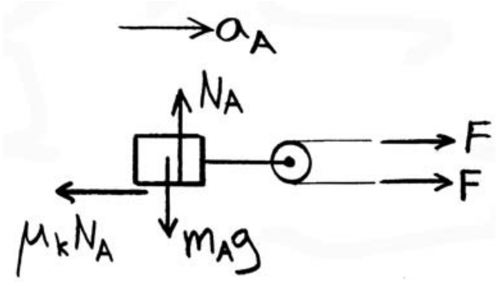
Dimensionen ok!

$\mu_s \uparrow \Rightarrow F_{\max} \uparrow$ ok!

$m_{\mathcal{B}} \to \infty \Rightarrow F_{\max} = \frac{\mu_s m_{\mathcal{A}} g}{2}$, ok ty det är resultatet som fås då $\mathcal{A}$ ligger på ett fixt underlag.

b)

Frilägg $\mathcal{A}$:



Eftersom det glider är enligt (2.11) $F_{\mathcal{A}} = \mu_k N_{\mathcal{A}}$, med $F_{\mathcal{A}}$ motriktad glidhastigheten.

Newton II:

$$\rightarrow: \quad 2F - \mu_k N_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}} a_{\mathcal{A}}$$

$$\uparrow: \quad N_{\mathcal{A}} - m_{\mathcal{A}} g = 0$$

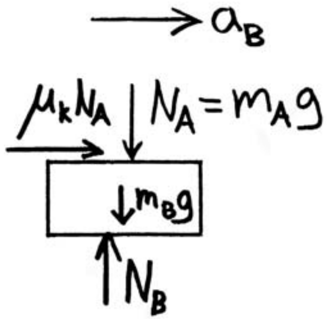
$$\therefore \quad \underline{\underline{a_{\mathcal{A}} = \frac{2F - \mu_k m_{\mathcal{A}} g}{m_{\mathcal{A}}}, \rightarrow}}$$

Dimensionen ok!

$F \uparrow \Rightarrow a_{\mathcal{A}} \uparrow$ ok!

$\mu_k \uparrow \Rightarrow a_{\mathcal{A}} \downarrow$ ok!

Frilägg $\mathcal{B}$:



$F_\mathcal{A}$ är här enligt Newton III, (2.8), lika stor som och motriktad $F_\mathcal{A}$ på kloss $\mathcal{A}$.

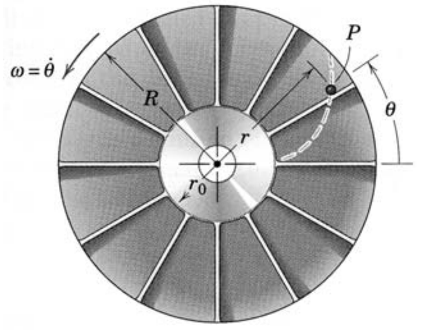
Newton II:

$$\rightarrow: \quad \mu_k N_\mathcal{A} = m_\mathcal{B} a_\mathcal{B}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{a_\mathcal{B} = \frac{\mu_k m_\mathcal{A} g}{m_\mathcal{B}}, \rightarrow}}$$

Oberoende av F, ok ty F påverkar inte $\mathcal{B}$ direkt (men väl indirekt via friktionskraften $\mu_k m_\mathcal{A} g$).

47)

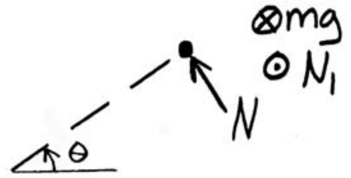


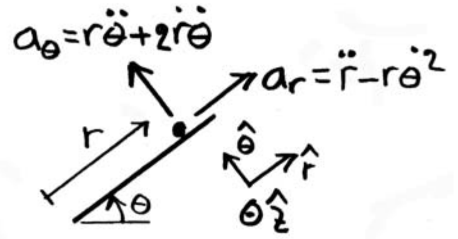
<u>Givet:</u> $t = 0$: $r = r_0$, $\dot{r} = 0$

$\dot{\theta} = \omega$ konstant

<u>Sökt:</u> Normalkraft N från skovel.

Frilägg masspunkten på godtyckligt avstånd r från centrum:





r och θ är polära koordinater som anger masspunktens läge. Därför tecknar vi accelerationen i just dessa koordinater enligt (1.25).

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

På masspunkten verkar tyngden mg, normalkraften N från skoveln och normalkraften N_1 från det horisontella underlaget.

$$\hat{r}: \quad 0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad (1)$$

$$\hat{\theta}: \quad N = m(r\underbrace{\ddot{\theta}}_{0} + 2\dot{r}\underbrace{\dot{\theta}}_{\omega}) \qquad (2)$$

$$\hat{z}: \quad N_1 - mg = 0$$

$$(2) \Rightarrow \quad N = 2m\omega\dot{r} \qquad (3)$$

$\dot{r}$?

För att få fram $N = N(t)$, måste vi bestämma $\dot{r} = \dot{r}(t)$, vilket vi kan göra m.h.a. differentialekvationen i (1).

$(1) \Rightarrow$

$$\ddot{r} - r\omega^2 = 0$$

Karakteristisk ekvation: $p^2 - \omega^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$ Se analyskursen.

$$p = \pm\omega$$

$$\therefore \quad r(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \qquad (4)$$

$$\dot{r}(t) = C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t} \qquad (5)$$

<u>Begynnelsevillkor:</u>

$$t = 0 \Rightarrow \; r = C_1 + C_2 = r_0$$

$$\dot{r} = C_1\omega - C_2\omega = 0$$

$$\therefore \quad C_1 = C_2 = \frac{r_0}{2}$$

Insättning i (4) $\Rightarrow$

$$r = r_0 \cosh \omega t \qquad (6)$$

$$\dot{r} = r_0 \omega \sinh \omega t$$

$$(3) \Rightarrow \quad \underline{\underline{N = 2 m r_0 \omega^2 \sinh \omega t}} \qquad (7)$$

Dimensionen ok!

$\omega \uparrow \Rightarrow \; N \uparrow$ ok!

$N = N(r)?$

$$\cosh^2 \omega t - \sinh^2 \omega t = 1$$

Hyperboliska ettan.

$$\therefore \quad \sinh^2 \omega t \;=\; \cosh^2 \omega t - 1 \overset{(6)}{=} \left(\frac{r}{r_0}\right) - 1$$

$(7) \Rightarrow$

$$\underline{\underline{N \;=\; 2m\omega^2 \sqrt{r^2 - r_0^2}}}$$

Dimensionen ok!

Alt.:

För att få fram $N = N(r)$ utnyttjade vi att vi redan bestämt $N = N(t)$. Alternativt kan vi bestämma $N = N(r)$ direkt utan att blanda in tiden genom att använda Varignons sats.

Varignons sats, (1.26):

$$\underbrace{\ddot{r}}_{\substack{r\omega^2 \\ \text{enl. (1)}}} \, dr \;=\; \dot{r}\, d\dot{r} \quad \Rightarrow$$

$$\int_{r_0}^{r} r\omega^2\, dr \;=\; \int_0^{\dot{r}} \dot{r}\, d\dot{r} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\omega^2}{2}\left(r^2 - r_0^2\right) \;=\; \frac{1}{2}\dot{r}^2 \quad \Rightarrow$$

$$\dot{r} \;=\; \omega\sqrt{r^2 - r_0^2}$$

$(3) \Rightarrow$

$$\underline{\underline{N \;=\; 2m\omega^2 \sqrt{r^2 - r_0^2}}}$$