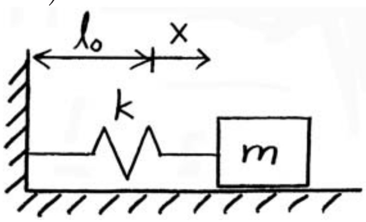
Givet: $m = 10$ kg

$k = 4.0$ kN/m

$x_0 = 50$ mm

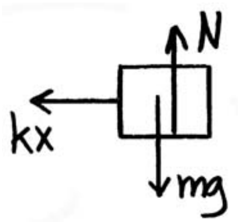
Släpps från vila

76)




Sökt: $x(t)$, $\omega_n$, $f_n$, $|\dot{x}|_{\max}$, $|\ddot{x}|_{\max}$

Frilägg klossen i godtyckligt läge:




Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\rightarrow: \quad -kx = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_n^2} x = 0 \qquad (1)$$

Standardform.

$$\underline{\underline{\omega_n}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \underline{\underline{20 \text{ rad/s}}}$$

$$\omega_n = 2\pi f_n \quad \Leftrightarrow$$

Enligt (6.3) och $f_n = 1/\tau_n$.

$$\underline{\underline{f_n}} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \underline{\underline{3.2 \text{ Hz}}}$$

$(1) \Rightarrow$

$$x \;=\; A\cos\omega_n t \;+\; B\sin\omega_n t$$

$$\dot{x} \;=\; -A\omega_n \sin\omega_n t \;+\; B\omega_n\cos\omega_n t$$

<u>Begynnelsevillkor:</u>

$$x(0) \;=\; x_0 \quad \Rightarrow \quad A \;=\; x_0$$

$$\dot{x}(0) \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad B \;=\; 0$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{x}} \;=\; x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}} \;=\; \underline{\underline{50\cos 20t \text{ mm}}}$$

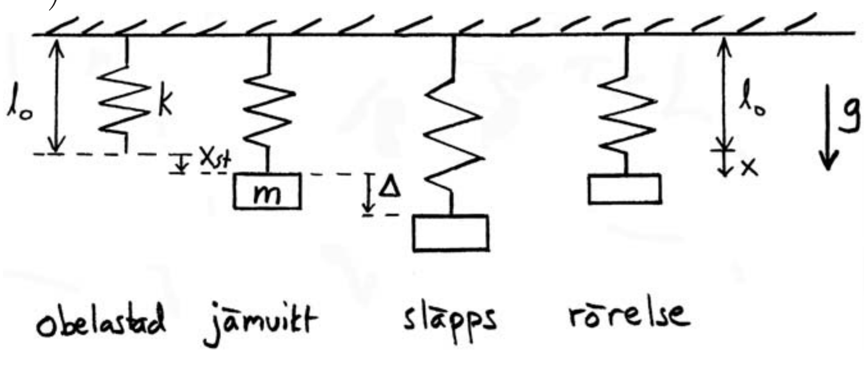
$$\dot{x} \;=\; -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$\ddot{x} \;=\; -x_0\frac{k}{m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{|\dot{x}|_{\max}}} \;=\; x_0\sqrt{\frac{k}{m}} \;=\underline{\underline{1.0 \text{ m/s}}}$$

$$\underline{\underline{|\ddot{x}|_{\max}}} \;=\; x_0\frac{k}{m} \;=\underline{\underline{20 \text{ m/s}^2}}$$

77)




Givet: $m = 5.0$ kg

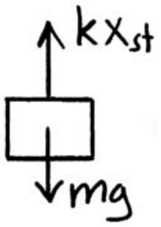
$k = 320$ N/m

$\Delta = 0.10$ m

Släpps från vila

Sökt: $x_{\mathrm{st}}$, $x$

Frilägg klossen i jämviktsläget:



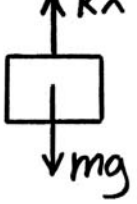

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\downarrow: \quad mg - kx_{\mathrm{st}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

Accelerationen är noll eftersom klossen hänger stilla.

$$\underline{\underline{x_{\mathrm{st}}}} = \frac{mg}{k} = \underline{\underline{0.15 \text{ m}}} \qquad (1)$$

Frilägg klossen i godtyckligt läge:



Newton II:

$$\downarrow: \quad mg - kx = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_n^2} x = g \qquad (2)$$

Standardform.

$$x = x_h + x_p$$

$$x_p = C$$

Högerledet i (2) är en konstant, så vi ansätter partikulärlösningen $x_p$ som en konstant $C$.

Insättning i (2) $\Rightarrow$

$$\frac{k}{m}C = g \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{mg}{k}$$

$$x_h = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t$$

$$\therefore \quad x = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{mg}{k}$$

$$\dot{x} = -A\omega_n\sin\omega_n t + B\omega_n\cos\omega_n t$$

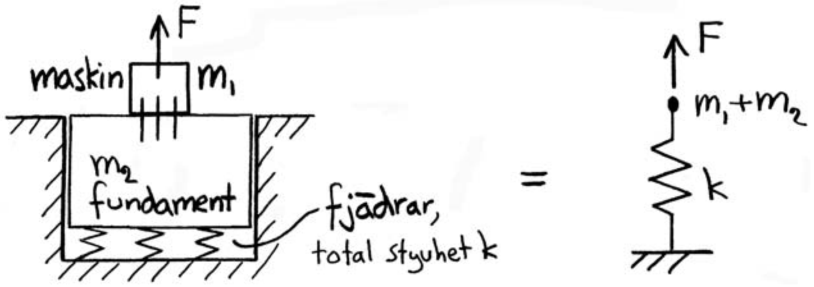
<u>Begynnelsevillkor:</u>

$$x(0) = x_{\mathrm{st}} + \Delta \quad \Rightarrow \quad A + \frac{mg}{k} = x_{\mathrm{st}} + \Delta \overset{(1)}{=} \frac{mg}{k} + \Delta$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{x}} = \Delta \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{mg}{k} = \underline{\underline{0.10 \cos 8t \; + \; 0.15 \text{ m}}}$$

80)




Givet: $m_1 = 4500$ kg

$k = 80$ MN/m

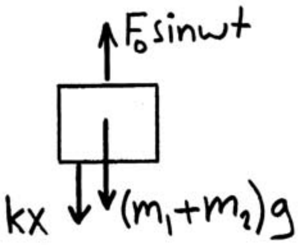
$n = 1000$ varv/min

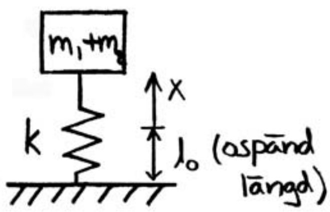
Sökt: $m_2$ så $\omega = 3\omega_n$

Vinkelfrekvens $\omega$ för den exciterande kraften $F_0 \sin \omega t$:

$$\omega \;=\; \frac{2\pi}{60} n \;=\; 105 \text{ rad/s}$$

Frilägg maskin och fundament i godtyckligt läge:




Vi anger läget på massan m.h.a. koordinaten $x$ mätt från en fix punkt. Vi väljer här, helt godtyckligt, att mäta $x$ från den punkt där fjädern är ospänd.

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\uparrow: \quad F_0 \sin \omega t \;-\; (m_1 + m_2)g \;-\; kx \;=\; (m_1 + m_2)\ddot{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} \;+\; \underbrace{\frac{k}{m_1 + m_2}}_{\omega_n^2} x \;=\; \frac{F_0}{m_1 + m_2} \sin \omega t \;-\; g$$

Standardform.

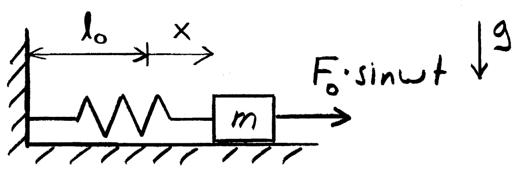
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

$$\omega = 3\omega_n \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\omega}{3}\right)^2 = \frac{k}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{m_2}} = \frac{9k}{\omega^2} - m_1 = \underline{\underline{61 \text{ ton}}}$$

91)



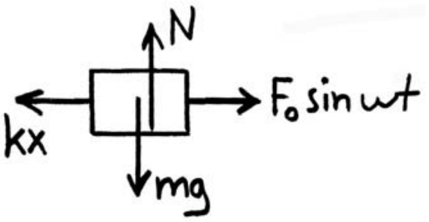

Givet: $x(0) = 0$

$\dot{x}(0) = 0$

$\omega = \omega_n$

Sökt: $x$

Frilägg klossen i godtyckligt läge:




Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\rightarrow: \quad F_0 \sin \omega t \; - \; kx \; = \; m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} \; + \; \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_n^2} \; x \; = \; \frac{F_0}{m} \sin \omega t \qquad (1)$$

Standardform.

$$x \; = \; x_h \; + \; x_p$$

$$x_p \; = \; \Big/ \omega = \omega_n \Big/ \; = \; Xt \cos \omega t$$

Resonans.

$$\dot{x}_p \; = \; X \cos \omega t \; - \; Xt\omega \sin \omega t$$

$$\ddot{x}_p \; = \; -X\omega \sin \omega t - X\omega \sin \omega t - Xt\omega^2 \cos \omega t$$

Insättning i (1) $\Rightarrow$

$$-X\omega \sin \omega t \; - \; X\omega \sin \omega t \; - \; Xt\omega^2 \cos \omega t +$$

$$+ \frac{k}{m} Xt \cos \omega t \; = \; \frac{F_0}{m} \sin \omega t \qquad \Leftrightarrow$$

Cosinustermerna tar ut varandra.

$$X \; = \; -\frac{F_0}{2m\omega}$$

$$x_h \; = \; A \cos \omega_n t \; + \; B \sin \omega_n t \; =$$

$$= \; A \cos \omega t \; + \; B \sin \omega t$$

$$\therefore \quad x \; = \; A \cos \omega t + B \sin \omega t - \frac{F_0}{2m\omega} t \cos \omega t$$

$$\dot{x} \; = \; -A\omega \sin \omega t \; + \; B\omega \cos \omega t -$$

$$-\frac{F_0}{2m\omega} \cos \omega t \; + \; \frac{F_0}{2m} t \sin \omega t$$

<u>Begynnelsevillkor:</u>

$$x(0) \; = \; 0 \quad \Rightarrow \quad A \; = \; 0$$

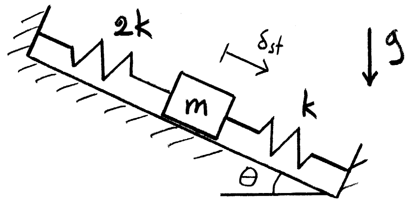
$$\dot{x}(0) \; = \; 0 \quad \Rightarrow \quad B\omega \; = \; \frac{F_0}{2m\omega} \quad \Leftrightarrow \quad B \; = \; \frac{F_0}{2m\omega^2}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{x \; = \; \frac{F_0}{2m\omega^2} \left( \sin \omega t \; - \; \omega t \cos \omega t \right)}}$$

Dimensionen ok!

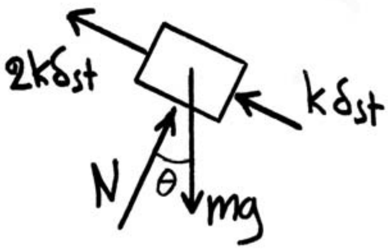
Begynnelsevillkoren uppfyllda!

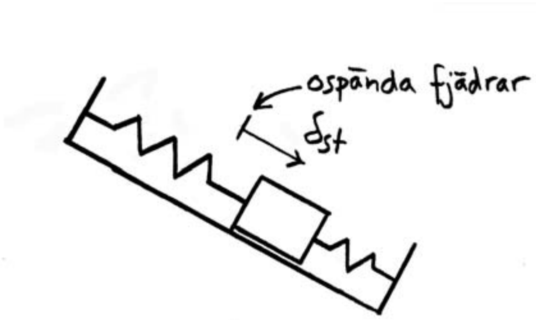
87)




<u>Sökt:</u> $\delta_{\text{st}}$, $\tau$

Frilägg klossen i jämviktsläget:



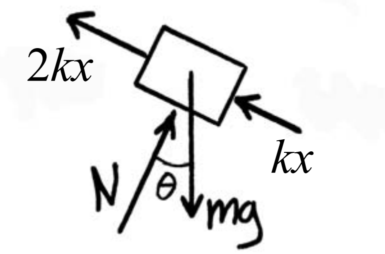

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

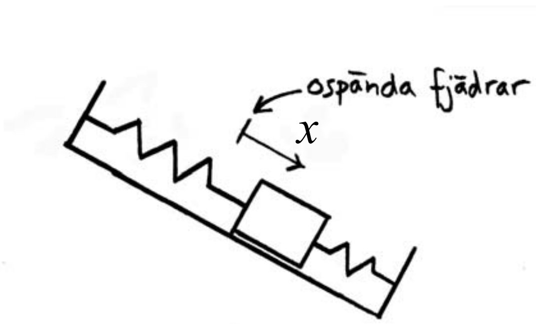
$$\searrow: \quad -3k\delta_{\text{st}} + mg\sin\theta = 0 \quad \Leftrightarrow$$

Accelerationen är noll eftersom klossen ligger stilla.

$$\underline{\underline{\delta_{\text{st}} = \frac{mg\sin\theta}{3k}}}$$

Frilägg klossen i godtyckligt läge:




Vi anger läget på klossen m.h.a. koordinaten $x$ mätt från en fix punkt. Vi väljer här, helt godtyckligt, att mäta $x$ från den punkt där $x = 0$ då fjädrarna är ospända.

Newton II:

$$\searrow: \quad -3kx + mg\sin\theta = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{3k}{m}}_{\omega_n^2} x = g\sin\theta$$

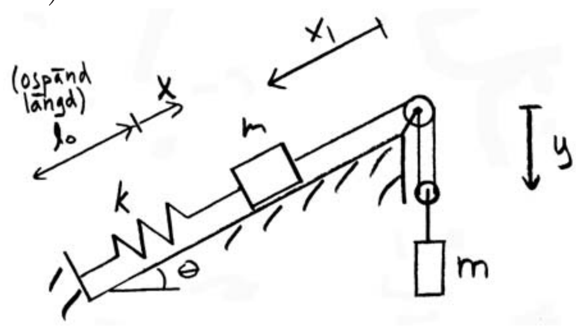
Standardform.

Svängningstid, $\tau$:

$$\underline{\underline{\tau}} \overset{(6.3)}{=} \frac{2\pi}{\omega_n} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}}}$$

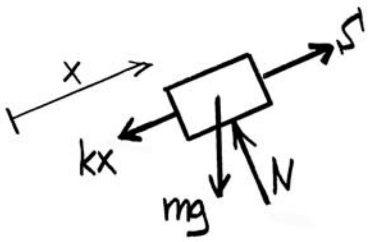
Dimensionen ok!

88)




Sökt: $\omega_n$

Frilägg klossen i godtyckligt läge:




Vi anger läget på klossen m.h.a. koordinaten $x$ mätt från en fix punkt. Vi väljer här, helt godtyckligt, att mäta $x$ från den punkt där $x = 0$ då fjädern är ospänd.

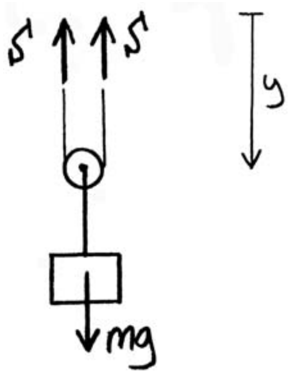
Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\nearrow: \quad S - kx - mg\sin\theta = m\ddot{x} \qquad (1)$$

Frilägg tyngden vid godtyckligt läge:

För att kunna beräkna snörkraften $S$ måste vi även frilägga tyngden. Vi tar därvid med trissan plus omliggande snöre eftersom vi vet hur snörkraften kan tecknas.

Vi anger läget på tyngden m.h.a. koordinaten $y$ mätt från en fix punkt.




Newton II:

$$\downarrow: \quad mg - 2S = m\ddot{y} \qquad (2)$$

Snörets längd, $l$:

Vi behöver hitta sambandet mellan $\ddot{y}$ och $\ddot{x}$, vilket vi kan göra genom att teckna ett uttryck för snörets längd och utnyttja att längden är konstant.

$$l = x_1 + 2y$$

Vi för in koordinaten $x_1$ som anger klossens läge nerför planet från en fix punkt. Eftersom $x$ anger klossens läge *uppför* planet från en fix punkt, gäller $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}$.

Tidsderivering två gånger $\Rightarrow$

$$0 = \ddot{l} = \underbrace{\ddot{x}_1}_{-\ddot{x}} + 2\ddot{y} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{y} = \frac{\ddot{x}}{2}$$

$$(2) \Rightarrow \quad S = \frac{mg}{2} - \frac{m\ddot{x}}{4}$$

Insättning i (1) $\Rightarrow$

$$\frac{mg}{2} - \frac{m\ddot{x}}{4} - kx - mg\sin\theta = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{4}m\ddot{x} + kx = \frac{mg}{2} - mg\sin\theta \quad \Leftrightarrow$$

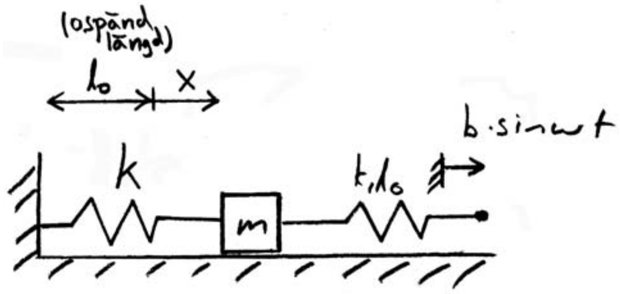
$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{4k}{5m}}_{\omega_n^2} x = \frac{2}{5}g - \frac{4}{5}g\sin\theta$$

Standardform.

$$\underline{\underline{\omega_n = \sqrt{\frac{4k}{5m}}}}$$

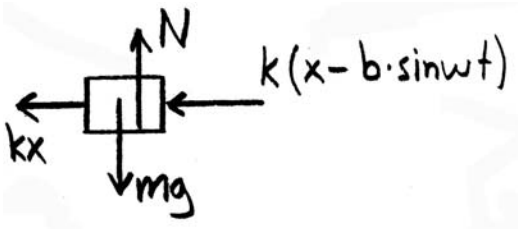
Dimensionen ok!

90)




<u>Sökt:</u> Amplitud i fortvarighet.

Frilägg klossen i godtyckligt läge:




Vi anger läget på klossen m.h.a. koordinaten $x$ mätt från en fix punkt. Vi väljer här, helt godtyckligt, att mäta $x$ från den punkt där $x = 0$ då fjädern är ospänd.

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

För kraften i den högra fjädern, jämför exempel 6.15.

$$\rightarrow: \quad -kx - k(x - b\sin\omega t) = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{2k}{m}}_{\omega_n} x = \frac{kb}{m}\sin\omega t \qquad (1)$$

Standardform.

$$x = x_h + x_p$$

$x_h \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$ (antag trots allt *liten* dämpning)

Se kompendiet sid. 139.

$$x_p = X\sin\omega t$$

$$\dot{x}_p = X\omega \cos\omega t$$

$$\ddot{x}_p = -X\omega^2 \sin\omega t$$

Insättning i (1) $\Rightarrow$

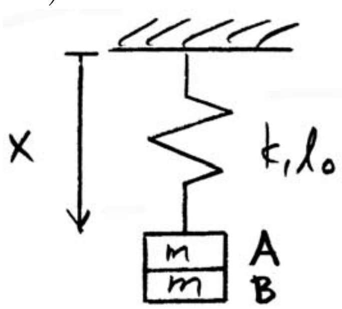
$$-X\omega^2 \sin\omega t + \frac{2k}{m} X \sin\omega t = \frac{kb}{m} \sin\omega t \quad \Leftrightarrow$$

$$X = \frac{\dfrac{kb}{m}}{\dfrac{2k}{m} - \omega^2} = \frac{kb}{2k - m\omega^2}$$

$$\text{Amplituden} = \underline{\underline{|X| = \frac{kb}{|2k - m\omega^2|}}}$$

Dimensionen ok!

92)




Givet: Max limkraft $= \dfrac{3mg}{2}$

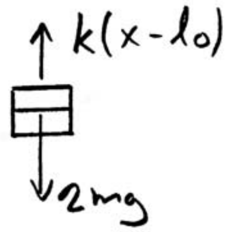
$$x(0) = l_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

Sökt: $t_*$ då $\mathcal{B}$ lossnar från $\mathcal{A}$.

Frilägg klossarna i godtyckligt läge ($t < t_*$):

Vi behöver teckna limkraften som funktion av tiden och kontrollera när den blir $3mg/2$.




Vi anger läget på klossarna m.h.a. koordinaten $x$ mätt från en fix punkt. Vi väljer här, helt godtyckligt, att mäta $x$ från taket.

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\downarrow: \quad 2mg - k(x - l_0) = 2m\ddot{x} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{2m}}_{\omega_n^2} x = g + \frac{kl_0}{2m} \qquad (1)$$

$$x = x_h + x_p$$

$$x_p = C$$

Insättning i (1) $\Rightarrow$

$$\frac{k}{2m}C = g + \frac{kl_0}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{2mg}{k} + l_0$$

$$x_h = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t$$

$$\therefore \quad x = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{2mg}{k} + l_0$$

$$\dot{x} = -A\omega_n\sin\omega_n t + B\omega_n\cos\omega_n t$$

<u>Begynnelsevillkor:</u>

$$x(0) = l_0 \quad \Rightarrow \quad A + \frac{2mg}{k} + l_0 = l_0 \quad \Leftrightarrow$$

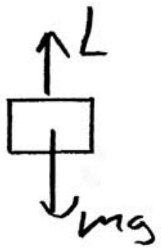
$$A = -\frac{2mg}{k}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$\therefore \quad x = -\frac{2mg}{k}\cos\omega_n t + \frac{2mg}{k} + l_0$$

$$\ddot{x} = \frac{2mg}{k}\frac{k}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t = g\cos\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t \qquad (2)$$

Frilägg den undre klossen i godtyckligt läge ($t < t_*$):




Newton II:

$$\downarrow: \quad mg - L = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow$$

Den undre klossen har naturligtvis samma acceleration $\ddot{x}$ som systemet av båda klossarna.

$$L = mg - m\ddot{x} = mg\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t\right)$$

Lossnar då $L = \dfrac{3mg}{2}$.

$$\therefore \quad \cos\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t_* = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t_* = \frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow$$

Kloss $\mathcal{B}$ lossnar *första* gången $L = 3mg/2$.

$$\underline{\underline{t_* = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}}}}$$

Dimensionen ok!